Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2020 г.
Экзаменационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений.

1. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}.$$

2. Найти матрицу, обратную к данной

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

3. Найти все значения параметра a, при которых квадратичная форма

$$x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2ax_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$$

является положительно определенной.

4. Решите дифференциальное уравнение $y^{(4)}-5y''+4y=e^{2t}$.

5. Найти все натуральные n при которых многочлен $P_n(x)=x^{2n+1}-(2n+1)x^{n+1}+(2n+1)x^n-1$ делится на $(x-1)^3$.

6. Про функцию $f:R_+\to R_+$ (здесь R_+-множество положительных действительных чисел) известно, что $f(1)+f(2)=5\sqrt{2}$ и что для любых положительных x и y выполнено

$$f(x+y)=f(x)+f(y)+2\sqrt{f(x)f(y)}.$$

Найти $f(2^{2020})$.

7. Найти все натуральные числа меньшие 100 и имеющие нечетное число делителей (натуральное число d является делителем натурального числа n, если существует натуральное число k, такое что $n=dk$).

8. Построить неориентированный граф с данной матрицей смежности

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. На торжественный ужин пригласили 13 студентов и 13 преподавателей. Все они в случайном порядке рассаживаются вокруг круглого стола. Назовем студента удачливым, если рядом с ним сидит преподаватель. Найти

1. вероятность того, что конкретный студент удачлив.
2. математическое ожидание числа удачливых студентов.

10. Профессор никак не может решить ставить ли студенту удовлетворительную или неудовлетворительную оценку за курс по теории вероятности. Поэтому он предлагает сыграть студенту в игру: бросается стандартная игральная кость, если выпадает нечетное число, то оно прибавляется к оценке студента, если четное - то отнимается. В начале игры оценка студента 0. Если после 60 бросков игральной кости

у студента положительная оценка, то он получает удов. оценку, если отрицательная - то неуд. Есть ли смысл студенту соглашаться играть в такую игру (найдите математическое ожидание оценки студента после 60 бросков кости)?

11. Менеджер поручил аналитику оценить математическое ожидание μ генеральной совокупности с помощью выборочного среднего так, чтобы с надежностью $\gamma = 0.99$ абсолютная погрешность такой оценки не превысила 0.2. При этом другая команда точно выяснила, что генеральная совокупность распределена нормально и ее стандартное отклонение составляет $\sigma = 1.5$. Аналитик же не выполнил задачу в срок и объясняет это тем, что третья команда не прислала ему достаточное количество данных для получения достоверной оценки: он получил всего 400 наблюдений. Достаточно ли было данных на самом деле, чтобы оценить μ? Докажите.

12. Регрессионная модель построена на 12 наблюдениях и имеет вид:

$$\hat{Y} = -42.23 + 20.27X_1 + 1.04X_2$$

Стандартные ошибки оценки свободного члена и коэффициентов при регрессорах составляют 13.05, 7.89, 0.46 соответственно. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверьте насколько значимо фактор X_1 влияет на прогноз Y.

13. На примере парной линейной регрессии $Y = a + bX + \epsilon$ покажите, в чем состоит проблема эндогенности, из-за каких причин она может возникнуть, ее последствия и какие существуют инструменты ее решения.

14. У вас есть куб со стороной 4 см, покрашенный снаружи зеленой краской со всех сторон. Внутри куб сам по себе белый. Вы разрезаете этот куб на маленькие кубики со стороной 1 см. У этих новых кубиков будет либо 3 зеленые стороны, либо 2 зеленые стороны, либо 1, либо вообще ни одной. Все кубики помещаются в урну и тщательно перемешиваются, затем случайным образом выбирается один. Он подбрасывается как игральная кость. Какова вероятность, что он приземлится зеленой стороной вверх?

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2020 г.
Экзаменационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений.

1. Исследуйте функцию $y = (x-5)x^{2/3}$ (найдите участки возрастания и убывания, участки где функция выпукла вверх или вниз, точки перегиба, точки локальных экстремумов) и постройте ее график

2. Найдите экстремумы (и укажите является ли найденные экстремумы локальными максимумами или минимумами) следующей функции
$$z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$$
в области $x, y > 0$.

3. Найдите производную функции
$$f(x,y,z) = \arctan\frac{xz}{y} + \ln(x^2z^2 + y^2)$$
в точке $M = (1,1,-1)$ по направлению градиента функции
$$g(x,y,z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2$$

4. Найдите все матрицы X с действительными коэффициентами, удовлетворяющие следующему матричному уравнению
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Найдите решение дифференциального уравнения
$$y' = \frac{y(x+2) - x - 2}{y(x-3) + x - 3},$$
удовлетворяющее начальному условию $y(4) = 2$

6. Найдите все натуральные $a, b, c > 1$ при которых для любого натурального $n > 1$ справедливо равенство
$$\sqrt[a]{n\sqrt[b]{n\sqrt[c]{n}}} = \sqrt[36]{n^{25}}.$$

7. На балу каждый кавалер станцевал с пятью дамами, а каждая дама станцевала с тремя кавалерами. Известно, что на балу было более 65, но менее 75 человек. Сколько на балу было кавалеров и сколько было дам?

8. На клетчатой бумаге (сторона клетки равна 1 см.) рассмотрим квадрат $ABCD$ с вершинами в точках $A(0,0), B(0,4), C(4,4), D(4,0)$. В точке $L(1,2)$ сидит кузнечик, который может прыгать вправо, влево, вверх или вниз на расстояние 1 см. (т.е. кузнечик может прыгнуть из точки L только в точки $(2,2), (0,2), (1,3), (1,1)$). Кузнечик прыгает до тех пор, пока не окажется на одной из сторон квадрата $ABCD$. Каждый раз кузнечик прыгает в любую из четырех сторон с одинаковой вероятностью 1/4. С какой вероятность кузнечик окажется на вертикальных сторонах AB, CD квадрата $ABCD$?

9. Решите в целых числах уравнение $x^{2020} + y^2 = 2y$.

10. Стандартная игральная кость (кубик на гранях которого нарисованы числа от 1 до 6) независимо

бросается два раза. Каково математическое ожидание и дисперсия произведения двух чисел, выпавших на игральной кости?

11. Предполагается, что месячный доход граждан страны имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $m = 100$ рублей и дисперсией $\sigma^2 = 400$. По выборке из 500 человек определили выборочный средний доход $x_{avg} = 90$ рублей. Следует ли на основании 95% доверительного интервала отклонить предложение о ежемесячном доходе в стране в 100 рублей?

12. Регрессионная модель построена на 12 наблюдениях и имеет вид:

$$\hat{Y} = -42.23 + 20.27X_1 + 1.04X_2$$

Стандартные ошибки оценки свободного члена и коэффициентов при регрессорах составляют 13.05, 7.89, 0.46 соответственно. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверьте, насколько значим свободный член для прогноза Y.

13. На примере парной линейной регрессии $Y = a + bX + \epsilon$ покажите, в чем состоит проблема гетероскедастичности, из-за каких причин она может возникнуть, ее последствия и какие существуют инструменты ее решения.

14. Сколько квадратов на шахматной доске? Если вы думаете, что 64, пожалуйста подумайте еще раз! Учли ли вы квадраты, которые образованы комбинацией клеток (2 на 2, 3 на 3, и т.д.)? Итак, сколько всего различных квадратов на шахматной доске?

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2020 г.
Экзаменационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений.

1. Вычислить

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x.$$

2. Найти базисы ядра и образа линейного оператора $\varphi : R^4 \to R^4$, заданного (относительно стандартных базисов) матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -6 \\ 1 & 4 & 10 & -13 \end{pmatrix}$$

3. Вычислить A^{100} для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Решите дифференциальное уравнение $y'' + 3y' + 2y = \sin(e^x)$.

5. На множестве действительных чисел определим бинарную операцию $\star$ (т.е. каждой паре действительных чисел x y поставим в соответствие некоторое действительное число $x\star y$). Известно, что для любых x, y, z имеют место следующие тождества

$$x \star x = 0, \quad x \star (y \star z) = (x \star y) + z.$$

Найти $2020 \star 1945$.

6. Найти все непрерывные функции $f : R \to R$, такие что для всех x справедливо $2f(x) + f(1-x) = x^2$.

7. Найти все натуральные числа, делящиеся нацело на 15 и имеющие ровно 15 различных делителей.

8. Дан граф с n вершинами, степень каждой из которых не меньше $(n-1)/2$. Докажите, что данный граф связен.

9. Матч за шахматную корону между действующим чемпионом и претендентом решили проводить по новым правилам. Теперь победителем становится тот, кто первым опередит соперника на две победы (в шахматах очень часто бывают ничьи и теперь они в счет не идут). Пусть вероятности выигрыша у соперников одинаковы (но сильно меньше 1/2, ведь ничьи случаются очень часто). Найдите математическое ожидание числа шахматных партий, закончившихся победой одного из шахматистов, в таком матче.

10. При подготовке к международной олимпиаде по математике тренеры российской команды решили сыграть с командой школьников, которая поедет на данную олимпиаду, в аналог игры "Что?Где?Когда?". Команда тренеров придумывает 7 задач и раскладывает их по конвертам. Конверты вскрываются по очереди в случайном порядке. Если команда школьников правильно решает задачу за 15 минут, то она зарабатывает очко, если нет, то очко достается команде тренеров. Игра заканчивается, как только одна из команд наберет 3 очка. Предположим что силы команд равны (т.е команда школьников успевает правильно решить задачу с вероятностью 1/2). Найти математическое ожидание числа очков набранных командой школьников после 16 игр.

11. При изучении объема товарооборота X (млн.руб.) 10 магазинов города, торгующих одинаковым ассортиментом товаров, найдено среднее арифметическое $x_{avg} = 30.1$ и несмещенное среднее квадра-

тическое отклонение $s = 6$ статистических данных. Оценить истинное значение изучаемой величины с помощью доверительного интервала с надежностью $\gamma = 0.99$

12. Регрессионная модель построена на 12 наблюдениях и имеет вид: $\hat{Y} = -42.23 + 20.27X_1 + 1.04X2$. Стандартные ошибки оценки свободного члена и коэффициентов при регрессорах составляют $13.05, 7.89, 0.46$ соответственно. На уровне значимости $\alpha = 0.05$ проверьте насколько значимо фактор X_2 влияет на прогноз Y.

13. На примере линейной регрессии $Y = a + bX + cZ + \epsilon$ покажите, в чем состоит проблема мультиколлинеарности, из-за каких причин она может возникнуть, ее последствия и какие существуют инструменты ее решения.

14. Имеется сотня следующих утверждений:

1-е гласит: по меньшей мере, одно утверждение ложно.
2-е гласит: по меньшей мере, два утверждения ложны.
3-е гласит: по меньшей мере, три утверждения ложны.
4-е гласит: по меньшей мере, четыре утверждения ложны.
...
100-е гласит: по меньшей мере, сто утверждений ложны.
Сколько утверждений на самом деле ложны и сколько истинны?