Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2018 г.
Экзаменационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений

1. Найти все простые числа p и q такие что $p^2 - 2q^2 = 1$.

2. Вычислить

$$\int \cos^2(\ln x) dx.$$

3. Исследовать функцию (найти область определения, особенности, экстремумы, участки монотонности, интервалы выпуклости вверх и вниз, асимптоты.)и построить ее график

$$f(x) = \arctan \frac{1}{x} - \frac{x}{2}.$$

4. Решите дифференциальное уравнение $y/x^2 + 1 + y'/x = 0$.

5. Найти $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{D_n}$, где

$$\begin{pmatrix} 12 & -51 \\ 2 & -11 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

6. Найти A^{-1}, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Найдите по крайней мере два многочлена степени 99, удовлетворяющих соотношению

$$P(x) + P(2014 - x) = 1914.$$

8. Данная функция $f : R \to R$ такая что для любого $x \in R$

$$f(x+2) + af(x) = f(x+1), \quad f(3) = 2013, \quad a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

Найти $f(2013)$.

9. Можно ли отлить две монеты так, чтобы вероятности выпадения "орла"и "решки"были разные, а вероятности выпадения любой из комбинаций "решка, решка "орел, решка "орел, орел"были бы одинаковы?

10. Упорядочить по неубыванию пять чисел за не более чем семь операций сравнения.

11. Имеются n наблюдений ($n > 1$), представляемых независимыми одинаково распределёнными случайными величинами с математическим ожиданием μ и дисперсией σ^2. Докажите, что приведённая в пункте (а) оценка является состоятельной, а приведённая в пункте (б) оценка состоятельной не является.
а) $\hat{\mu} = \frac{2X_1 + \sum_{i=2}^{n} X_i}{n+1}$
б) $\hat{\mu} = X_1$

12. Андрей оценивает простую модель парной регрессии $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + u_i$ по выборке А с помощью МНК. Боря оценивает ту же модель по выборке Б. А хитрая Максимилиана оценивает с помощью МНК ту же модель, объединив данные Андрея и Бори в общую выборку.

Все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены, модель для выборок А и Б одинаковая, выборки независимы.

Каким тождеством связаны между собой ковариационные матрицы оценок коэффициентов, $V(\hat{\beta}_{\text{А}})$, $V(\hat{\beta}_{\text{Б}})$ и $V(\hat{\beta}_{\text{М}})$?

13. Максимилиана оценивает модель парной регрессии с помощью МНК, $y_t = \beta_1 + \beta_2 t + u_t$. Все предпосылки теоремы Гаусса-Маркова выполнены. Максимилиана поделила выборку из 100 наблюдений на обучающую и тестовую части. В обучающую вошли первые 80 наблюдений, а остальные попали в тестовую.

Найдите математическое ожидание суммы квадратов ошибок прогнозов на тестовой выборке.

14. Даны две переменные x и y, которые хранят некоторое числовое значение. Напишите псевдокод, чтобы поменять значения переменных, не создавая третью переменную, так чтобы x содержало значение переменной y, а y - значение x.

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2018 г.
Экзаменационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений

1. Решить в целых числах уравнение $2xy + 3y^2 = 24$.

2. Вычислить
$$\int \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

3. Выписать многочлен Тейлора третьего порядка в точке x=0 для функции $y = (1+x)^{1/x}$

4. Решите дифференциальное уравнение $(3x^2y^2 + x^2)dx + (2x^3y + y^2)dy = 0$.

5. Найти $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n}{D_n}$, где
$$\begin{pmatrix} 19 & -48 \\ 8 & -21 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix}$$

6. Найти $\det A$, где
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & -7 & 1 \\ -3 & 2 & -12 & -2 \\ 2 & -1 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Сколько действительных корней имеет уравнение $2x^{2011} = x^{20} + x^{11}$.

8. Даны функции $f, g : R \to R$ такие что для любого $x \in R$
$$f(x) = g(x+1)g(x-1), \quad g(x) = f(x+1)f(x-1).$$
Найти $f(2013) + g(2013)$, если $f(3) + g(9) = 2013$.

9. Можно ли отлить две кости так, чтобы вероятность выпадения любой суммы от 2 до 12 была одинаковой?

10. Дан массив X[1..N]. Необходимо циклически сдвинуть его на k элементов влево с использованием константного (относительно k и N) числа дополнительных ячеек памяти.

11. В Городе Всепобеждающего Оптимизма доля людей, ожидающих наступления полного счастья в ближайшие сроки, с каждым годом растёт. Эконометрист Надежда пытается построить модель динамики этой доли (обозначим её за Y) и сталкивается с проблемой: доля не может выходить за пределы от 0 до 1, так что линейная модель тренда не годится. Поэтому Тамара решает оценить зависимость вида
$$Y_t = \frac{\exp(\alpha + \beta t + \epsilon_t)}{1 + \exp(\alpha + \beta t + \epsilon_t)}$$
где t - время (число лет, прошедших с начала наблюдения), а величина ϵ отражает отклонение моделируемой доли от тренда. Помогите Тамаре свести эту зависимость к линейной (по коэффициентам α и β), чтобы её можно было оценить с помощью обычного МНК.

12. Прекрасная Максимилиана по случайной выборке $X_1, \ldots, X_{100}$ оценивает параметр a методом максимального правдподобия. Каждая величина X_i имеет функцию плотности
$$f(x_i) = \frac{a}{2}\exp(-a|x_i|).$$
По выборочным данным оказалось, что $\sum X_i = 20$, $\sum |X_i| = 400$.

1. Какую оценку параметра a получит Максимилиана?
2. Постройте 95%-ый доверительный интервал для параметра a.

13. Красавица Максимилиана по случайной выборке X_1, X_2, ..., X_n из равномерного распределения на отрезке $[a; b]$ оценивает параметры a и b методом максимального правдоподобия.

1. Какие оценки параметров a и b получит Максимилиана?
2. Является ли оценка параметра a несмещённой?
3. Найдите предел по вероятности оценки параметра a.

14. Оцените 2 в 64 степени, не пользуясь калькулятором. Нужно дать оценку наиболее близкую к точному ответу.

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2018 г.
Экзаменационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений

1. Найти все натуральные m и n такие, что

$$1! + 2! + \ldots + n! = m^2.$$

2. Вычислить

$$\int \frac{\ln(\cos x)}{\cos^2 x} dx.$$

3.
Найти следующий предел

$$\lim_{x \to 0+} (\ln \cot x)^{\tan x}$$

4. Решите дифференциальное уравнение $(x^2y^2 + y)dx + (2x^3y - x)dy = 0$.

5. Найти A^{10}, где

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 8 & -12 \\ 6 & -6 & 12 \\ 6 & -8 & 14 \end{pmatrix}$$

6. Найти $\det A$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -8 & 4 \\ 15/2 & 1/2 & -1 & -7 \\ -5/2 & 3/2 & -4 & 1 \\ 10 & -3 & 8 & -8 \end{pmatrix}$$

7. При каком действительном a существует многочлен 100 степени, удовлетворяющий соотношению

$$P(x) - P(2014 - x) = 1914x + a.$$

8. Данная функция $f : R \to R$ такая что для любого $x \in R$

$$3f(x+2) + f(x) = 3f(x+1), \quad f(3) = 3^{1000}.$$

Найти $f(2013)$.

9. На рулетке может выпасть любое число от 0 до 2018 с одинаковой вероятностью. Рулетку крутят раз за разом. Обозначим через P_k вероятность того, что в какой-то момент сумма чисел, выпавших при всех сделанных бросках, равна k. Какое число больше: P_2018 или P_2019?

10. Отрезки на плоскости задаются парами целочисленных координат концевых точек. Определить, пересекаются ли 2 отрезка.

11. Имеется независимая случайная выборка $X_1, ..., X_n$ из геометрического распределения:

$$P(X_i = x) = (1-p)^x p, x = 0, 1, 2, ...$$

. Предложите несмещенную и состоятельную оценку для параметра p.

12. Оценивание регрессии $Y_i = \alpha + \beta X_i + \epsilon_i$ по 16 наблюдениям дало результаты: $TSS = 63, \hat{\sigma_\epsilon^2} = 2.5$. Найдите R^2.

13. По четырём наблюдениям оценивалась парная регрессия с помощью метода наименьших квадратов. В Таблице 1 приведены остатки регрессии e_i и значения регрессора X_i:

Таблица 1:

e_i:	6	0	a	$2a$
X_i :	10	13	12	b

Найдите значения a и b.

14. Дано 100-этажное здание. Если яйцо сбросить с высоты N-го этажа (или с большей высоты), оно разобьется. Если его бросить с любого меньшего этажа, оно не разобьется. У вас есть два яйца. Найдите N за минимальное количество бросков.

Вступительный экзамен в НИУ ВШЭ — 2018 г.
Экзаменационный вариант
по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
ОП «Финансовые технологии и анализ данных»

Время выполнения задания — 240 мин. Решения заданий должны быть записаны по-русски или по-английски. Каждая задача оценивается не более чем 10 баллами, максимальная сумма — 100 баллов. Если Вы решите больше 10 задач, будут зачтены 10 лучших решений

1. Может ли сумма квадратов десяти последовательных натуральных чисел быть полным квадратом?

2. Вычислить

$$\int \frac{\sin(2x)}{4\cos^2 x + 12\cos x - 7} dx.$$

3. Исследовать функцию (найти область определения, особенности, экстремумы, участки монотонности, интервалы выпуклости вверх и вниз, асимптоты.)и построить ее график

$$f(x) = \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} - \frac{2x}{17}.$$

4. Решите дифференциальное уравнение $(x - x^2 y)dy + ydx = 0$.

5. Найти A^{10}, где

$$A = \begin{pmatrix} -13 & -3 & 18 \\ -20 & -4 & 26 \\ -14 & -3 & 19 \end{pmatrix}$$

6. Найти A^{-1}, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

7. Квадратный многочлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что

$$f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = f\left(\frac{c-a-b}{2a}\right) = 0.$$

Найдите $f(-1)f(1)$.

8. Даны функции $f, g : R \to R$ такие что для любых $x, y \in R$

$$f(x)g(y) = axy + bx + cy + 1,$$

где a, b, c константы. Найти $a - bc$.

9. Правильная игральная кость бросается много раз. Найдите математическое ожидание числа бросков, сделанных до того момента, когда сумма всех выпавших очков станет больше 2017?

10. N точек на плоскости заданы своими координатами. Найти порядок, в котором можно соединить эти точки, чтобы получился N-угольник (т.е. не было бы пересечений сторон).

11. Имеются две независимые несмещённые оценки параметра θ, обозначим их $\hat{\theta_1}$ и $\hat{\theta_1}$, а их дисперсии соответственно σ_1^2 и σ_2^2. Найдите значение α, при котором оценка $\theta_3 = \alpha\hat{\theta}_1 + (1-\alpha)\hat{\theta}_2$ будет иметь наименьшую дисперсию. Будет ли θ_3 несмещенной оценкой для θ?

12. Предположим, что парная регрессия оценивается без свободного члена: $Y_i = \beta X + \epsilon_i$. Может ли коэффициент детерминации R^2 принять значение больше 1? Приведите пример, или докажите, что такое невозможно.

13. Известно, что $X \sim U[0;a]$, где U - равномерное распределение. Исследователь проверяет гипотезу: $H_0 : a = 10$ против $H_1 : a > 10$ с помощью следующего критерия: отвергнуть H_0 в пользу H_1 , если $X > c$. Каким должно быть число c, чтобы обеспечить уровень значимости 10%?

14. Представьте страну, где все родители хотят иметь мальчика. Каждая семья продолжает рожать детей до тех пор, пока у них не появляется мальчик, а затем останавливается. Каково соотношение мальчиков и девочек в этой стране?

Игнорируйте ситуации, когда рождаются двойняшки, тройняшки и так далее, пары, не имеющие детей, и пары, умершие до того, как у них появится мальчик.