ФТИАД 2023 В1

№1

$N = \text{НОК}(1, \dots, 17)$, n: $\frac{n}{N} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{17}$

найдите остаток от дел. n на 17

$\square$ $N = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \Rightarrow$

$n = N(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{17}) = 17 \cdot \tilde{N} + \frac{N}{17}$ т.е.

надо найти остаток от деления $\frac{N}{17} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ на 17,

$2^4 = 16 = 17 - 1$, $5 \cdot 7 = 35 = 2 \cdot 17 + 1$, $\Rightarrow$

$\frac{N}{17} = (17 - 1) \cdot 3^2 \cdot (2 \cdot 17 + 1) \cdot 11 \cdot 13 = (2 \cdot 17^2 + 17 - 2 \cdot 17 - 1) \cdot 3^2 \cdot 11 \cdot 13$

$33 = 2 \cdot 17 - 1$
$3 \cdot 13 = 39 = 2 \cdot 17 + 5 \Rightarrow 3^2 \cdot 11 \cdot 13 = (2 \cdot 17 - 1)(2 \cdot 17 + 5) =$
$= 4 \cdot 17^2 + 8 \cdot 17 - 5$

$\Rightarrow \frac{N}{17} = (2 \cdot 17^2 - 17 - 1)(4 \cdot 17^2 + 8 \cdot 17 - 5) = 17 \cdot m + 5$ $\square$

Ответ: 5

№2

$\bigcup_{i=1} (a_i, b_i) = \{1, \dots 14\}$, $b_i > 2i$

очев. что 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 в разных парах, а 7 в паре с 14

т.е. (7, 14) (8, x), (9, x), (10, x), (11, x), (12, x), (13, x)

куда можно поставить 6? к 12 или 13.

1) пусть (12, 6), тогда 5 можно к 10, 11, 13 а остальные 4 числа в любые пары $\Rightarrow \boxed{3 \cdot 4!} = 72$ вар-ов

2) пусть (13, 6) $\Rightarrow$ 5 к 10, 11, 12, опять остал. числа в любую пару $\Rightarrow \boxed{3 \cdot 4!} = 72$

Ответ: 144

ФТИАД 23 В1.1

№3

$y' + x(y^2+y) = 0 \quad y(2) = 1$

$\frac{dy}{dx} = -x\,y(y+1)$,

$\frac{dy}{y(y+1)} = -x\,dx \quad y \neq 0,\ y \neq -1$

$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1}\right) dy = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + C$

$\ln|y| - \ln|y+1| \Rightarrow \frac{y}{y+1} = e^{-x^2/2} \cdot C$

$y(2) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} = e^{-2} \cdot C \Rightarrow C = e^2/2$

$\boxed{\frac{y}{y+1} = \frac{1}{2} e^{-x^2/2 + 2}}$

$1 - \frac{1}{y+1}$

$1 - \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2-4}{2}} = \frac{1}{1+y}$

$1 + y = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{*}} \Rightarrow y = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{*}} - 1 = \frac{\frac{1}{2} e^{*}}{1 - \frac{1}{2} e^{*}}$

$\boxed{y(x) = \frac{e^{-\frac{x^2-4}{2}}}{2 - e^{-(x^2-4)/2}}}$

№4

$v_1 = (3, 3, -2, 4) \quad v_2 = (3, 4, 0, 3), \quad v_3 = (5, 6, -1, 6)$
$v_4 = (4, 4, -3, 5)$

$\dim(S) - ?$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & 6 & -1 & 6 \\ 4 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & +1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & +1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & +1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

ФПИ АД23 В1.2

$\operatorname{Span} S = \{ x_1(1,0,0,5) + x_2(0,1,0,3) + x_3(0,0,1,1) \}$

2) или

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 4 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ 4 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ Базис:

$v_1 = (3, 3, -2, 4)$
$v_2 = (3, 4, 0, 3)$
$v_3 = (5, 6, -1, 6)$

№5

матр кв. формы

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 16 & -16 \\ 16 & 41 & -32 \\ -16 & -32 & 41 \end{pmatrix}$$

можно либо кр. Сильв. воспол., либо искать соб. знач

$\Delta_1 = |17| > 0$

$\Delta_2 = 17 \cdot 41 - 16 \cdot 16 > 0$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 17 & 16 & -16 \\ 16 & 41 & -32 \\ -16 & -32 & 41 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17 & 16 & -16 \\ 16 & 41 & -32 \\ 0 & 9 & 9 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 17 & 16 & -16 \\ 16 & 41 & -32 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 9 \begin{vmatrix} 17 & 32 & 0 \\ 16 & 83 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 17 & 32 \\ 16 & 83 \end{vmatrix} = 9 \cdot (17 \cdot 83 - 16 \cdot 32) > 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{A\text{-полож. опред.}}$

ФТИИД23 В3.3

№6

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}\frac{e^x-e^{-x}}{2}-2\sin\frac{x}{2}}{e^{\operatorname{tg}x}-x^2-\sin x-\cos x} \qquad \operatorname{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$\operatorname{sh}'=\operatorname{ch}x$

$\operatorname{ch}'=\operatorname{sh}x$

$\operatorname{ch}^2-\operatorname{sh}^2=1$

$f(x)=\operatorname{arctg}(\operatorname{sh}x)-2\sin\frac{x}{2}$

$g(x)=e^{\operatorname{tg}x}-x^2-\sin x-\cos x$

$f'=\frac{\operatorname{ch}x}{1+\operatorname{sh}^2x}-2\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{\operatorname{ch}x}-\cos\frac{x}{2} \qquad f'(0)=0$

$f''=\frac{-\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2x}+\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2} \qquad f''(0)=0$

$f'''=\frac{-\operatorname{ch}x}{\operatorname{ch}^2x}+\frac{2\operatorname{sh}^2x}{\operatorname{ch}^3x}+\frac{1}{4}\cos\frac{x}{2} \qquad f'''=\underline{-3/4}$

$g'=\frac{1}{\cos^2x}e^{\operatorname{tg}x}-2x-\cos x+\sin x \qquad g'=0$

$g''=\frac{2\sin x}{\cos^3x}e^{\operatorname{tg}x}+\frac{1}{\cos^4x}e^{\operatorname{tg}x}-2+\sin x+\cos x \qquad g''=0$

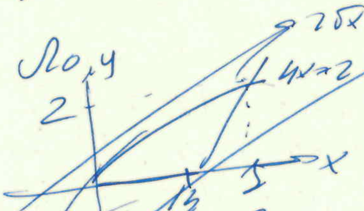
$g'''=\left(\frac{2\sin x}{\cos^3x}+\frac{1}{\cos^4x}\right)'e^{\operatorname{tg}x}+\left(\frac{2\sin x}{\cos^3x}+\frac{1}{\cos^4x}\right)\frac{1}{\cos^2x}e^{\operatorname{tg}x}+\cos x-\sin x$

$\|$

$\frac{2\cos x}{\cos^3x}+\frac{6\sin^2x}{\cos^4x}+\frac{4\sin x}{\cos^5x}$

$g'''(0)=2+1+1=\underline{4} \quad \Rightarrow \lim=\frac{-3/4}{4}=\boxed{-3/16}$

№7



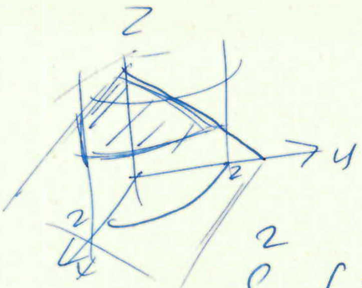
$\Omega=\int\limits_0^{16-x^2-y^2}\iint\limits_{(x,y)\in\Omega_0}dx\,dy\,dz=\int\limits_0^{16-x^2-y^2}\int\limits_0^2\int\limits_{y^2/4}^{\frac{y+2}{4}}(16-x^2-y^2)\,dx\,dy=$

$\int\limits_0^{16-x^2-y^2}\int\limits_0^2\left(\frac{y+2}{4}-\frac{y^2}{4}\right)dy=\int\limits_0^2\left[16x-\frac{x^3}{3}-y^2x\right]\Big|_{y^2/4}^{(y+2)/4}dy=$

$=\int\limits_0^2\left(4(y+2)-4y^2-\frac{(y+2)^3}{192}+\frac{y^6}{192}-y^2\left(\frac{y+2}{4}\right)+\frac{y^4}{4}\right)dy=$

$=\frac{1}{192}\int\limits_0^2\left[y^6-(y+2)^3+y^4\cdot 48-y^2(y+2)\cdot 48+4\cdot 192(y+2)-4\cdot 192y^2\right]dy$

ФПиАД 23 БЗ 4



№7

$$V=\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}(3-y)\,dy\,dx=$$

$$=\int_0^2\left(3y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{\sqrt{4-x^2}}dx=3\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\int_0^2(4-x^2)\,dx$$

$$=\left\{\begin{matrix}x=2\sin y\\ dx=2\cos y\,dy\end{matrix}\right\}=3\cdot2\cdot2\int_0^{\pi/2}\underbrace{\cos^2 y}_{\frac{1+\cos 2y}{2}}\,dy-\frac{1}{2}\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2=$$

$$=6\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2y)\,dy-\frac{1}{2}\left(8-\frac{8}{3}\right)=6\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin 2y}{2}\Big|_0^{\pi/2}\right)-\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}$$

$$=\boxed{3\pi-8/3}$$

ПМ-Д-23В1.5

№8

$A = \{$респонд. ответил "Да" на вопрос$\}$

$H_1 = \{$житель доверяет соц. опр.$\}$, $H_2 = \{$житель не доверяет соц. опр.$\}$

$P(H_1) = 0{,}7, \quad P(H_2) = 0{,}3, \quad P(A|H_1) = 1, \quad P(A|H_2) = \frac{1}{3}$

а) Ф-ла полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) = 0{,}7\cdot 1 + 0{,}3\cdot\frac{1}{3} = \boxed{0{,}8}$$

б) Необходимо вычислить $P(H_1|A)$:

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}7\cdot 1}{0{,}8} = \boxed{0{,}875}$$

№9

а) $$X^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X^TX)^{-1}(X^Ty) = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$\hat{\beta}_1 = 1{,}5; \quad \hat{\beta}_2 = 2; \quad \hat{\beta}_3 = 1{,}5$

$$y(1; -2) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 + \varepsilon = 1{,}5 + 2 - 3 + 0 = \boxed{0{,}5}$$

б) $H_0: \beta_2 = 0$

$H_a: \beta_2 \neq 0$ ур. значимости = 10%

$$\hat{\varepsilon} = y - X\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ФТиАД 23 В1.6

$se^2 = \hat{\varepsilon}^T \varepsilon = 1$, $s^2 = \frac{1}{n-a} se^2 = \frac{1}{5-3} \cdot 1 = \frac{1}{2}$,

$\hat{\sigma} = \sqrt{s^2} = 1/\sqrt{2}$, $se(\hat{\beta}_2) = \sqrt{(X^T X)^{-1}_{22}}\, \hat{\sigma} = 1/\sqrt{2}$

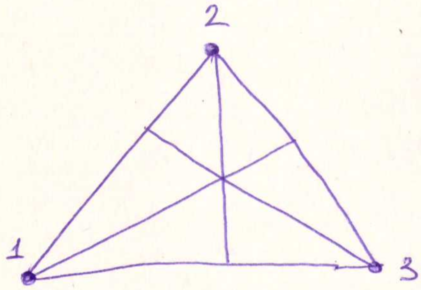
$$t_2 = \frac{\hat{\beta}_2}{se(\hat{\beta}_2)} = 2\sqrt{2} > 1{,}638 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\hat{\beta}_2 \text{ значим, принимаем } H_a \text{ на ур. значимости } 10\%}$

№10

У каждого муравья есть три вар-та пути $\Rightarrow 3^3 = 27$ возм. вариантов.

Два муравья могут столкнуться на стороне или биссектрисе (в точке пересечения). Три муравья могут столкнуться только в точке пересечения биссектрис.



$A = \{$ столкнулись i и j муравьи $\}$

$B = \{$ столкнулись три муравья $\}$

$\overline{A+B} = \{$ ни один муравей не столкнулся с другим $\}$

$$P(A) = 3 \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}_{\text{оба по стороне}} + \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}_{\text{оба по биссектр, один по стороне}} \Big) = 3\Big(\frac{3+2}{27}\Big) = \frac{15}{27}$$

$$P(B) = \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}_{\text{все по биссектрисе}} = \frac{1}{27}$$

$$P(\overline{A+B}) = 1 - (P(A) + P(B)) = 1 - \frac{15}{27} - \frac{1}{27} = \boxed{\frac{11}{27}}$$

ФТиАД 2023 В2

№1

$\{1, 2, \ldots, 10\}$ 2 числа дел. на 7. a - дел-ся на 7 $\Rightarrow$ след. дел. на 7 это $a+7$

$\{11, \ldots\ 20\}$

$\{21, \ldots\ 30\}$

$\{991, \ldots\ 1000\}$

т.е в $\{k, \ldots\ k+9\}$ будет 2 таких

если: 1) k и $k+7$ дел-ся на 7.

2) $k+1$, $k+8$

3) $k+2$, $k+9$

1) $k = 10n+1$, $0 \le n \le 99$ дел-ся на 7 если, n - ?

пусть $n = 7m + b$, $0 \le b \le 6$

$k = 70m + (10b+1)$ подходит $\boxed{b=2}$ т.е $n = 7m+2$

т.е $n = 2, 9, 16, \ldots, 93$ $\boxed{14 \text{ чисел}}$

$0 \le 7m+2 \le 99$, $0 \le m \le 13$

2) $k+1 = 10n+2$, $n = 7m+b$ $\Rightarrow$

$k+1 = 70m + (10b+2)$ подходит $b=4$

$n = 4, 11, \ldots, 95$ т.е $0 \le m \le 13$ $\boxed{14 \text{ чисел}}$

3) $k+2 = 10n+3$, $n = 7m+b$

$k+2 = 70m + 10b + 3$ подходит $b = 6$

$\Rightarrow n = 6, \ldots, 97$, $0 \le m \le 13$ $\Rightarrow \boxed{14 \text{ чисел}}$

т.е всего $\boxed{42}$ множества

№2

пусть p - правдорубов, l - лжецов, k_- - конформистов, ответивших ~~да-нет-да~~, ~~ложь-правда-ложь~~ правда-ложь-правда нет нет нет, k_+ - конф, ответив ~~нет-да-нет~~ ложь-правда-ложь да, да, да,

$$\begin{cases} p + l + k_+ + k_- = 31 \\ p + l + k_- = 22 \\ l + k_- = 15 \\ k_- = 9 \end{cases} \Rightarrow l = 6 \Rightarrow p = 7 \Rightarrow k_+ = 9$$

$\boxed{\text{Отв. 7 правдорубов}}$

№3

$y' = 2xy(1+y^2) \quad y(0)=1$

$\int \frac{dy}{y(1+y^2)} = 2\int x\,dx$

$\int \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{1+y^2}\right) dy = \int 2x\,dx \Rightarrow$

$\log|y| - \frac{1}{2}\log|1+y^2| = x^2+C \qquad \log\frac{|y|}{\sqrt{1+y^2}} = x^2+C$

$\boxed{\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} = Ce^{x^2}} \qquad \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} = C}$

$\frac{y^2}{1+y^2} = \frac{1}{2}e^{2x^2} \qquad 1-\frac{1}{2}e^{2x^2} = \frac{1}{1+y^2} \qquad 1+y^2 = \frac{2}{2-e^{2x^2}}$

$\quad \| \qquad\qquad y^2 = \frac{e^{2x^2}}{2-e^{2x^2}} = \frac{1}{2e^{-2x^2}-1}$

$1-\frac{1}{1+y^2}$

$\boxed{y = \frac{1}{\sqrt{2e^{-2x^2}-1}}}$

№4

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 & 1 \\ -7 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 1 & -7 \\ -2 & 5 & 4 & +7 \end{pmatrix} \xrightarrow{+1} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 1 & -7 \\ -2 & 5 & 4 & +7 \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 6 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & +9 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5,\ +2} \begin{pmatrix} 0 & 9 & -19 & 46 \\ 0 & -2 & 14 & -20 \\ 1 & -2 & 5 & -9 \\ 0 & 3 & 0 & +9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -9 \\ 0 & -1 & 7 & -10 \\ 0 & 9 & -19 & 46 \\ 0 & 3 & 0 & +9 \end{pmatrix} \xrightarrow{+9,\ +3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -9 \\ 0 & -1 & 7 & -10 \\ 0 & 0 & 44 & -44 \\ 0 & 0 & 21 & -21 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & -9 \\ 0 & 1 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5,\ +7} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & +3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} +2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{v_4 = 2v_1 + 3v_2 - v_3}$$

ФМ4АД 2 3Б2 ?

№5

метод
кв. формы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 12 \\ 4 & -12 & 3 \\ 12 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$ найдем соб. знач

$$p(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 4 & 12 \\ 4 & -12-x & 3 \\ 12 & 3 & -4-x \end{vmatrix} \overset{-3}{=} \begin{vmatrix} 3-x & 4 & 12 \\ 4 & -12-x & 3 \\ 0 & 39+3x & -13-x \end{vmatrix}$$

$$= (3-x)\begin{vmatrix} -12-x & 3 \\ 39+3x & -13-x \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 39+3x & -13-x \end{vmatrix} =$$

$$= (3-x)\left[(12+x)(13+x) - 3(\underline{39+3x})\right] - 4\left[-4(13+x) - 12(\underline{39+3x})\right]$$

$$= (3-x)(12+x)(13+x) + 16(13+x) + (39+3x)\left[-9+3x+48\right]$$

$$3x+39 = 3(x+13)$$

$$= (13+x)\left[(3-x)(12+x) + 16 + 3(39+3x)\right]$$

$$= (13+x)\left[52 - 9x - x^2 + 117 + 9x\right] = (13+x)\left[169 - x^2\right]$$

$$= (13+x)(13-x)(13+x) = (13+x)^2(13-x)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 13, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = -13 \Rightarrow \text{инд. инер } \boxed{1, 2}$$

№6

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(e^x-1) - \sin x - \sin^2\frac{x}{\sqrt{2}}}{\lg(1+\sin x) - \frac{2x}{1+\sqrt{1+2x}}} = \lim \frac{f(x)}{g(x)}$$

производные:

$$f'(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1-(e^x-1)^2}} - \cos x - \cancel{\sqrt{2}x \cos\frac{x^2}{\sqrt{2}}}\; 2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{x}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{e^x}{\sqrt{2e^x - e^{2x}}} - \cos x - \frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2e^{-x}-1}} - \cos x - \frac{\sin(\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}}$$

$$f'(0) = 0$$

ФПМ АДЗ3В23

$$f'' = (2e^{-x}-1)^{-3/2} \cdot -\frac{1}{2} \cdot (-2e^{-x}) + \sin x - \cos(\sqrt{2}x) =$$

$$= e^{-x}(2e^{-x}-1)^{-3/2} + \sin x - \cos(\sqrt{2}x) \qquad f''(0) = 0$$

$$f''' = -e^{-x}(2e^{-x}-1)^{-3/2} + e^{-x} \cdot -\frac{3}{2}(2e^{-x}-1)^{-5/2} \cdot (-2e^{-x}) + \cos x$$

$$+ \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}x)$$

$$f'''(0) = -1 + 3 + 1 = \underline{3}$$

$$g(x) = \ln(1+\sin x) - \frac{2x}{1+\sqrt{1+2x}} = \ln(1+\sin x) - (\sqrt{1+2x} - 1)$$

$$g'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x} - (1+2x)^{-1/2} \qquad g'(0) = 0$$

$$g''(x) = \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(1+\sin x)^2} - \left(-\frac{1}{2}\right)(1+2x)^{-3/2} \cdot 2$$

$$= \frac{-1-\sin x}{(1+\sin x)^2} + (1+2x)^{-3/2} = -\frac{1}{1+\sin x} + (1+2x)^{-3/2}, \quad g''(0) = 0$$

$$g''' = \frac{\cos x}{(1+\sin x)^2} - \frac{3}{2} \cdot 2(1+2x)^{-5/2}, \quad \underline{g'''(0) = 1 - 3 = -2}$$

$$\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'} = \lim \frac{g''}{g''} = \lim \frac{f'''}{g'''} = \frac{3}{2} = \boxed{-3/2}$$

$$\boxed{N7}$$

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} (3-x)\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (3-x)\,dy\,dx =$$

$$= 2\int_{-2}^{2}(3-x)\sqrt{4-x^2}\,dx = 6\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx - 2\int_{-2}^{2} x\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$= 12\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = 2\sin y \\ dx = 2\cos y\,dy \end{matrix}\right\} = 12 \cdot 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 y\,dy = 12 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} =$$

$$\cos^2 y = \frac{\cos 2y + 1}{2} \qquad = \boxed{12\pi}$$

ФПМИ 23 В2.4

№ 8

$A = \{$респондент ответил "Да"$\}$

$H_1 = \{$респ. доверяет соц. опросам$\}$, $H_2 = \{$респ. не доверяет соц. опросам$\}$

$P(H_1) = 0{,}3$, $P(H_2) = 0{,}7$, $P(A|H_1) = 1$, $P(A|H_2) = 1/3$

а) Ф-ла полной в-ти:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) =$$
$$= 0{,}3\cdot 1 + 0{,}7\cdot \frac{1}{3} = \boxed{0{,}533}$$

б) В-ть, что респ. действительно доверяет, если известно, что он ответил "Да":

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)\cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}3\cdot 1}{0{,}533} = \boxed{0{,}563}$$

№ 9

а)
$$X^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\hat\beta = (X^TX)^{-1}(X^Ty) = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$\hat\beta_1 = 1{,}5$; $\hat\beta_2 = 2$; $\hat\beta_3 = 1{,}5$

$$y(-2;1) = \hat\beta_1 + \hat\beta_2 x_2 + \hat\beta_3 x_3 = 1{,}5 + 2(-2) + 1{,}5 = \boxed{-1}$$

б) $H_0 : \beta_3 = 0$

$H_a : \beta_3 \neq 0$ ур. значимости $= 5\%$

$$\hat\varepsilon = y - X\hat\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$se^2 = \hat{\varepsilon}^T \varepsilon = 1, \quad s^2 = \frac{1}{n-a} se^2 = \frac{1}{5-3} = \frac{1}{2}$$

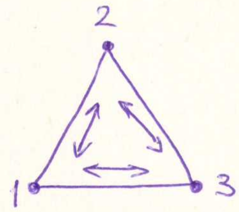
$$\hat{\sigma} = \sqrt{s^2} = 1/\sqrt{2}, \quad se(\hat{\beta}_3) = \sqrt{(X^T X)^{-1}_{33}}\, \hat{\sigma} = \sqrt{1,5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$t_3 = \frac{\hat{\beta}_3}{se(\hat{\beta}_3)} = \frac{1,5}{\sqrt{1,5} \cdot 1/\sqrt{2}} = \sqrt{3} < 4,3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\boxed{H_0 \text{ не отвергается на ур. значимости } 5\%}$.

№10

Всего 8 вариантов перемещения муравьев в треугольнике. Только в 2 из 8 случаев раунд закончится успешно.



$A = \{$муравьи не столкнулись$\}$

$$P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}, \quad P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Мы проводим послед-ть испытаний Бернулли с вер-ю успех p и в-ти неудачи $1-p$. Введем случ. величину X (число раундов), которая будет распределена геометрически с параметром p. Тогда:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} n(1-p)^{n-1} p = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(1-p)^k p = p \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(1-p)^k =$$

$$= p \frac{1}{[1-(1-p)]^2} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p} \Rightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{1}{3/4} = \frac{4}{3} = \boxed{1\frac{1}{3}}$$

средняя длина игры в раундах

ФТиАД 2023 B3

№1

$N = \overline{abc}$, $a, b, c \neq 0$ т.е. $1 \leq a, b, c \leq 9$

$3 \cdot 0,(abc) = 0,(a) + 0,(b) + 0,(c)$

$0,(a) = 0,aa\ldots a\ldots = a(10^{-1} + 10^{-2} + \ldots) = a\frac{10^{-1}}{1-10^{-1}} = \frac{a}{9}$

$0,(abc) = a\cdot(10^{-1} + 10^{-4} + 10^{-7} + \ldots) + b\cdot(10^{-2} + 10^{-5} + \ldots) + c\cdot(10^{-3} + \ldots) =$

$= a\frac{10^{-1}}{1-10^{-3}} + b\frac{10^{-2}}{1-10^{-3}} + c\cdot\frac{10^{-3}}{1-10^{-3}} = a\cdot\frac{100}{999} + b\cdot\frac{10}{999} + c\frac{1}{999}$

$\Rightarrow \frac{3}{999}(100a + 10b + c) = \frac{1}{9}(a+b+c)$

$100a + 10b + c = 37(a+b+c) \Rightarrow 63a = 27b + 36c$

$\Rightarrow 7a = 3b + 4c \Rightarrow \underbrace{3(b-a) + 4(c-a) = 0}$

$\Rightarrow a = b = c = 1, \ldots 9$ – подходят

иначе: $\begin{cases} b-a=4 \\ c-a=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} b-a=-4 \\ c-a=3 \end{cases}$ т.к. $(b-a)$ должно делиться на 4, $(c-a)$ на 3

если $\begin{cases} b-a=8 \\ c-a=-6 \end{cases}$ $\begin{cases} b-a=-8 \\ c-a=6 \end{cases}$

$\begin{cases} b=a+4 \\ c=a-3 \end{cases}$ $a=4, b=8, c=1$; $a=5$ $b=9$ $c=2$

$\begin{cases} b=a-4 \\ c=a+3 \end{cases}$ $a=5, b=1, c=8$; $a=6, b=2, c=9$

$\begin{cases} b=a+8 \\ c=a-6 \end{cases}$ $\Downarrow$ $a=1$ $\varnothing$

$\begin{cases} b=a-8 \\ c=a+6 \end{cases}$ $\Downarrow$ $a=9$ $\varnothing$

Ответ: 111, 222, …, 999, 481, 592, 518, 629

13 чисел

№2

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Прочтём все строки $1+2+3+4=10$

$\Rightarrow$ в матрице 10 единиц и 6 нулей

Посчитаем варианты расстановки нулей:

Строки с одними нулями нет.

Строки с 3мя нулями

1) есть 4 способа выбрать строку и 4 способа поставить в ней 1 $\Rightarrow$ 16 способов

2) после этого есть 3 способа получить столбец с 3-мя нулями

и в каждом вар-те 3 способа выставить 1 ⇒ 9 способов

пример:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

3) осталось поставить последний 0.

Он не может быть в строке (столбце) где уже есть 1, т.к. тогда две остав. строки (столбца) будут одинаковыми ⇒

4 вар-та

итого: $16 \cdot 9 \cdot 4 = \boxed{576}$

N3

$y' + 2x(y^2-3y+2) = 0 \quad y(0)=3 \Rightarrow y^2-3y+2 \neq 0$

$\int \frac{dy}{y^2-3y+2} = -\int 2x\,dx = -x^2$

$\int \frac{dy}{(y-1)(y-2)} = \int\left(\frac{1}{y-2} - \frac{1}{y-1}\right)dy = \log\left|\frac{y-2}{y-1}\right| + C$

$\boxed{\frac{y-2}{y-1} = Ce^{-x^2}} \quad \frac{1}{2} = C$

$y-2 = \frac{1}{2}(y-1)e^{-x^2} \Rightarrow \quad y\left(1-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right) = 2 - \frac{1}{2}e^{-x^2}$

$\boxed{y = \frac{4-e^{-x^2}}{2-e^{-x^2}}}$

№4

$$\begin{pmatrix} 3 & 12 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 5 & 4 \\ 5 & 20 & 17 & 19 \\ 6 & 24 & -1 & -20 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 12 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & -16 & -32 \end{pmatrix} \begin{matrix} - \\ \\ :8 \\ :16 \;+ \end{matrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -5 \\ 2 & 8 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} -2 \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad rk = 2$$

$\operatorname{span} U = x_1(1, 4, 0, -3) + x_2(0, 0, 1, 2)$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & -8 & 5 \\ 3 & 4 & -6 & 10 \end{pmatrix} - \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 \\ 2 & 4 & -8 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} -5 \\ -2 \\ -2 \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -6 & -28 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 4 & -12 & -5 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} +2 \\ \\ +4 \\ \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -42 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -33 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rk = 3$$

$\operatorname{span} V = x_1(1, 0, 2, 0) + x_2(0, 1, -3, 0) + x_3(0, 0, 0, 1)$

$\Rightarrow$ не эквивалентны

ФТиАД 23 ВЗ 3

№5

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 14 & 15 & 0 & -11 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) -5 \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 3 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot 3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & 0 & -5 & -14 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & -5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} +3 \\ +2 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & 0 & -5 & -14 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 15 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 15 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -5 & -14 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) -3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 15 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 1 & -59 & 12 & -3 & 0 \end{array}\right) +6$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 15 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \begin{matrix} - \\ +2 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 17 & -3 & -6 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right) \cdot (-2)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 & 3 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -5 & +10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 10 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 & 6 \end{array}\right)$$

A^{-1}

ФТиАД 23Б3.4

№6

$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}-1\right)=S$ рассмотим

$S_k=\sum_{n=0}^{k}\left(\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}-1\right)$ если $\exists \lim S_k$ то ряд сх-ся

$\frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}} = \frac{2\sqrt{n+1}\,(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{2} = \sqrt{(n+1)(n+2)}-\sqrt{(n+1)n} \Rightarrow$

$S_k = \sum_{n=0}^{k}\sqrt{(n+1)(n+2)} - \sum_{n=0}^{k}\sqrt{n(n+1)} - (k+1) =$

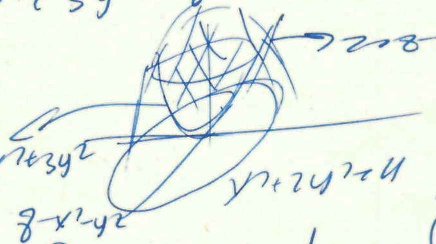
$= \sum_{n=1}^{k+1}\sqrt{n(n+1)} - \sum_{0}^{k}\sqrt{n(n+1)} - (k+1) = \sqrt{(k+1)(k+2)}-(k+1)$

$= \sqrt{k+1}\,(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}) = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}$, $\boxed{\lim_{k\to\infty} S_k = \frac{1}{2} = S}$

№7

$z=x^2+3y^2$ $\quad x^2+3y^2=8-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+2y^2=4$

$z=8-x^2-y^2$



$V=\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{(4-x^2)/2}}^{\sqrt{(4-x^2)/2}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dz\,dy\,dx = \int_{-2}^{2}\int_{-\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}}^{\frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{2}}}(8-2x^2-4y^2)\,dy\,dx$

$= \int_{-2}^{2}\underbrace{(8-2x^2)}_{2(4-x^2)}\cdot\sqrt{2}\sqrt{4-x^2} - \frac{8}{3}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}dx =$

$= \int_{-2}^{2}\underbrace{\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3\cdot 2\sqrt{2}}\right)}_{\frac{2\sqrt{2}}{3}}(4-x^2)^{3/2}dx = 2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2\int_{0}^{2}(4-x^2)^{3/2}dx = \{x=2\sin y\}$

$= \frac{8\sqrt{2}}{3}\cdot 2^3\cdot 2\int_{0}^{\pi/2}\underbrace{\cos^4 y}_{\left(\frac{\cos 2y+1}{2}\right)^2}dy = \frac{8\sqrt{2}}{3}\cdot\cancel{16}\cdot\int_{0}^{\pi/2}(\underbrace{\cos^2 2y}_{\frac{\cos 4y+1}{2}}+2\cos 2y+1)\,dy$

$= \frac{8\sqrt{2}}{3}\cdot 4\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \boxed{8\pi\sqrt{2}}$

$\boxed{№8}$

$A = \{$респондент ответил "Да"$\}$

$H_1 = \{$респ. доверяет соц опросам$\}$, $H_2 = \{$респ. не доверяет соц. опросам$\}$

$P(H_1) = 0{,}7$, $P(H_2) = 0{,}3$, $P(A|H_1) = 1$, $P(A|H_2) = \frac{1}{3}$

а) Формула полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) =$$
$$= 0{,}7 \cdot 1 + 0{,}3 \cdot \frac{1}{3} = \boxed{0{,}8}$$

б) Вероятность того, что респ. действительно доверяет соц. опросам, если известно, что он ответил "Да":

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}7}{0{,}8} = \boxed{0{,}875}$$

$\boxed{№9}$

а)

$$X^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} (X^T y) = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ 0 & -0{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

$\hat{\beta}_1 = 1{,}5$; $\hat{\beta}_2 = 2$; $\hat{\beta}_3 = 1{,}5$

$$y(-2; 1) = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 x_2 + \hat{\beta}_3 x_3 = 1{,}5 - 4 + 1{,}5 = \boxed{-1}$$

б) $H_0: \beta_3 = 0$

$H_a: \beta_3 \neq 0$ ур. значимости = 5%

$$\hat{\varepsilon} = y - X\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$se^2 = \hat{\varepsilon}^T \varepsilon = 1, \quad s^2 = \frac{1}{n-a} se^2 = \frac{1}{5-3} = 0{,}5$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{s^2} = 1/\sqrt{2}, \quad se(\hat{\beta}_3) = \sqrt{(X^T X)^{-1}_{33}}\, \hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1{,}5}{2}}$$

$$t_3 = \frac{\hat{\beta}_3}{se(\hat{\beta}_3)} = \frac{1{,}5 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{1{,}5}} = \sqrt{3} \approx 1{,}73205 < 4{,}3 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\boxed{H_0 \text{ не отвергается на ур. значимости } 5\%}$

$\boxed{№ 10}$

L – расст. от Москвы до Владивостока

ϑ – скорость самолета

ω – скорость ветра

Время полета в безветр. погоду: $t_1 = \frac{L}{\vartheta} + \frac{L}{\vartheta} = \frac{2L}{\vartheta}$

Время полета при пост. западном ветре:

$$t_2 = \frac{L}{\vartheta+\omega} + \frac{L}{\vartheta-\omega} = \frac{2L\vartheta}{\vartheta^2-\omega^2}$$

$$\frac{2L}{\vartheta} \; ? \; \frac{2L\vartheta}{\vartheta^2-\omega^2} \Rightarrow \frac{\cancel{2L}}{\vartheta} \; ? \; \frac{\cancel{2L}\vartheta}{\vartheta^2-\omega^2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad \vartheta^2 - w^2 \ ? \ \vartheta^2$

$0 \ ? \ w^2 + \cancel{\vartheta^2} - \cancel{\vartheta^2}$

$0 \le w^2 \quad \Rightarrow t_1 = \frac{2L}{\vartheta} \le t_2 = \frac{2L\vartheta}{\vartheta^2 - w^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ время полета при постоянном западном ветре $\boxed{\text{увеличилось}}$

ФТиАД23 В3.8