

**Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2023 г.**  
**Экзаменационный вариант**  
**по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»**  
**ОП «Финансовые технологии и анализ данных»**

**Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов.**

1. Пусть  $N = \text{НОК}(1, 2, \dots, 17)$  наименьшее общее кратное всех натуральных чисел, меньших 18. Пусть  $n$  такое, что

$$\frac{n}{N} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{17}.$$

Найдите остаток от деления числа  $n$  на 17.

2. Сколькими способами можно разбить натуральные числа  $1, 2, 3, \dots, 14$  на 7 пар  $(a_i, b_i)$ , таких что для каждого  $i = 1, \dots, 7$  выполнено  $b_i \geq 2a_i$  (пары считаются неупорядоченными, те пары  $(5, 10)$  и  $(10, 5)$  это одна пара).

3. Решить дифференциальное уравнение с данным начальным условием

$$y' + xy^2 + xy = 0, \quad y(2) = 1.$$

4. Описать линейную оболочку системы векторов

$$v_1 = (3, 3, -2, 4), v_2 = (3, 4, 0, 3), v_3 = (5, 6, -1, 6), v_4 = (4, 4, -3, 5).$$

5. Является ли следующая квадратичная форма положительно или отрицательно определенной

$$17x_1^2 + 41x_2^2 + 41x_3^2 + 32x_1x_2 - 32x_1x_3 - 64x_2x_3.$$

6. Найти следующий предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan \frac{e^x - e^{-x}}{2} - 2 \sin \frac{x}{2}}{e^{\tan x} - x^2 - \sin x - \cos x}.$$

7. Найти объем области  $\Omega$ , лежащей внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = 4$  в первом октанте  $x, y, z > 0$  и ограниченной сверху плоскостью  $z = 3 - y$

$$\Omega = \{(x, y, z) : x, y, z > 0, x^2 + y^2 \leq 4, z < 3 - y\}.$$

8. Социологическим опросам доверяют 70% жителей. Те, кто доверяют опросам, на все вопросы отвечают искренне. Те же, кто не доверяют, отвечают равновероятно наугад. Социолог Иван в анкету очередного опроса включил вопрос "Доверяете ли Вы социологическим опросам?" с вариантами ответов: "Да", "Нет", "Затрудняюсь ответить".

1. Какова вероятность, что случайно выбранный респондент ответит "Да"?

2. Какова вероятность того, что он действительно доверяет, если известно, что он ответил "Да"?

9. Регрессионная модель представлена в следующем виде:  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \epsilon_i, i = 1, \dots, n$ . Известно, что  $\epsilon$  нормально распределены с  $E\epsilon = 0$  и  $\text{Var}(\epsilon) = \sigma^2 \cdot I$ . Обучающая выборка представ-

лена в виде:  $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Для Вашего удобства при расчетах ниже приведены матрицы:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

- а) Найдите методом МНК оценки  $\hat{\beta}$  и спрогнозируйте  $y$ , если  $x_2 = 1$  и  $x_3 = -2$   
б) Проверьте гипотезу  $H_0 : \beta_2 = 0$  против гипотезы  $H_a : \beta_2 \neq 0$  на уровне значимости 10%.

10. Перед Вами равносторонний треугольник с тремя биссектрисами. В углах треугольника находятся по одному муравью. По сигналу все муравьи одновременно начинают движение с одинаковой скоростью, причем каждый муравей выбирает направление равновероятно случайным образом: либо в один угол, либо в другой, либо по биссектрисе. Муравьи останавливаются, когда пройдут сторону или биссектрису до конца. Найдите вероятность того, что никакие муравьи не столкнутся друг с другом за один такой раунд.

**Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2023 г.**  
**Экзаменационный вариант**  
**по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»**  
**ОП «Финансовые технологии и анализ данных»**

**Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов.**

1. Петя выписал в тетрадке 100 множеств

$$M_k = \{10k + 1, 10k + 2, \dots, 10k + 10\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 99$$

И стал называть множество  $M_k$  счастливым, если оно содержит ровно два числа, делящихся нацело на 7. Сколько всего счастливых множеств получилось у Пети?

2. За время работы с классом, состоящим из 31 школьника, учительница начальных классов поняла, что всех детей в нем можно разделить на три категории: лгунов, которые врут всегда, правдуров, которые всегда говорят правду и конформистов, которые попеременно говорят правду и ложь (т.е. последовательности их ответов либо правда-ложь-правда-ложь..., либо ложь-правда-ложь-правда...). Как-то утром учительница при входе в класс задала всем детям следующие три вопроса (строго в этом порядке)

1. Ты правдуроб?
2. Ты конформитс?
3. Ты лгун?

На первый вопрос утвердительно ответили 22 ребенка, на второй 15, а на третий 9. Сколько правдуров в классе?

3. Решить дифференциальное уравнение с данным начальным условием

$$y' = 2xy(1 + y^2), \quad y(0) = 1.$$

4. Являются ли следующие вектора линейно зависимыми? Если да, то укажите какую-нибудь их нетривиальную линейную комбинацию (выразите один вектор через другие)

$$v_1 = (5, -7, 3, -2), \quad v_2 = (-1, 3, -4, 5), \quad v_3 = (6, -2, 1, 4), \quad v_4 = (1, -3, -7, 7).$$

5. Найдите индексы инерции квадратичной формы

$$3x_1^2 - 12x_2^2 - 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 24x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

6. Найти следующий предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(e^x - 1) - \sin(x) - \sin^2 \frac{x}{\sqrt{2}}}{\ln(1 + \sin x) - \frac{2x}{1 + \sqrt{1 + 2x}}}.$$

7. Найти объем области  $\Omega$ , лежащей внутри цилиндра  $x^2 + y^2 = 4$  и ограниченной плоскостями  $z = 0$  и  $x + z = 3$ .

8. Социологическим опросам не доверяют 70% жителей. Те же, кто не доверяют, отвечают равновероятно наугад. Те, кто доверяют опросам, на все вопросы отвечают искренне. Социолог Иван в анкету очередного опроса включил вопрос "Доверяете ли Вы социологическим опросам?" с вариантами ответов: "Да", "Нет", "Затрудняюсь ответить".

1. Какова вероятность, что случайно выбранный респондент ответит "Да"?

2. Какова вероятность того, что он действительно доверяет, если известно, что он ответил "Да"?

9. Регрессионная модель представлена в следующем виде:  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \epsilon_i, i = 1, \dots, n$ . Известно, что  $\epsilon$  нормально распределены с  $E\epsilon = 0$  и  $Var(\epsilon) = \sigma^2 \cdot I$ . Обучающая выборка представ-

лена в виде:  $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Для Вашего удобства при расчетах ниже приведены матрицы:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

а) Найдите методом МНК оценки  $\hat{\beta}$  и спрогнозируйте  $y$ , если  $x_2 = -2$  и  $x_3 = 1$

б) Проверьте гипотезу  $H_0 : \beta_3 = 0$  против гипотезы  $H_a : \beta_3 \neq 0$  на уровне значимости 5%.

10. Перед Вами равносторонний треугольник. В углах треугольника находятся по одному муравью. Раунд игры начинается по сигналу, и тогда все муравьи одновременно начинают движение с одинаковой скоростью, причем каждый муравей выбирает направление равновероятно случайным образом: либо в один угол, либо в другой. Муравьи останавливаются, когда пройдут сторону до конца. Если хотя бы два муравья столкнутся друг с другом, то игре конец. Если играть в такую игру много раз, то сколько в среднем раундов будет длиться игра?

**Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2023 г.**  
**Экзаменационный вариант**  
**по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»**  
**ОП «Финансовые технологии и анализ данных»**

**Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов.**

1. Найдите все трехзначные числа  $N = \overline{abc} = 100a + b + c$  с ненулевыми цифрами  $a, b, c$  такие, что

$$3 \cdot 0, (a, b, c) = 0, (a) + 0, (b) + 0, (c),$$

где  $0, (a, b, c) = 0, abcabc \dots$  и  $0, (a) = 0, aaa \dots$  -бесконечные периодические десятичные дроби.

2. Студент выписал матрицу  $4 \times 4$ , состоящую исключительно из 0 и 1. После этого он просуммировал элементы в каждой строке и получил четыре числа (в каком-то порядке) 1,2,3,4. После этого он просуммировал элементы в каждом столбце и опять в каком-то порядке получились числа 1,2,3,4. А сколько всего существует таких матриц?

3. Решить дифференциальное уравнение с данным начальным условием

$$y' + 2x(y^2 - 3y + 2) = 0, \quad y(0) = 3.$$

4. Известно, что две системы векторов эквивалентны, если их линейные оболочки совпадают (в некоторых книгах это является определением эквивалентности). Эквивалентны ли системы векторов

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}, \quad W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\},$$

где

$$u_1 = (3, 12, 4, -1), \quad u_2 = (2, 8, 5, 4), \quad u_3 = (5, 20, 17, 19), \quad u_4 = (6, 24, -1, -20), \\ w_1 = (5, 2, 4, -3), \quad w_2 = (2, -1, 7, 3), \quad w_3 = (2, 4, -8, 5), \quad w_4 = (3, 4, -6, 10).$$

5. Найдите матрицу  $A^{-1}$ , обратную к данной

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & -2 \\ 14 & 15 & 0 & -11 \\ -3 & 1 & 2 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

6. Исследовать на сходимость и найти сумму

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} - 1 \right).$$

7. Найти объем фигуру, ограниченной поверхностями

$$z = x^2 + 3y^2, \quad z = 8 - x^2 - y^2.$$

8. Социологическим опросам доверяют 70% жителей. Те, кто доверяют опросам, на все вопросы отвечают искренне. Те же, кто не доверяют, отвечают равновероятно наугад. Социолог Иван в анкету очередного опроса включил вопрос "Доверяете ли Вы социологическим опросам?" с вариантами ответов: "Да", "Нет", "Затрудняюсь ответить".

1. Какова вероятность, что случайно выбранный респондент ответит "Да"?

2. Какова вероятность того, что он действительно доверяет, если известно, что он ответил "Да"?

9. Регрессионная модель представлена в следующем виде:  $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \epsilon_i, i = 1, \dots, n$ . Известно, что  $\epsilon$  нормально распределены с  $E\epsilon = 0$  и  $Var(\epsilon) = \sigma^2 \cdot I$ . Обучающая выборка представ-

лена в виде:  $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Для Вашего удобства при расчетах ниже приведены матрицы:

$$X^T X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ 0 & -0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

а) Найдите методом МНК оценки  $\hat{\beta}$  и спрогнозируйте  $y$ , если  $x_2 = -2$  и  $x_3 = 1$

б) Проверьте гипотезу  $H_0 : \beta_3 = 0$  против гипотезы  $H_a : \beta_3 \neq 0$  на уровне значимости 5%.

10. Допустим, вы летите из Москвы во Владивосток, а затем обратно, при полном безветрии. Затем вы совершаете точно такой же перелёт, но на этот раз на протяжении всего перелёта дует постоянный западный ветер: в одну сторону попутный, в обратную — лобовой. Меняется ли суммарное время перелета туда и обратно?