

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2022 г.  
Экзаменационный вариант  
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»  
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений.

1. Вычислите интеграл

$$\int \frac{x dx}{(x+1)(x-2)^2}.$$

2. Найдите все  $x$ , для которых следующий ряд сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4 + (-1)^n)^n}{n} x^n.$$

3. Найдите характеристический многочлен и все собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} -13 & -3 & 18 & 7 & 9 & -12 \\ -20 & -4 & 26 & 10 & 16 & -22 \\ -14 & -3 & 19 & 8 & 12 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Найдите все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 - x_4 + 6x_5 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 2x_5 = 8 \end{cases}$$

5. Пусть число  $N$  имеет следующий вид в девятеричной системе счисления

$$N = 27006000052_9.$$

Найдите остаток от деления числа  $N$  на 5.

6. Найдите число решений уравнения

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \cos x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin x\right),$$

принадлежащих отрезку  $[0; \pi]$ .

7. Найдите все значения параметра  $k$  такие, что количество точек с целочисленными координатами, лежащие в первой четверти под или на прямой  $y = kx$  и с абсциссой не превосходящей 30, равно 300, то есть

$$\#\{(x, y) \mid 1 \leq y \leq kx, 1 \leq x \leq 30, x, y - \text{целые}\} = 300.$$

8. Решите дифференциальное уравнение ( $\log y$  — обозначает натуральный логарифм по основанию  $e$ )

$$x \frac{y'}{y} + 2 \log y = 4x^2.$$

9. В городе работают продуктовые магазины трех торговых сетей- А, В и С. У 60% домохозяйств есть карточка магазина А, у 40% есть карточка магазина В, у 30% есть карточка магазина С. У 20% есть

карточки и магазина А, и магазина В. У 10% есть карточки и магазина А, и магазина С. У 20% есть карточки и магазина В, и магазина С. У 5% есть карточки всех трех магазинов. Найдите процент домохозяйств, у которых есть карточка хотя бы одного магазина.

10. Алена и Сергей играют в стандартные крестики-нолики 3 на 3 (напомним, что это за игра: на клетчатой бумаге выбирает квадрат 3 на 3 клетки, игроки по очереди заполняют пустые клетки этого квадрата крестиками и ноликами, причем один игрок использует только крестики, а второй только нолики. Выигрывает тот, кто первым выставит три своих символа либо по вертикали, либо по горизонтали, либо по диагонали). Алена играет крестиками и начинает первой. Предположим, что игроки ставят крестики и нолики случайным образом, и что выиграл Сергей, нарисовав при этом всего лишь три нолика. А сколько существует вариантов того, как может выглядеть в таком случае итоговый вид квадрата?

11. Три экзаменатора принимают экзамен у группы в 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй — 3 студентов, а третий — 21 студента (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго — только 10%, у третьего — 70%. Один слабо подготовленный студент действительно не смог сдать экзамен. Он был так расстроен, что забыл, какому экзаменатору сдавал экзамен. Отец студента решил найти экзаменатора, который принимал экзамен у его сына, и попытаться переубедить экзаменатора в его решении. Но у отца хватит времени всего лишь на одну встречу. Отец решает пойти наугад к одному из трех экзаменаторов. Определите, с какой вероятностью отец студента обратится по адресу? А какова была бы вероятность, если бы он решил выбирать не наугад, а пойти сразу к третьему экзаменатору?

12. По ежегодным данным за 14 лет оценивалась зависимость цены на бензин (*Petrol*, центы за галлон) от цены на сырую нефть (*Oil*, доллары за баррель). Результаты приведены ниже:

$$\hat{Petrol}_i = 41.9 + 3.0 \cdot Oil_i$$

Стандартная ошибка свободного члена регрессии составила 4.6, а коэффициента при переменной *Oil* составила 0.2. Также известно, что  $RSS = 631.1$ , а  $TSS = 12622$ . Предполагается, что все предпосылки классической линейной нормальной регрессионной модели выполнены. Рассчитайте коэффициент детерминации  $R^2$ . Проверьте гипотезу о том, что рост цены на нефть на 1 долл. за баррель приводит к росту цены на бензин на 2 цента за галлон, используя уровень значимости 10%.

13. Пусть  $X$  и  $Y$  дискретные случайные величины с двумя возможными значениями 0 и 1. Распределения  $X$  и  $Y$  имеют следующий вид:  $Pr(X = 1) = \gamma$ ,  $Pr(Y = 1|X = x) = \frac{\exp^{\theta x}}{1 + \exp^{\theta x}}$ , при этом  $\gamma$  и  $\theta$  - скалярные параметры. Методом максимального правдоподобия найдите оценки  $\hat{\gamma}$  и  $\hat{\theta}$  по данным о случайной выборке  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$ .

14. В сборнике трудов конференции всего  $N$  страниц, пронумерованных как обычно от 1 до  $N$ . Если сложить количество цифр, содержащихся в каждом номере страницы, будет 1095. Сколько страниц в сборнике?

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2022 г.  
Экзаменационный вариант  
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»  
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений.

1. Вычислите интеграл

$$\int \frac{2x + 12}{(x^2 + 4x + 8)^2} dx.$$

2. Найдите все  $x$ , для которых следующий ряд сходится

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n.$$

Напомним, что  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)$  и  $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n)$ .

3. Найдите минимальный аннулирующий многочлен  $\mu_A(x)$  (т.е. многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом, равным единице, и такой, что  $\mu_A(A) = O$ ) матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Найдите все решения следующей системы линейных уравнений и выпишите ее фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 - 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 - 13x_3 + 4x_4 - 16x_5 = 0 \end{cases}$$

5. Пусть  $a$  и  $b$  какие-то натуральные числа. Сколько слагаемых в разложении числа

$$(a\sqrt[3]{2} + b\sqrt{3})^{2022}$$

по биному Ньютона являются целыми числами.

6. Найдите натуральное  $k > 0$  такое, что решение уравнения

$$x^{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2^x}$$

принадлежит отрезку  $[2k, 2k + 2]$ .

7. Обозначим через  $d(n)$ –функцию количества делителей натурального числа  $n$ , то есть  $d(n) = \sum_{d|n} 1$ . Отметим, что учитываются все делители числа  $n$ , так у числа 6 есть четыре делителя: 1,2,3,6. Для каждого натурального числа определим функцию  $f(n)$

$$f(n) = \frac{d(n)}{n^{1/3}}.$$

Найдите натуральное число  $N$  на котором достигается максимум функции  $f(n)$ .

8. Решите дифференциальное уравнение

$$\frac{y'}{\cos^2 y} - 3 \tan y = -1.$$

9. В городе работают продуктовые магазины трех торговых сетей- А, В и С. У 60% домохозяйств есть карточка магазина А, у 40% есть карточка магазина В, у 30% есть карточка магазина С. У 20% есть карточки и магазина А, и магазина В. У 10% есть карточки и магазина А, и магазина С. У 20% есть карточки и магазина В, и магазина С. У 5% есть карточки всех трех магазинов. Найдите процент домохозяйств, у которых есть карточка ровно одного магазина.

10. Рассмотрим множество, состоящее из 30 натуральных чисел  $T = \{1, 2, 3 \dots, 30\}$ . Случайным образом выберем 5 различных чисел из  $T$  и составим его подмножество  $A = \{a_1, \dots, a_5\}$  ( $a_1 < a_2 < \dots < a_5$ ). Назовем два элемента из  $A$  последовательной парой, если они отличаются на 1. Найдите математическое ожидание количества последовательных пар (например, в  $\{1, 17, 18, 19, 30\}$  две последовательные пары).

11. Три экзаменатора принимают экзамен у группы в 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй — 3 студентов, а третий — 21 студента (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго — только 10%, у третьего — 70%. Один слабо подготовленный студент действительно не смог сдать экзамен. Он был так расстроен, что забыл, какому экзаменатору сдавал экзамен. Отец студента решил пойти по порядку общаться с экзаменаторами (сначала к первому, потом ко второму и наконец к третьему), чтобы найти того, кто принимал экзамен, и попытаться переубедить экзаменатора в его оценке. Определите, с какой вероятностью отец найдет нужного экзаменатора за 1 попытку, а за 2 попытки?

12. По ежегодным данным за 14 лет оценивалась зависимость цены на бензин (*Petrol*, центы за галлон) от цены на сырую нефть (*Oil*, доллары за баррель). Результаты приведены ниже:

$$\hat{Petrol}_i = 41.9 + 3.0 \cdot Oil_i$$

Стандартная ошибка свободного члена регрессии составила 4.6, а коэффициента при переменной *Oil* составила 0.2. Также известно, что  $RSS = 631.1$ , а  $TSS = 12622$ . Предполагается, что все предпосылки классической линейной нормальной регрессионной модели выполнены. Рассчитайте коэффициент детерминации  $R^2$ . Проверьте гипотезу о том, что рост цены на нефть на 1 долл. за баррель приводит к росту цены на бензин на 4 цента за галлон, используя уровень значимости 10%.

13. Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_n$  - выборка значений случайной величины  $Z$ , распределенной равномерно на отрезке  $[0; \gamma]$ . Найдите методом максимального правдоподобия оценку параметра  $\hat{\gamma}$ . К какому распределению асимптотически стремится данная оценка?

14. Вам завязывают глаза и дают в руки колоду игральных карт, в которой всего  $M$  карт, и ровно  $N$  карт из них лежат рубашкой вверх, а остальные — вниз. Вы не можете видеть карты, но можете как угодно их переворачивать и отсчитывать любое число карт. Можно ли разделить колоду на две стопки, чтобы в каждой из них было одинаковое число карт, лежащих рубашкой вверх?

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2022 г.  
Экзаменационный вариант  
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»  
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений.

1. Вычислите интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2 + x + 2)^{5/2}}.$$

2. Найдите все  $x$  для которых данная функция  $f(x)$  определена и исследуйте ее на непрерывность

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^2 e^{-n^2 x^2}.$$

3. Найдите минимальный аннулирующий многочлен  $\mu_A(x)$  (т.е. многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом, равным единице, и такой, что  $\mu_A(A) = O$ ) матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4. Найти матрицу, обратную к данной

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. Определим для натурального  $n$  следующую функцию

$$F(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} d,$$

где сумма берется по всем делителям числа  $n$  (например, делителями числа 6 являются числа 1, 2, 3 и 6). Найдите  $F(768) - F(384)$ .

6. Последовательность  $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  определена следующим рекуррентным соотношением

$$a_{k+1} = 2a_k - 2a_k^2, \quad a_0 = \frac{1}{4}.$$

Найдите  $A$ -предел последовательности

$$A = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k$$

и наименьшее число  $k_0$  такое, что

$$|a_k - A| \leq \frac{1}{2^{1000}}.$$

7. Найдите все значения параметра  $k$  такие, что количество точек с целочисленными координатами, лежащие в первой четверти под или на прямой  $y = kx$  и с абсциссой не превосходящей 30, равно 300, то есть

$$\#\{(x, y) \mid 1 \leq y \leq kx, 1 \leq x \leq 30, x, y - \text{целые}\} = 300.$$

8. Решите дифференциальное уравнение

$$\left(2yy' + \frac{2}{x}\right) \cdot e^{y^2} = \frac{1}{x^2}.$$

9. В мешке лежат 30 красных, 30 белых и 30 синих мячей. Из мешка без возвращения вытаскивают 5 мячей. Найдите вероятность того, что среди вытащенных мячей не будет мячей какого-нибудь цвета.

10. Рассмотрим множество, состоящее из 30 натуральных чисел  $T = \{1, 2, 3, \dots, 30\}$ . Случайным образом выберем 5 различных чисел из  $T$  и составим его подмножество  $A = \{a_1, \dots, a_5\}$  ( $a_1 < a_2 < \dots < a_5$ ). Назовем два элемента из  $A$  последовательной парой, если они отличаются на 1. Найдите математическое ожидание количества последовательных пар (например, в  $\{1, 17, 18, 19, 30\}$  две последовательные пары).

11. Три экзаменатора принимают экзамен у группы в 30 человек, причем первый опрашивает 6 студентов, второй — 3 студентов, а третий — 21 студента (выбор студентов производится случайным образом из списка). Отношение трех экзаменаторов к слабо подготовившимся различное: шансы таких студентов сдать экзамен у первого преподавателя равны 40%, у второго — только 10%, у третьего — 70%. Один слабо подготовленный студент действительно не смог сдать экзамен. Он был так расстроен, что забыл, какому экзаменатору сдавал экзамен. Отец студента решил найти экзаменатора, который принимал экзамен у его сына, и попытаться переубедить экзаменатора в его решении. Но у отца хватит времени всего лишь на одну встречу. Отец решает пойти наугад к одному из трех экзаменаторов. Определите, с какой вероятностью отец студента обратится по адресу? А какова была бы вероятность, если бы он решил выбирать не наугад, а пойти сразу к третьему экзаменатору?

12. По ежегодным данным за 14 лет оценивалась зависимость цены на бензин (*Petrol*, центы за галлон) от цены на сырую нефть (*Oil*, доллары за баррель). Результаты приведены ниже:

$$\hat{Petrol}_i = 41.9 + 3.0 \cdot Oil_i$$

Стандартная ошибка свободного члена регрессии составила 4.6, а коэффициента при переменной *Oil* составила 0.2. Также известно, что  $RSS = 631.1$ , а  $TSS = 12622$ . Предполагается, что все предпосылки классической линейной нормальной регрессионной модели выполнены. Рассчитайте коэффициент детерминации  $R^2$ . Проверьте гипотезу о том, что рост цены на нефть на 1 долл. за баррель приводит к росту цены на бензин на 4 цента за галлон, используя уровень значимости 10%.

13. Пусть  $X$  и  $Y$  дискретные случайные величины с двумя возможными значениями 0 и 1. Распределения  $X$  и  $Y$  имеют следующий вид:  $Pr(X = 1) = \gamma$ ,  $Pr(Y = 1|X = x) = \frac{\exp^{\theta x}}{1 + \exp^{\theta x}}$ , при этом  $\gamma$  и  $\theta$  - скалярные параметры. Методом максимального правдоподобия найдите оценки  $\hat{\gamma}$  и  $\hat{\theta}$  по данным о случайной выборке  $(x_i, y_i), i = 1, \dots, N$ .

14. Вам завязывают глаза и дают в руки колоду игральных карт, в которой всего  $M$  карт, и ровно  $N$  карт из них лежат рубашкой вверх, а остальные — вниз. Вы не можете видеть карты, но можете как угодно их переворачивать и отсчитывать любое число карт. Можно ли разделить колоду на две стопки, чтобы в каждой из них было одинаковое число карт, лежащих рубашкой вверх?