Классификация линейных порядков, интерпретируемых многомерно в арифметике Пресбургера

Запрягаев А. А.
Москва, Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
azapryagaev@hse.ru

Аннотация: Мы рассматриваем многомерные интерпретации линейных порядков в стандартной модели $(\mathbb{N}, +)$ арифметики Пресбургера. Устанавливается, что всякий такой порядок переводится определимым изоморфизмом в сужение лексикографического порядка $\mathbb{Z}^n$ на некоторое определимое множество для достаточно большого n. Это даёт более простое доказательство гипотезы Виссера об определимом изоморфизме тождественной всякой интерпретации самой арифметики Пресбургера в $(\mathbb{N}, +)$.

Ключевые слова: *Арифметика Пресбургера, интерпретации, линейные порядки*

Classification of multi-dimensionally Presburger-interpretable linear orderings

Zapryagaev A. A.
Moscow, National Research University
Higher School of Economics
azapryagaev@hse.ru

Abstract: We consider the multi-dimensional interpretations of linear orderings in the standard model $(\mathbb{N}, +)$ of Presburger arithmetic. It is established that each such ordering corresponds under a definable isomorphism to a restriction of the lexicographic ordering $\mathbb{Z}^n$ to some definable set for a sufficiently large n. This yields a simpler proof of Visser's conjecture stating that any interpretation of Presburger arithmetic itself into $(\mathbb{N}, +)$ is definably isomorphic to the trivial one.

Keywords: *Presburger arithmetic, interpretations, linear orderings*

Арифметика Пресбургера **PrA**, введённая М. Пресбургером в 1929 г. ([5]), – это элементарная теория натурального ряда со сложением $(\mathbb{N}, +)$. Эта теория полна и разрешима, а также обладает полной схемой индукции [9].

Метод интерпретаций служит стандартным инструментом в теории моделей и исследовании разрешимости теорий первого порядка ([6]; см. также [7]). Интерпретация теории T в структуре M представляет из себя определение моделей T в M формулами первого порядка в языке M. Стандартными примерами являются, в частности, (двумерные) интерпретации

теории элементарной геометрии Тарского и теории комплексных чисел в $\mathbb{R}$ путём отождествления точек (соответственно, комплексных чисел) с упорядоченными парами элементов $\mathbb{R}$.

В настоящей работе предпринимается описание линейных порядков, интерпретируемых в стандартной модели в арифметике Пресбургера. Заметим, что **PrA** лишена возможности кодирования кортежей натуральных чисел одним натуральным числом, поэтому задача должна решаться независимо для одномерных и многомерных интерпретаций.

Для произвольного порядка $(L, \prec)$ определим операцию *конденсации* ([3], стр. 3), которая отождествляет точки, находящиеся на конечном расстоянии. Можно ввести следующую модификацию ранга Кантора-Бендиксона:

Определение 1. *VD^*-рангом* порядка $(L, \prec)$ назовём наименьший ординал κ такой, что κ итераций конденсации, применённые к L, приводят к конечному порядку, если он определён.

В частности, все интерпретируемые в **PrA** порядки являются *разреженными* (иными словами, в них нельзя вложить плотный порядок), поскольку разреженные порядки – это в точности порядки, чей VD^*-ранг конечен.

В [8] установлен следующий, более точный, чем в [9], результат:

Теорема 1. *(А. А. Запрягаев, Ф. Н. Пахомов) Все линейные порядки, интерпретируемые n-мерно в* **PrA**, *имеют VD^*-ранг, не превосходящий n.*

Указанное условие необходимо, но не достаточно для n-мерной интерпретируемости. Это ясно из соображений мощности; начиная с ранга 2, имеется континуум разреженных линейных порядков, не интерпретируемых в $(\mathbb{N}, +)$, однако формул в **PrA** счётное число, поэтому различных интерпретаций тоже возможно лишь счётное количество. Естественно возникает задача полного описания порядков, которые интерпретируемы в арифметике Пресбургера для каждого числа измерений. Мы устанавливаем следующую теорему:

Теорема 2. *(А. А. Запрягаев, Ф. Н. Пахомов) Пусть $\iota\colon L \to \mathbb{N}$ – k-мерная интерпретация разреженного линейного порядка $(L, \prec)$ в $(\mathbb{N}, +)$. Тогда существует такое $n \geq k$, что L переводится определимым изоморфизмом в сужение лексикографического порядка на $\mathbb{Z}^n$ на некоторое определимое множество $S \subseteq \mathbb{Z}^n$.*

На самом деле имеет место более сильный результат: утверждение выполняется и для интерпретируемого в $(\mathbb{N}, +)$ семейства порядков

$$\{(L_p, \succ_p) | p \in P\},$$

где P – некоторое определимое в арифметике Пресбургера множество. Можно показать, что интерпретируемость всего семейства общей формулой возможна только в случае, когда функция $l\colon p \mapsto L_p$ является *кусочно-полиномиальной*, то есть P можно разделить на дизъюнктное объединение определимых множеств, сужение l на каждое из которых является полиномом. (Это понятие служит обобщением *кусочной линейности* [8], которая эквивалентна определимости функции формулой в арифметике Пресбургера.) Доказательство проводится индукцией по степени p и основано на исследовании свойств кусочно полиномиальных функций на $\mathbb{N}^k$.

Из теоремы 2 выводится более простое доказательство гипотезы А. Виссера ([4], стр. 12, теорема 5.1):

Теорема 3. *Пусть ι – n-мерная интерпретация арифметики Пресбургера в $(\mathbb{N}, +)$. Тогда существует определимый в арифметике Пресбургера изоморфизм ι на тождественную интерпретацию.*

Литература

[1] Ginsburg S., Spanier E. *Semigroups, Presburger formulas, and languages* //Pacific Journal of Mathematics. 1966. Т. 16. № 2. С. 285–296.

[2] Ito R. *Every semilinear set is a finite union of disjoint linear sets* // Journal of Computer and System Sciences. 1969. Т. 3. № 2. С. 221-231.

[3] Khoussainov B., Rubin S., Stephan F. *Automatic linear orders and trees.* // ACM Transactions on Computational Logic (TOCL). 2005. Т. 6. № 4. С. 675–700.

[4] Pakhomov F., Zapryagaev A. *Multi-dimensional interpretations of Presburger arithmetic in itself* //Journal of Logic and Computation. 2020. Т. 30. № 8. С. 1681-1693.

[5] Presburger M. *Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt.* // Comptes Rendus du I congrès de Mathématiciens des Pays Slaves 92–101, Warszawa, 1929.

[6] Tarski A., Mostowski A., Robinson R. M. *Undecidable theories.* Elsevier, 1953.

[7] Visser A. *An overview of interpretability logic.* // Kracht M., de Rijke M., Wansing H., Zakharyaschev M., ed., Advances in Modal Logic. Т. 1. CSLI Lecture Notes. № 87. С. 307–359. Center for the Study of Language and Information, Stanford, 1998.

[8] Zapryagaev A., Pakhomov F. *Interpretations of Presburger Arithmetic in Itself* //International Symposium on Logical Foundations of Computer Science. Springer, Cham, 2018. С. 354–367.

[9] Zoethout J. *Interpretations in Presburger Arithmetic.* Bachelor Thesis under the supervision of Albert Visser. Utrecht: Utrecht University. 2015.