Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2021 г.
Экзаменационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений.

1. Вычислить индексы инерции квадратичной формы

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4.$$

2. Является ли следующая система векторов линейно зависимой

$$(1, 2, 3, 4),\ (2, 3, 4, 5),\ (3, 4, 5, 6),\ (4, 5, 6, 7).$$

3. Найти объем тела V, ограниченного поверхностями

$$z = 5x^2 + 5y^2, \quad z = 6 - 7x^2 - y^2.$$

4. Найти сумму ряда (или доказать, что ряд расходится)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

5. Исследовать функцию $f(x) = x - y$ на условный экстремум при условии связи $\operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg} y = 0$ в области $|x| < \frac{\pi}{2}, |y| < \frac{\pi}{2}$.

6. Пусть бесконечная последовательность целых чисел a_n задана следующим образом

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-3} \quad \text{для} \quad n \geq 3.$$

Определите четность трех чисел $a_{2021}, a_{2022}, a_{2023}$.

7. Программист написал необычный генератор натуральных чисел. Вероятность p_n того, что генератор выдает натуральное число n равна 2^{-n}. Программист запустил генератор три раза. Какова вероятность того, что полученные программистом три числа образуют арифметическую прогрессию?

8. Известно, что все шесть корней (подсчет ведется с учетом кратности корней, т.е. необязательно, что все корни различны) многочлена

$$p_6(x) = x^6 - 10x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 16$$

с целыми коэффициентами являются натуральными числами. Найти многочлен $p_6(x)$.

9. Дана нестандартная восьмигранная игральная кость. Грани кости пронумерованы числами $1, \dots, 8$ (каждое число встречается ровно один раз). Обозначим через p_i–вероятность выпадения числа i. Известно, что для некоторого числа $\frac{1}{8} < a < \frac{7}{16}$ выполнены соотношения

$$p_1 = a - \frac{1}{8}, \quad p_2 = p_3 = p_4 = \frac{7 - 16a}{24}, \quad p_5 = p_6 = p_7 = \frac{1 + 8a}{24}, \quad p_8 = \frac{1}{8}$$

Проводится серия испытаний, каждое из которых состоит в подбрасывании кости ровно четыре раза. Рассмотрим следующие три события (т.е. какие числа выпали в ходе испытания):

$$A_1 = \{2, 5, 6, 8\}, \quad A_2 = \{3, 5, 7, 8\}, \quad A_3 = \{4, 6, 7, 8\}.$$

Найти все значения параметра a при которых события A_1, A_2, A_3, независимы в совокупности.

10. Найти все действительные значения параметра a, при которых нулевое решение системы

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + (a+1)y(t) \\ y'(t) = (a-1)x(t) + ay(t) \end{cases}$$

является устойчивым по Ляпунову.

11. Вася ведёт блог. Обозначим X_i — количество слов в i-ой записи. После первого года он по 200 своим записям обнаружил, что $\bar{X} = 95$ и выборочное стандартное отклонение равно 300 слов. На уровне значимости $\alpha = 0.15$ проверьте гипотезу о том, что $\mu = 100$ против альтернативной гипотезы $\mu \neq 100$. Постройте 95-ти процентный доверительный интервал для μ.

12. Постройте оценку методом наименьших квадратов для коэффициента θ по набору наблюдений $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ в модели: $Y_i = \theta + 2 \cdot X_i + \epsilon_i$.

13. Оценивание регрессии $Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i$ по 16 наблюдениям дало результаты: $TSS = 63$, $\hat{\sigma_\epsilon^2} = 2.5$. Найдите R^2.

14. Перед Вами три банкомата нового поколения, которые принимают купюры. Первый банкомат, получив купюру номиналом X, начислит Вам доход и вернет обратно $2 \cdot X$, второй — наоборот, удержит с Вас комиссию и вернет $0.5 \cdot X$. Третий автомат действует случайно — с равными вероятностями либо начислит доход, как первый, либо удержит комиссию, как второй. На всех трех банкоматах есть надписи: "Получи доход", "Заплати комиссию", "Случайный". Но надписи перепутаны - все три надписи неправильные. У Вас есть три купюры номиналом 20, 50 и 100 долл соответственно. Предположим, что Вы действуете так, чтобы максимизировать свою прибыль. Вам предлагают повзаимодействовать с банкоматами ровно 2 раза. Воспользуетесь ли этим предложением или обойдете стороной? А если согласитесь, чему равно математическое ожидание Вашей прибыли (убытка)?

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2021 г.
Экзаменационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений.

1. Найти общее решение и фундаментальную систему решений однородной системы

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

2. Для всех натуральных $n > 2$ вычислить определитель

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(все элементы матрицы, за исключением $a_{nn} = 1$ и $a_{i,n-i} = 1$ для $i = 1, \dots, n-1$, равны нулю).

3. Вычислить

$$\int\int_\Omega \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^2 dxdy,$$

где Ω-область, находящаяся в первом квадранте ($x \geq 0, y \geq 0$) и ограниченная кривой

$$\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{5}\right)^4 = \frac{x^2}{9} + y^2$$

и осями координат.

4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} 4^{2k}(3x+2)^{2k-1}.$$

5. Исследовать функцию (найти область определения, особенности, экстремумы, участки монотонности, интервалы выпуклости вверх и вниз, асимптоты) и построить ее график

$$f(x) = x\arctan(x) - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\right)x.$$

6. Пусть

$$S_E(N) = \sum_{\substack{d|N \\ d-\text{четно}}} d, \quad S_O(N) = \sum_{\substack{d|N \\ d-\text{нечетно}}} d$$

-суммы соответственно всех четных (нечетных) положительных ($d > 0$) делителей числа N. Отметим, что 1 и N являются делителями числа N. Для числа $N = 34^2 \cdot 63 \cdot 270$ вычислить

$$\frac{S_E(N)}{S_O(N)}.$$

7. Имеются две нестандартные игральные кости. Первая кость имеет $m \geq 6$ граней, вторая-$n \geq 6$ граней и пусть $m \geq n$. При этом обе кости являются "идеальными"(т.е. вероятность выпадения каждой из

граней соответственно $1/m$ для первой кости и $1/n$ для второй). Все грани костей пронумерованы стандартным образом (т.е грани первой кости пронумерованы числами $1, \ldots, m$, а второй числами $1, \ldots, n$). Пусть p_k-вероятность того, что после однократного подбрасывания каждой кости сумма выпавших на них чисел будет равна k. Найти все возможные значения m и n, при которых будут выполнены следующие соотношения

$$p_7 = \frac{3}{4} p_{10}, \quad p_{12} = \frac{1}{12}.$$

8. Известно, что многочлен

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

обладает тремя действительными корнями x_1, x_2, x_3. Рассмотрим другой многочлен $g(x)$ третьей степени со старшим коэффициентом 1 такой, что $g(1/x_i) = 0$ для $i = 1, 2, 3$. Выразите $g(1)$ через a, b, c.

9. Пусть число $0 \leq p \leq 1$ обозначает вероятность того, что стрелок при выстреле промахнется. Стрелок производит три независимых выстрела. Рассмотрим два события

$$A = \{\text{стрелок попадет в цель не более одного раза}\},$$

$$B = \{\text{все три выстрела завершатся одинаковым образом}\}.$$

Найти все значения параметра p, при которых события A и B будут независимыми.

10. Решите дифференциальное уравнение $y'' = 4(y')^{3/2} y$.

11. Саша и Маша решали одну и ту же задачу. Саша правильно решает задачу с вероятностью 0.8, Маша, независимо от Саши, с вероятностью 0.7. Какова вероятность того, что Маша верно решила задачу, если задачу верно решил только кто-то один из них?

12. Постройте оценку методом наименьших квадратов для коэффициента θ по набору наблюдений $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ в модели: $Y_i = \theta - \theta \cdot X_i + \epsilon_i$.

13. Найдите величины ESS, RSS, TSS и R^2 для регрессии $y_i = \mu + u_i$.

14. Рядом с бассейном отдыхает пять банковских работников. Бассейн до краев заполнен водой и достаточно большой, чтобы в нём поместились все банковские работники разом. Банковские работники могут полностью погружаться под воду. У Вас нет никаких измерительных инструментов. Вы — главный начальник банковских работников и можете решать, кому из них, что нужно сделать. Опишите последовательность действий, для того чтобы найти самого объемного банковского работника.

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2021 г.
Экзаменационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений.

1. Найти ранг матрицы для всех действительных значений параметра a

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ a & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Найти матрицу, обратную к данной

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Вычислить

$$\lim_{x\to\pi/2}\left(\frac{1}{1+\cos(2x)}\left(\frac{ex^2}{\pi}-\frac{e\pi}{4}+\int_x^{\pi/2} e^{\sin t}dt\right)\right).$$

4. Найти сумму ряда (или доказать, что ряд расходится)

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

где

$$a_{3k-2}=\frac{1}{4k-3},\quad a_{3k-1}=\frac{1}{4k-1},\quad a_{3k}=\frac{-1}{2k}.$$

5. Вычислить

$$\int\int\int_{\Omega}\frac{xyz}{x^2+y^2}dxdydz,$$

где Ω-область, ограниченная верхней частью конуса $\frac{x^2+y^2}{R^2}=\frac{z^2}{h^2}$ и плоскостью $z=h$ $(h>0)$.

6. Из набора чисел $\{1,2,3,\ldots,36,37\}$ выбраны два числа так, что сумма оставшихся 35 чисел равна произведению выбранных чисел. Найдите выбранные числа.

7. Имеются две нестандартные игральные кости. Первая кость имеет $m\geq 6$ граней, вторая-$n\geq 6$ граней и пусть $m\geq n$. При этом обе кости являются "идеальными"(т.е. вероятность выпадения каждой из граней соответственно $1/m$ для первой кости и $1/n$ для второй). Все грани костей пронумерованы стандартным образом (т.е грани первой кости пронумерованы числами $1,\ldots,m$, а второй числами $1,\ldots,n$). Пусть p_k-вероятность того, что после однократного подбрасывания каждой кости сумма выпавших на них чисел будет равна k. Найти все возможные значения m и n, при которых будут выполнены следующие соотношения

$$p_7=\frac{3}{4}p_{10},\quad p_{12}=\frac{1}{12}.$$

8. Известно, что все шесть корней (подсчет ведется с учетом кратностей корней, т.е. необязательно, что все корни различны) многочлена

$$p_6(x)=x^6-10x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+16$$

с целыми коэффициентами являются натуральными числами. Найти многочлен $p_6(x)$.

9. Пусть число $0 \leq p \leq 1$ обозначает вероятность того, что стрелок при выстреле промахнется. Стрелок производит три независимых выстрела. Рассмотрим два события

$$A = \{\text{стрелок попадет в цель не более одного раза}\},$$

$$B = \{\text{все три выстрела завершатся одинаковым образом}\}.$$

Найти все значения параметра p, при которых события A и B будут независимыми.

10. Найти все действительные значения параметра a, при которых нулевое решение системы

$$\begin{cases} x'(t) = a(x^2 + y^2)x - xy^3 \\ y'(t) = a(x^2 + y^2)y + x^2y^2 \end{cases}$$

является устойчивым по Ляпунову.

11. По 25 наблюдениям из нормальной генеральной совокупности с неизвестной дисперсией был оценен 95% доверительный интервал для математического ожидания: [37.3; 40.7]. Найдите выборочное среднее и оценку дисперсии σ^2 .

12. Найдите МНК-оценку β в регрессии $Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i$, если $\bar{X} = 10$, $\bar{Y} = 10$, $\hat{\alpha} = 2$

13. По n наблюдениям оценивается модель $Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i$. Известно, что $E(\epsilon_i) = 2$, остальные же предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены. Покажите, что оценка метода наименьших квадратов для для параметра α является смещённой. Предложите несмещённую оценку для α.

14. В доме трое часов. 1 января все они показывали верное время. Но верно идут только первые часы. Вторые отстают на 1 минуту в сутки. Третьи спешат на 1 минуту в сутки. Если часы будут продолжать так идти, через какое время все вместе будут снова показывать верное время?