УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

УДК 517.958:531.332

О СВОЙСТВАХ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГОМОГЕННОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ С ОБЩЕЙ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕЙ СКОРОСТЬЮ

© 2021 г. А.А. Злотник, А.С. Федченко

Изучается квазигидродинамическая система уравнений гомогенной (с общими скоростью и температурой) многокомпонентной газовой смеси в отсутствие химических реакций, с общей регуляризующей скоростью. Для нее выводится уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии при наличии потоков диффузии компонент смеси. В отсутствие потоков диффузии новым способом строится линеаризованная на постоянном решении система уравнений, выполняется ее приведение к симметричному виду и доказывается L^2-диссипативность ее решений, а также устанавливается вырождение (по отношению к плотностям компонент смеси) свойства параболичности исходной системы. Фактически изучаемая система имеет составной тип. Полученные свойства строго отражают ее физическую корректность и диссипативный характер квазигидродинамической регуляризации.

Введение. Уравнения движения многокомпонентных смесей газов (или жидкостей) представляют большой теоретический и прикладной интерес, см., в частности [1, 2, 3, 4]. В однокомпонентном случае давно используются квазигазодинамическая (КГД) и более простая квазигидродинамическая (КГидД) системы уравнений как регуляризованные системы уравнений Эйлера и Навье-Стокса вязкого сжимаемого теплопроводного газа [5, 6, 7]. Для них справедливо уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии. Дополнительными важными математическими свойствами этих систем являются их равномерная по Петровскому параболичность и устойчивость решений линеаризованных систем, доказанные в [8, 9, 10, 11]. Обобщения КГД и КГидД систем на случай бинарных смесей газов с различными плотностями, скоростями и температурами в отсутствие потоков диффузии и химических реакций были даны в [6, 12]. Недавно были построены соответствующие обобщения на практически важный случай гомогенных (с общими скоростью и температурой) смесей с одной общей или несколькими регуляризующими скоростями, в том числе с учетом межфазного взаимодействия компонент смеси [13, 14]. Применение разностных методов, основанных на КГидД и КГД системах для бинарных смесей с общей регуляризующей скоростью, хорошо зарекомендовало себя в ряде задач компьютерного моделирования, см. в том числе [14, 15, 16, 17, 18].

В данной работе изучается КГидД система уравнений гомогенной многокомпонентной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью, при наличии потоков диффузии определенного типа и в отсутствие химических реакций. Для нее выводится уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии компонент смеси; для КГидД систем при наличии потоков диффузии это реализуется впервые. В случае бинарной (двухкомпонентной) смеси потоки диффузии эквивалентны указанным в [1, гл. VI], но выписаны изначально несколько иначе и полностью; вывод уравнения баланса энтропии также реализован более наглядно и подробно. Кроме того, новая форма записи потоков диффузии позволила дать обобщение на многокомпонентный случай.

В отсутствие потоков диффузии выводится линеаризованная на постоянном решении КГидД система уравнений, выполняется ее приведение к симметричному виду и доказываются L^2-диссипативность решений соответствующей задачи Коши и их оценки. Строится также упрощенная симметричная система уравнений для меньшего количества искомых функций с лучшими свойствами и для нее доказываются L^2-диссипативность решений соответствующей начально-краевой задачи и их оценки. Устанавливается также вырождение (по отношению к плотностям компонент смеси) свойства параболичности исходной КГидД системы. Оба свойства тесно связаны и анализируются иным существенно более компактным образом, чем это сделано в [8, 9, 10]. В этом анализе существенную роль играет использование редуцированной КГидД системы, уравнения которой разложены с точностью до квадрата модуля градиента решения, и новый способ нормировки плотностей компонент. Оба свойства строго математически выражают физическую диссипативность КГидД регуляризации, играющую принципиальную роль в успехе ее применения.

Указанное вырождение свойства параболичности связано именно с использованием общей регуляризующей скорости (точнее, суммарного давления) в уравнениях баланса плотности компонент смеси. Более того, показывается, что фактически КГидД система уравнений в отсутствие потоков диффузии, подобно системе уравнений Навье-Стокса сжимаемого газа, имеет *составной тип* (а не параболический, как в однокомпонентном случае) Это обстоятельство существенно для корректной постановки краевых условий для плотностей компонент в начально-краевых задачах.

1. Квазигидродинамическая система уравнений гомогенной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью и ее следствия. Квазигидродинамическая (КГидД) система уравнений гомогенной газовой смеси с общей регуляризующей скоростью состоит из следующих уравнений баланса массы компоненты, суммарного импульса и суммарной полной энергии

$$\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}\left[\rho_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}}) + \mathbf{d}_\alpha\right] = 0, \quad \alpha = \overline{1,K}, \tag{1}$$

$$\partial_t(\rho\mathbf{u}) + \operatorname{div}\left[\rho(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\otimes\mathbf{u}\right] + \nabla p = \operatorname{div}\Pi + \rho\mathbf{f}, \tag{2}$$

$$\partial_t E + \operatorname{div}\left[(E+p)(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\right] = \operatorname{div}(-\mathbf{q}+\Pi\mathbf{u}) + \rho(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\cdot\mathbf{f} + Q. \tag{3}$$

Здесь основные искомые функции $\rho_\alpha > 0$, $\mathbf{u} = (u_1,\dots,u_n)$, $\theta > 0$ — плотность компоненты α, общие скорость и абсолютная температура смеси, причем $K \geqslant 2$ и $n = 1,2,3$. Операторы div и $\nabla = (\partial_1,\dots,\partial_n)$ берутся по x, а $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Символы $\otimes$ и $\cdot$ обозначают тензорное и скалярное произведения векторов, а дивергенция тензора берется по его первому индексу.

Компоненты смеси предполагаются совершенными политропными газами с уравнениями состояния $p_\alpha = R_\alpha\rho_\alpha\theta$ и $\varepsilon_\alpha = c_{V\alpha}\theta$, где p_α и ε_α — давление и удельная внутренняя энергия компоненты α, с постоянными $R_\alpha > 0$ и $c_{V_\alpha} > 0$, $\alpha = \overline{1,K}$. Суммарные плотность, давление, удельная внутренняя энергия и полная энергия смеси задаются формулами

$$\rho = \langle\rho_\alpha\rangle := \sum_{\alpha=1}^{K}\rho_\alpha, \quad p = \langle p_\alpha\rangle = R\rho\theta, \quad \varepsilon = \left\langle\frac{\rho_\alpha}{\rho}\varepsilon_\alpha\right\rangle = c_V\theta, \quad E = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\varepsilon, \tag{4}$$

$$R := \left\langle\frac{\rho_\alpha}{\rho}R_\alpha\right\rangle, \quad c_V := \left\langle\frac{\rho_\alpha}{\rho}c_{V\alpha}\right\rangle. \tag{5}$$

Здесь введена операция $\langle\cdot\rangle$ суммирования по $\alpha = \overline{1,K}$. Вторая из формул (4) — это закон Дальтона для смесей. Подчеркнем, что R и c_V являются *функциями*, а не постоянными в отличие от однокомпонентного случая ($K = 1$). Отметим, что здесь $C_\alpha := \frac{\rho_\alpha}{\rho}$ — массовые концентрации компонент смеси, которые будут возникать и ниже.

Тензор вязкости имеет вид $\Pi = \Pi^{NS} + \Pi^\tau$, а поток тепла — вид $\mathbf{q} = \mathbf{q}^F + \mathbf{q}^d$. При этом тензор вязкости Навье-Стокса и поток тепла Фурье задаются стандартными формулами

$$\Pi^{NS} = \mu\Big[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T - \frac{2}{3}(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbb{I}\Big] + \lambda(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbb{I}, \quad -\mathbf{q}^F = \varkappa\nabla\theta,$$

где $\mu > 0$, $\lambda \geqslant 0$ — коэффициенты динамической и объемной вязкости, $\varkappa > 0$ — коэффициент теплопроводности (которые могут зависеть от искомых функций), $\nabla\mathbf{u} = \{\partial_i u_j\}_{i,j=1}^n$, $\mathbb{I}$ — единичный тензор порядка n. Общая регуляризующая скорость и регуляризующий тензор вязкости в КГидД случае имеют вид

$$\widehat{\mathbf{w}} = \tau\Big[(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p - \mathbf{f}\Big], \quad \Pi^\tau = \rho\mathbf{u}\otimes\widehat{\mathbf{w}}, \tag{6}$$

где $\tau > 0$ — параметр регуляризации, который может зависеть от искомых функций. Плотность массовой силы $\mathbf{f}$ и мощность тепловых источников $Q \geqslant 0$ — заданные функции.

Представленная модель является регуляризованной системой уравнений Навье-Стокса вязкого теплопроводного сжимаемого газа. Случай регуляризованных уравнений Эйлера, когда физические коэффициенты вязкости и теплопроводности равны 0, тоже допускается: тогда подразумевается использование искусственных коэффициентов μ, λ, $\varkappa$, пропорциональных τ, см. [5, 6, 7]. Ниже их конкретный вид несуществен.

В этой модели $\mathbf{d}_\alpha$ — поток диффузии между компонентой α и остальными компонентами, а $\mathbf{q}^d$ — соответствующий дополнительный поток тепла. В случае бинарной смеси ($K = 2$) при $\mathbf{d}_\alpha = 0$ и $\mathbf{q}^d = 0$ приведенные выше уравнения были выписаны (среди прочих) в [14]. В данной работе зададим указанные потоки следующими формулами

$$-\mathbf{d}_\alpha := a_0\Big[\sum_{\beta:\,\beta\neq\alpha}\nabla(G_\alpha - G_\beta) + b_\alpha\nabla\theta\Big] = a_0\big[\nabla(KG_\alpha - G) + b_\alpha\nabla\theta\big] \ \text{ с } \ G := \langle G_\alpha\rangle, \tag{7}$$

$$\mathbf{q}^d = \big\langle\big(G_\alpha + K^{-1}b_\alpha\theta\big)\mathbf{d}_\alpha\big\rangle, \tag{8}$$

$$G_\alpha := \varepsilon_\alpha - s_\alpha\theta + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha} = (c_{p\alpha} - s_\alpha)\theta, \quad s_\alpha = \bar{s}_\alpha - R_\alpha\ln\frac{\rho_\alpha}{\bar{\rho}_\alpha} + c_{V\alpha}\ln\frac{\theta}{\bar{\theta}}, \tag{9}$$

где G_α и s_α — потенциал Гиббса и удельная энтропия (см., например, [19]), а $c_{V\alpha}$ и $c_{p\alpha} = R_\alpha + c_{V\alpha}$ — удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении компоненты $\alpha = \overline{1,K}$. Величины $a_0 \geqslant 0$ и b_α не конкретизируются; они могут зависеть от искомых функций и предполагается, что $\langle b_\alpha\rangle = 0$, а $\bar{s}_\alpha$, $\bar{\rho}_\alpha > 0$, $\bar{\theta} > 0$ — постоянные (референсные значения s_α, ρ_α, θ). Также $c_{p\alpha}\theta$ — энтальпия компоненты α.

Важную роль играет свойство $\langle\mathbf{d}_\alpha\rangle = 0$, непосредственно следующее из (7) и $\langle b_\alpha\rangle=0$.

Поскольку

$$\nabla G_\alpha = (c_{p\alpha} - s_\alpha)\nabla\theta - \theta\nabla s_\alpha, \quad \nabla s_\alpha = -R_\alpha\frac{1}{\rho_\alpha}\nabla\rho_\alpha + c_{V\alpha}\frac{1}{\theta}\nabla\theta,$$

то заменой $\tilde{b}_\alpha := b_\alpha - (Ks_\alpha - \langle s_\alpha\rangle)$ введенные выражения для потоков можно сделать, как обычно, не зависящими явно от s_α:

$$-\mathbf{d}_\alpha = a_0\big\{\big[Kc_{p\alpha} - \langle c_{p\alpha}\rangle - (Ks_\alpha - \langle s_\alpha\rangle - b_\alpha)\big]\nabla\theta - \theta\nabla(Ks_\alpha - \langle s_\alpha\rangle)\big\} =$$

$$= a_0\Big[\theta\Big(KR_\alpha\frac{1}{\rho_\alpha}\nabla\rho_\alpha - \Big\langle R_\alpha\frac{1}{\rho_\alpha}\nabla\rho_\alpha\Big\rangle\Big) + \big(KR_\alpha - \langle R_\alpha\rangle + \tilde{b}_\alpha\big)\nabla\theta\Big],$$

$$\mathbf{q}^d = \big\langle\big(G_\alpha + s_\alpha\theta - K^{-1}\langle s_\alpha\rangle\theta + K^{-1}\tilde{b}_\alpha\theta\big)\mathbf{d}_\alpha\big\rangle = \big\langle\big(c_{p\alpha} + K^{-1}\tilde{b}_\alpha\big)\theta\mathbf{d}_\alpha\big\rangle \tag{10}$$

с учетом свойства $\langle \mathbf{d}_\alpha \rangle = 0$. При этом $\langle \tilde{b}_\alpha \rangle = 0$. Кроме того, поскольку $\rho_\alpha = \frac{pC_\alpha}{R\theta}$, то

$$\ln \rho_\alpha = \ln C_\alpha - \ln R + \ln p - \ln \theta, \quad R = \langle R_\alpha C_\alpha \rangle,$$

и верна также формула

$$-\mathbf{d}_\alpha = a_0 \Big\{ \theta \Big[K R_\alpha \frac{1}{C_\alpha} \nabla C_\alpha - \Big\langle R_\alpha \frac{1}{C_\alpha} \nabla C_\alpha \Big\rangle - (K R_\alpha - \langle R_\alpha \rangle) \frac{1}{R} \langle R_\alpha \nabla C_\alpha \rangle \Big] +$$
$$+ \big(K R_\alpha - \langle R_\alpha \rangle \big) \frac{1}{R\rho} \nabla p + \tilde{b}_\alpha \nabla \theta \Big\}. \tag{11}$$

В случае $K = 2$ формулы для потоков (7), (8) принимают вид, эквивалентный известному [1, гл. VI]

$$-\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = a_0 \big[\nabla (G_1 - G_2) + b_1 \nabla \theta \big], \quad \mathbf{q}^d = (G_1 - G_2 + b_1 \theta) \mathbf{d}_1.$$

Кроме того, поскольку $K R_1 - \langle R_\alpha \rangle = R_1 - R_2$ и

$$K R_1 \frac{1}{C_1} \nabla C_1 - \Big\langle R_\alpha \frac{1}{C_\alpha} \nabla C_\alpha \Big\rangle - (K R_1 - \langle R_\alpha \rangle) \frac{1}{R} \langle R_\alpha \nabla C_\alpha \rangle =$$
$$= \Big(\frac{R_1}{C_1} + \frac{R_2}{C_2} \Big) \nabla C_1 - \frac{(R_1 - R_2)^2}{R} \nabla C_1,$$

то после простых алгебраических преобразований формулы (11) и (10) приводят к формулам более стандартного вида для бинарных смесей

$$-\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = a_0 \Big[\frac{R_1 R_2 \theta}{R C_1 (1 - C_1)} \nabla C_1 - \frac{R_1 - R_2}{R\rho} \nabla p + \tilde{b}_1 \nabla \theta \Big], \quad \mathbf{q}^d = \big(c_{p1} - c_{p2} + \tilde{b}_1 \big) \theta \mathbf{d}_1.$$

В частном случае $\tilde{b}_1 = 0$ (т.е. при отсутствии термодиффузии) их вид упрощается.

Выведем необходимый ниже набор следствий из уравнений (1)–(3). Применение операции $\langle \cdot \rangle$ к уравнению (1) (т.е. суммирование по $\alpha = \overline{1, K}$) с учетом свойства $\langle \mathbf{d}_\alpha \rangle = 0$ приводит к важному *уравнению баланса суммарной массы*

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \big[\rho (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) \big] = 0. \tag{12}$$

Нередко уравнения (1) заменяют на такое уравнение плюс уравнения для $K - 1$ концентраций

$$\partial_t (\rho C_\alpha) + \operatorname{div} \big[\rho C_\alpha (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) + \mathbf{d}_\alpha \big] = 0, \quad \alpha = \overline{1, K-1},$$

в том числе так сделано в [15, 16, 17], но ниже это не используется. Последние уравнения в силу (12) можно также переписать в недивергентном виде

$$\rho \partial_t C_\alpha + \rho \nabla C_\alpha \cdot (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) + \operatorname{div} \mathbf{d}_\alpha = 0. \tag{13}$$

Уравнение баланса импульса (2) скалярно умножим на $\mathbf{u}$, воспользуемся однотипными формулами

$$[\partial_t (\rho \mathbf{u})] \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \partial_t (\rho |\mathbf{u}|^2) + \frac{1}{2} (\partial_t \rho) |\mathbf{u}|^2,$$

$$\operatorname{div} \big[\rho (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) \otimes \mathbf{u} \big] \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \operatorname{div} \big[\rho (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) |\mathbf{u}|^2 \big] + \frac{1}{2} \big\{ \operatorname{div} \big[\rho (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) \big] \big\} |\mathbf{u}|^2$$

и уравнением баланса суммарной массы (12) и получим *уравнение баланса кинетической энергии*

$$\frac{1}{2}\partial_t(\rho|\mathbf{u}|^2) + \frac{1}{2}\operatorname{div}\big[\rho(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})|\mathbf{u}|^2\big] + (\nabla p)\cdot\mathbf{u} = (\operatorname{div}\Pi)\cdot\mathbf{u} + \rho\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}.$$

Вычтем его из уравнения баланса суммарной полной энергии (3), воспользуемся формулами

$$\operatorname{div}(p\mathbf{u}) = (\nabla p)\cdot\mathbf{u} + p\operatorname{div}\mathbf{u}, \quad \operatorname{div}(\Pi\mathbf{u}) = (\operatorname{div}\Pi)\cdot\mathbf{u} + \Pi : \nabla\mathbf{u}$$

и получим *уравнение баланса суммарной внутренней энергии*

$$\partial_t(\rho\varepsilon) + \operatorname{div}\big[\rho\varepsilon(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\big] + p\operatorname{div}\mathbf{u} - \operatorname{div}(p\widehat{\mathbf{w}}) = \operatorname{div}(-\mathbf{q}) + \Pi : \nabla\mathbf{u} - \rho\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{f} + Q, \tag{14}$$

где символ : обозначает скалярное произведение тензоров. Уравнения типа (12)–(14) в несколько иных ситуациях хорошо известны; здесь полный вывод дан для полноты и удобства читателя.

Продифференцируем первые два слагаемые слева в уравнении баланса импульса (2) и получим

$$(\partial_t\rho)\mathbf{u} + \rho\partial_t\mathbf{u} + \operatorname{div}\big[\rho(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\big]\mathbf{u} + \rho[(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{u} + \nabla p =$$
$$= \operatorname{div}\Pi^{NS} + (\operatorname{div}\mathbf{u})\rho\widehat{\mathbf{w}} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\widehat{\mathbf{w}}) + \rho\mathbf{f}.$$

В силу уравнения баланса суммарной массы (12) после деления на ρ выведем уравнение баланса скорости

$$\partial_t\mathbf{u} + [(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla]\mathbf{u} + \frac{1}{\rho}\nabla p = \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\Pi^{NS} + (\operatorname{div}\mathbf{u})\widehat{\mathbf{w}} + \frac{1}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\nabla)(\rho\widehat{\mathbf{w}}) + \mathbf{f}. \tag{15}$$

Обратимся к уравнению (14). Поскольку $\rho\varepsilon = \langle c_{V\alpha}\rho_\alpha\rangle\theta$, то верны однотипные формулы

$$\partial_t(\rho\varepsilon) = \langle c_{V\alpha}\partial_t\rho_\alpha\rangle\theta + \langle\rho_\alpha c_{V\alpha}\rangle\partial_t\theta,$$
$$\operatorname{div}\big[\rho\varepsilon(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\big] = \langle c_{V\alpha}\operatorname{div}\big[\rho_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\big]\rangle\theta + \langle\rho_\alpha c_{V\alpha}\rangle(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla\theta.$$

Воспользуемся уравнением баланса массы компоненты (1) и после деления на $\langle\rho_\alpha c_{V\alpha}\rangle = c_V\rho$ выведем уравнение баланса температуры

$$\partial_t\theta + (\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\cdot\nabla\theta + \frac{R}{c_V}\theta\operatorname{div}\mathbf{u} =$$
$$= \frac{1}{c_V\rho}\big[\langle c_{V\alpha}\operatorname{div}\mathbf{d}_\alpha\rangle\theta + \operatorname{div}(-\mathbf{q} + p\widehat{\mathbf{w}}) + \Pi : \nabla\mathbf{u} - \rho\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{f} + Q\big]. \tag{16}$$

2. Уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии. Введем суммарную удельную энтропию $s := \langle C_\alpha s_\alpha\rangle$ и выведем уравнение баланса суммарной энтропии ρs. Пусть $a_0 > 0$ в (7).

Теорема 1. *Для КГидД системы уравнений справедливо уравнение баланса суммарной энтропии с неотрицательным производством энтропии*

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}\Big[\rho s(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}}) - \frac{1}{\theta}\varkappa\nabla\theta + \frac{1}{K}\langle b_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle\Big] = \frac{1}{\theta^2}\varkappa|\nabla\theta|^2 +$$
$$+ \frac{1}{\theta}\Big[\frac{\mu}{2}|\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T|^2 + \Big(\lambda - \frac{2}{3}\mu\Big)(\operatorname{div}\mathbf{u})^2\Big] + \frac{1}{Ka_0\theta}\big\langle|\mathbf{d}_\alpha|^2\big\rangle + \frac{\rho}{\tau\theta}|\widehat{\mathbf{w}}|^2 + \frac{Q}{\theta} \geqslant 0. \tag{17}$$

Доказательство. Рассмотрим и преобразуем в силу уравнения баланса массы компоненты (1) и определения s_α (9), с последующей записью слагаемых в дивергентном виде, следующую величину:

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}\big[\rho s(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}}) + \langle s_\alpha \mathbf{d}_\alpha\rangle\big] = \big\langle \partial_t(\rho_\alpha s_\alpha) + \operatorname{div}[\rho_\alpha s_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}}) + s_\alpha \mathbf{d}_\alpha]\big\rangle =$$

$$= \big\langle \big\{\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}}) + \mathbf{d}_\alpha]\big\}s_\alpha\big\rangle + \big\langle \rho_\alpha[\partial_t s_\alpha + \nabla s_\alpha\cdot(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})] + \nabla s_\alpha\cdot\mathbf{d}_\alpha\big\rangle =$$

$$= \Big\langle -R_\alpha\big[\partial_t\rho_\alpha + \nabla\rho_\alpha\cdot(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\big] + \frac{1}{\theta}\big[\rho_\alpha\partial_t\varepsilon_\alpha + \rho_\alpha\nabla\varepsilon_\alpha\cdot(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\big]\Big\rangle + \langle\nabla s_\alpha\cdot\mathbf{d}_\alpha\rangle =$$

$$= \Big\langle -R_\alpha\big\{\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})] - \rho_\alpha\operatorname{div}(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\big\}+$$

$$+\frac{1}{\theta}\big\{\big[\partial_t(\rho_\alpha\varepsilon_\alpha) + \operatorname{div}[\rho_\alpha\varepsilon_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})] - \varepsilon_\alpha\big[\partial_t\rho_\alpha + \operatorname{div}[\rho_\alpha(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})]\big]\big\}\Big\rangle + \langle\nabla s_\alpha\cdot\mathbf{d}_\alpha\rangle.$$

Далее воспользуемся формулой $\rho\varepsilon = \langle\rho_\alpha\varepsilon_\alpha\rangle$ и уравнениями баланса массы компоненты (1) и суммарной внутренней энергии (14) и получим

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}\big[\rho s(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}}) + \langle s_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle\big] = \big\langle (R_\alpha + c_{V\alpha})\operatorname{div}\mathbf{d}_\alpha + R_\alpha\rho_\alpha\operatorname{div}(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}})\big\rangle+$$

$$+\frac{1}{\theta}\big[-p\operatorname{div}\mathbf{u} + \operatorname{div}(p\widehat{\mathbf{w}}) + \operatorname{div}(-\mathbf{q}) + \Pi:\nabla\mathbf{u} - \rho\widehat{\mathbf{w}}\cdot\mathbf{f} + Q\big] + \langle\nabla s_\alpha\cdot\mathbf{d}_\alpha\rangle.$$

Поскольку верны формулы

$$(R_\alpha + c_{V\alpha}) - s_\alpha = \frac{G_\alpha}{\theta},\ \langle R_\alpha\rho_\alpha\rangle = \frac{p}{\theta},\ \operatorname{div}(p\widehat{\mathbf{w}}) = \nabla p\cdot\widehat{\mathbf{w}} + p\operatorname{div}\widehat{\mathbf{w}},\ \Pi^\tau:\nabla\mathbf{u} = \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}\cdot\widehat{\mathbf{w}},$$

$$\frac{1}{\theta}\operatorname{div}(-\mathbf{q}) = \operatorname{div}\Big(-\frac{1}{\theta}\mathbf{q}\Big) + \frac{1}{\theta^2}\nabla\theta\cdot(-\mathbf{q}^F - \mathbf{q}^d),\quad \nabla s_\alpha = -\nabla\Big(\frac{1}{\theta}G_\alpha\Big),$$

то

$$\partial_t(\rho s) + \operatorname{div}\Big[\rho s(\mathbf{u}-\widehat{\mathbf{w}}) - \frac{1}{\theta}\langle G_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle\Big] = \frac{1}{\theta}\big[\nabla p + \rho(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} - \rho\mathbf{f}\big]\cdot\widehat{\mathbf{w}}+$$

$$+\frac{1}{\theta}(\Pi^{NS}:\nabla\mathbf{u} + Q) - \operatorname{div}\frac{\mathbf{q}}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\nabla\theta\cdot(-\mathbf{q}^F)-$$

$$-\frac{1}{\theta^2}\nabla\theta\cdot\big\langle\big(G_\alpha + K^{-1}b_\alpha\theta\big)\mathbf{d}_\alpha\big\rangle + \frac{1}{\theta^2}\nabla\theta\cdot\langle G_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle - \frac{1}{\theta}\langle\nabla G_\alpha\cdot\mathbf{d}_\alpha\rangle.$$

Последние три слагаемых правой части с учетом свойства $\langle\mathbf{d}_\alpha\rangle = 0$ можно записать как

$$-\frac{1}{K\theta}\big\langle\big[\nabla(KG_\alpha) + b_\alpha\nabla\theta\big]\cdot\mathbf{d}_\alpha\big\rangle = -\frac{1}{K\theta}\big\langle\big[\nabla(KG_\alpha - G) + b_\alpha\nabla\theta\big]\cdot\mathbf{d}_\alpha\big\rangle = \frac{1}{Ka_0\theta}\big\langle|\mathbf{d}_\alpha|^2\big\rangle.$$

Кроме того, $\mathbf{q} - \langle G_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle = -\varkappa\nabla\theta + K^{-1}\theta\langle b_\alpha\mathbf{d}_\alpha\rangle$, и уравнение (17) выведено.

Обратим внимание на то, что уравнение баланса энтропии (17) сохраняет силу, во-первых, при $\mathbf{d}_\alpha = 0$, $\alpha = \overline{1,K}$ (если угодно, при $a_0 = 0$; при $K = 2$ такой результат указан в конце раздела 2 в [14]), во-вторых, при $\tau = 0$ — в этих более простых случаях нужно просто отбросить слагаемые соответственно с $\mathbf{d}_\alpha$ и $\widehat{\mathbf{w}}$ в его левой и правой частях.

3. Разложение КГидД системы уравнений относительно градиента искомых функций. Изучаемые ниже свойства связаны с диссипативными свойствами КГидД слагаемых. Подобные свойства при наличии потоков диффузии отсутствуют даже при $\tau = 0$, поэтому ниже полагаем, что $\mathbf{d}_\alpha = 0$, $\alpha = \overline{1, K}$. Обратим сначала внимание на то, что в этом случае умножение уравнений баланса массы компоненты (1) на R_α и $c_{V\alpha}$ и суммирование по $\alpha = \overline{1, K}$ в силу (5) приводит к следующим одинаковым уравнениям для R и c_V:

$$\partial_t(\rho R) + \operatorname{div}\big[\rho R(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})\big] = 0, \quad \partial_t(\rho c_V) + \operatorname{div}\big[\rho c_V(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}})\big] = 0. \tag{18}$$

Поскольку в выражения для $\widehat{\mathbf{w}}$, p, ε и поэтому в уравнения баланса импульса (2) и полной энергии (3) входят именно суммарные величины ρ, R и c_V (а не сами ρ_α, см. (4)), то уравнения (12), (18) вместе с (2), (3) образуют замкнутую систему уравнений для искомых функций $\rho > 0$, $R > 0$, $c_V > 0$, $\mathbf{u}$, $\theta > 0$, количество которых не зависит от K (и при $K > 3$ меньше исходного). Это обстоятельство можно применить в том числе при построении численных методов решения исходной КГидД системы уравнений; ниже в статье оно не используется. Отметим также, что в силу уравнения баланса суммарной массы (12) уравнения для R и c_V можно переписать в недивергентном виде

$$\partial_t R + \nabla R \cdot (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) = 0, \quad \partial_t c_V + \nabla c_V \cdot (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) = 0.$$

Пусть ниже $\mathbf{f} = 0$, $Q = 0$. Введем вектор искомых функций $\mathbf{z} = (\rho_1, \ldots, \rho_K, \mathbf{u}, \theta)$ и выполним вспомогательную редукцию уравнений (1), (15) и (16) с точностью $O(|\nabla \mathbf{z}|^2)$.

Перепишем уравнение баланса массы компоненты (1) в виде

$$\partial_t \rho_\alpha + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u}) = \operatorname{div}(\rho_\alpha \widehat{\mathbf{w}}), \quad \alpha = \overline{1, K},$$

и разложим его правую часть:

$$\operatorname{div}(\rho_\alpha \widehat{\mathbf{w}}) = \rho_\alpha \operatorname{div} \widehat{\mathbf{w}} + O(|\nabla \mathbf{z}|^2),$$

$$\operatorname{div} \widehat{\mathbf{w}} = \tau\Big[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \nabla(\langle R_\alpha \rho_\alpha \rangle \theta)\Big] + O(|\nabla \mathbf{z}|^2) =$$

$$= \tau\Big[\frac{\theta}{\rho}\langle R_\alpha \Delta \rho_\alpha \rangle + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{u} + R \Delta \theta\Big] + O(|\nabla \mathbf{z}|^2). \tag{19}$$

Разложим слагаемые правой части уравнения (15):

$$\operatorname{div} \Pi^{NS} = \mu \operatorname{div}\big(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T\big) + \Big(\lambda - \frac{2}{3}\mu\Big) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + O(|\nabla \mathbf{z}|^2) =$$

$$= \mu \Delta \mathbf{u} + \Big(\frac{1}{3}\mu + \lambda\Big) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + O(|\nabla \mathbf{z}|^2),$$

$$\frac{1}{\rho}(\mathbf{u} \cdot \nabla)(\rho \widehat{\mathbf{w}}) = \tau(\mathbf{u} \cdot \nabla)\Big[(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p\Big] + O(|\nabla \mathbf{z}|^2) =$$

$$= \tau\Big[(\mathbf{u} \cdot \nabla)(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \frac{\theta}{\rho}(\mathbf{u} \cdot \nabla)\langle R_\alpha \nabla \rho_\alpha \rangle + R(\mathbf{u} \cdot \nabla)\nabla \theta\Big] + O(|\nabla \mathbf{z}|^2).$$

Разложим слагаемые правой части уравнения (16):

$$\operatorname{div}(-\mathbf{q}) = \varkappa \Delta \theta + O(|\nabla \mathbf{z}|^2), \quad \operatorname{div}(p \widehat{\mathbf{w}}) = p \operatorname{div} \widehat{\mathbf{w}} + O(|\nabla \mathbf{z}|^2),$$

далее см. (19).

Подставим все полученные разложения в правые части соответствующих уравнений, учтем, что

$$|\widehat{\mathbf{w}} \cdot \nabla \mathbf{u}| + |(\operatorname{div} \mathbf{u}) \rho \widehat{\mathbf{w}}| + |\widehat{\mathbf{w}} \cdot \nabla \theta| + |\Pi : \nabla \mathbf{u}| = O(|\nabla \mathbf{z}|^2)$$

и $p = R\rho\theta$ и выведем редуцированную систему уравнений с производной ∂_t отдельно для каждой из искомых функций

$$\partial_t\rho_\alpha + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho_\alpha + \rho_\alpha\operatorname{div}\mathbf{u} =$$

$$= \tau\Big[\frac{\rho_\alpha\theta}{\rho}\langle R_\beta\Delta\rho_\beta\rangle + \rho_\alpha(\mathbf{u}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{u} + R\rho_\alpha\Delta\theta\Big] + O(|\nabla\mathbf{z}|^2),\quad \alpha=\overline{1,K}, \tag{20}$$

$$\partial_t\mathbf{u} + \frac{\theta}{\rho}\langle R_\alpha\nabla\rho_\alpha\rangle + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + R\nabla\theta = \tau\frac{\theta}{\rho}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\langle R_\alpha\nabla\rho_\alpha\rangle +$$

$$+\frac{\mu}{\rho}\Delta\mathbf{u} + \frac{\chi}{\rho}\nabla\operatorname{div}\mathbf{u} + \tau(\mathbf{u}\cdot\nabla)(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \tau R(\mathbf{u}\cdot\nabla)\nabla\theta + O(|\nabla\mathbf{z}|^2), \tag{21}$$

$$\partial_t\theta + \frac{R}{c_V}\theta\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta =$$

$$= \tau\frac{R\theta^2}{c_V\rho}\langle R_\alpha\Delta\rho_\alpha\rangle + \tau\frac{R\theta}{c_V}(\mathbf{u}\cdot\nabla)\operatorname{div}\mathbf{u} + \Big(\tau\frac{R^2\theta}{c_V} + \frac{\varkappa}{c_V\rho}\Big)\Delta\theta + O(|\nabla\mathbf{z}|^2), \tag{22}$$

где $\chi := \frac{1}{3}\mu + \lambda$. Выражения типа $\langle R_\beta\Delta\rho_\beta\rangle$ означают суммирование по $\beta = \overline{1,K}$.

Ниже полученная редуцированная система уравнений служит очень удобной основой как для линеаризации исходной КГидД системы, так и при анализе ее параболичности.

4. Линеаризованная на постоянном решении КГидД система уравнений и ее L^2-диссипативность. При $\mathbf{f} = 0$, $Q = 0$ система уравнений (1)–(3) имеет постоянные решения $(\rho_1,\dots,\rho_K,\mathbf{u},\theta)(x,t) \equiv \mathbf{z}_0 = (\rho_{10},\dots,\rho_{K0},\mathbf{u}_0,\theta_0)$, где $\rho_{10} > 0,\dots,\rho_{K0} > 0, \theta_0 > 0$. Линеаризуем систему на таком фоновом решении. Для этого запишем решение в виде

$$\rho_\alpha = \rho_{\alpha0} + \rho_{\alpha*}\widetilde{\rho}_\alpha \ \ (\alpha = \overline{1,K}),\quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + u_*\widetilde{\mathbf{u}},\quad \theta = \theta_0 + \theta_*\widetilde{\theta}, \tag{23}$$

где $\rho_{\alpha*} > 0$, $u_* > 0$, $\theta_* > 0$ — нормировочные обезразмеривающие параметры, а $\widetilde{\mathbf{z}} := (\widetilde{\boldsymbol{\rho}},\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\theta})$ с $\widetilde{\boldsymbol{\rho}} := (\widetilde{\rho}_1,\dots,\widetilde{\rho}_K)$ — вектор безразмерных возмущений. В дальнейшем важно, что множители $\rho_{\alpha*}$ могут быть выбраны не равными фоновым значениям $\rho_{\alpha0}$ в отличие от [8, 9, 10].

Введем нормированное фоновое решение, а также фоновые значения суммарной плотности и коэфициентов R и c_V:

$$\widehat{\rho}_{\alpha0} := \frac{\rho_{\alpha0}}{\rho_{\alpha*}},\quad \widehat{\mathbf{u}}_0 := \frac{\mathbf{u}_0}{u_*},\quad \widehat{\theta}_0 := \frac{\theta_0}{\theta_*},\quad \rho_0 := \langle\rho_{\alpha0}\rangle,\quad R_0 := \Big\langle\frac{\rho_{\alpha0}}{\rho_0}R_\alpha\Big\rangle,\quad c_{V0} := \Big\langle\frac{\rho_{\alpha0}}{\rho_0}c_{V\alpha}\Big\rangle.$$

В отличие от [8, 9, 10] решение в форме (23) подставим не в исходную КГидД систему или систему уравнений (1), (15), (16), а в редуцированную систему (20)–(22). Поскольку $\partial_k\mathbf{z} = (\rho_{1*}\partial_k\widetilde{\rho}_1,\dots,\rho_{K*}\partial_k\widetilde{\rho}_K, u_*\partial_k\widetilde{\mathbf{u}},\theta_*\partial_k\widetilde{\theta})$, $k = \overline{1,n}$ и $O(|\nabla\mathbf{z}|^2) = O(|\nabla\widetilde{\mathbf{z}}|^2)$, то после отбрасывания членов 2-го порядка малости относительно вектора $\widetilde{\mathbf{z}}$ и его производных 1-го и 2-го порядка и деления уравнений соответственно на $\rho_{\alpha*}$, u_*, θ_*, довольно просто получим линеаризованную систему уравнений

$$\partial_t\widetilde{\rho}_\alpha + u_*\big(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\rho}_\alpha + \widehat{\rho}_{\alpha0}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\big) =$$

$$= \tau_0 u_*^2\Big[\frac{\widehat{\rho}_{\alpha0}\theta_0}{\rho_0 u_*^2}\langle R_\beta\rho_{\beta*}\Delta\widetilde{\rho}_\beta\rangle + \widehat{\rho}_{\alpha0}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \frac{R_0\widehat{\rho}_{\alpha0}\theta_*}{u_*^2}\Delta\widetilde{\theta}\Big],\quad \alpha = \overline{1,K}, \tag{24}$$

$$\partial_t\widetilde{\mathbf{u}} + u_*\Big(\frac{\theta_0}{\rho_0u_*^2}\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + \frac{R_0\theta_*}{u_*^2}\nabla\widetilde{\theta}\Big) = u_*^2\Big[\tau_0\frac{\theta_0}{\rho_0u_*^2}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle +$$

$$+\frac{\mu_0}{\rho_0u_*^2}\Delta\widetilde{\mathbf{u}} + \frac{\chi_0}{\rho_0u_*^2}\nabla\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0\frac{R_0\theta_*}{u_*^2}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\nabla\widetilde{\theta}\Big], \tag{25}$$

$$\partial_t\widetilde{\theta} + u_*\Big(\frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\theta}\Big) =$$
$$= u_*^2\Big[\tau_0\frac{R_0\theta_0^2}{c_{V0}\rho_0 u_*^2\theta_*}\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\Delta\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + \tau_0\frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \big(\tau_0\frac{R_0^2\theta_0}{c_{V0}u_*^2} + \frac{\varkappa_0}{c_{V0}\rho_0 u_*^2}\big)\Delta\widetilde{\theta}\Big]. \qquad (26)$$

Здесь τ_0, μ_0, χ_0, $\varkappa_0$ — фоновые значения τ, μ, χ, $\varkappa$, т.е. их значения на фоновом решении, и из конвективных слагаемых (т.е. с первыми производными по x) вынесен общий множитель u_*, а из диссипативных слагаемых (т.е. со вторыми производными) — множитель u_*^2.

Для упрощения анализа полученной системы уравнений очень существенна возможность одновременной симметризации как конвективных, так и диссипативных слагаемых. Симметричность конвективных слагаемых достигается наложением условий

$$\widehat{\rho}_{\alpha0} = \frac{\theta_0}{\rho_0 u_*^2}R_\alpha\rho_{\alpha*} \;\Leftrightarrow\; \frac{u_*^2}{\rho_{\alpha*}^2} = \frac{R_\alpha\theta_0}{\rho_{\alpha0}\rho_0},\; \alpha = \overline{1,K}, \quad \frac{R_0\theta_*}{u_*^2} = \frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*} \;\Leftrightarrow\; \frac{\theta_*^2}{u_*^2} = \frac{\theta_0}{c_{V0}}. \qquad (27)$$

Симметричность диссипативных слагаемых имеет место при выполнении условий

$$\widehat{\rho}_{\alpha0} = \frac{\theta_0}{\rho_0 u_*^2}R_\alpha\rho_{\alpha*}, \quad \frac{R_0\widehat{\rho}_{\alpha0}\theta_*}{u_*^2} = \frac{R_0\theta_0^2}{c_{V0}\rho_0 u_*^2\theta_*}R_\alpha\rho_{\alpha*}, \quad \frac{R_0\theta_*}{u_*^2} = \frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*}.$$

Первое и третье из них совпадают с условиями (27), а второе следует из условий (27), что обеспечивает одновременную симметризацию конвективных и диссипативных слагаемых.

Отметим, что при $\rho_{\alpha*} = \rho_{\alpha0}$ условиям (27) можно удовлетворить только в очень частном случае, когда $p_{\alpha0} = R_\alpha\rho_{\alpha0}\theta_0$ не зависит от α. С другой стороны, условия (27) фактически содержат свободный параметр (выбором которого будет удобно распорядиться ниже): им удовлетворяет выбор

$$\rho_{\alpha*} = b\sqrt{\frac{\rho_{\alpha0}c_{V0}\rho_0}{R_\alpha}}, \quad \alpha = \overline{1,K}, \quad u_* = b\sqrt{c_{V0}\theta_0}, \quad \theta_* = b\theta_0 \quad \forall b > 0. \qquad (28)$$

Пусть ниже условия (27) выполнены. Тогда вид коэффициентов линеаризованной системы уравнений (24)–(26) существенно упрощается:

$$\partial_t\widetilde{\rho}_\alpha + u_*\big(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\rho}_\alpha + \widehat{\rho}_{\alpha0}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\big) =$$
$$= \tau_0 u_*^2\big[\widehat{\rho}_{\alpha0}\langle\widehat{\rho}_{\beta0}\Delta\widetilde{\rho}_\beta\rangle + \widehat{\rho}_{\alpha0}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + a\widehat{\rho}_{\alpha0}\Delta\widetilde{\theta}\big], \quad \alpha = \overline{1,K}, \qquad (29)$$
$$\partial_t\widetilde{\mathbf{u}} + u_*\big(\langle\widehat{\rho}_{\alpha0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}\big) =$$
$$= u_*^2\big[\tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\langle\widehat{\rho}_{\alpha0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + \bar{\mu}_0\Delta\widetilde{\mathbf{u}} + \bar{\chi}_0\nabla\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0 a(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\nabla\widetilde{\theta}\big], \quad (30)$$
$$\partial_t\widetilde{\theta} + u_*\big(a\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\theta}\big) = u_*^2\big[\tau_0 a\langle\widehat{\rho}_{\alpha0}\Delta\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + \tau_0 a(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + (\tau_0 a^2 + \bar{\varkappa}_0)\Delta\widetilde{\theta}\big], \quad (31)$$

где введены обозначения

$$a := \frac{R_0\theta_*}{u_*^2}, \quad \bar{\mu}_0 := \frac{\mu_0}{\rho_0 u_*^2}, \quad \bar{\chi}_0 := \frac{\chi_0}{\rho_0 u_*^2}, \quad \bar{\varkappa}_0 := \frac{\varkappa_0}{c_{V0}\rho_0 u_*^2}. \qquad (32)$$

Вид правых частей уравнений (24)–(26) и (29)–(31) наводит на мысль о том, что можно вывести замкнутую симметричную систему уравнений для функций $\tilde{r} := \langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\widetilde{\rho}_\alpha\rangle/(R_0\rho_0)$, $\widetilde{\mathbf{u}}$, $\widetilde{\theta}$. Чтобы это реализовать, применим операцию $\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}(\cdot)\rangle/(R_0\rho_0)$ к уравнению (24) и в силу равенств $\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\widehat{\rho}_{\alpha0}\rangle = \langle R_\alpha\rho_{\alpha0}\rangle = R_0\rho_0$ получим уравнение

$$\partial_t\tilde{r} + u_*\big(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\tilde{r} + \operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\big) = \tau_0 u_*^2\Big[\frac{R_0\theta_0}{u_*^2}\Delta\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \frac{R_0\theta_*}{u_*^2}\Delta\widetilde{\theta}\Big]. \qquad (33)$$

Симметризуем систему из этого уравнения и уравнений (25), (26) с $\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle = R_0\rho_0\nabla\tilde{r}$ и $\langle R_\alpha\rho_{\alpha*}\Delta\widetilde{\rho}_\alpha\rangle = R_0\rho_0\Delta\tilde{r}$. Симметричность конвективных слагаемых обеспечивается выполнением условий

$$1 = \frac{R_0\theta_0}{u_*^2} \;\Leftrightarrow\; u_* = \sqrt{R_0\theta_0}, \quad \frac{R_0\theta_*}{u_*^2} = \frac{R_0\theta_0}{c_{V0}\theta_*} \;\Leftrightarrow\; \theta_* = \sqrt{\frac{\theta_0}{c_{V0}}}u_* = \theta_0\sqrt{\frac{R_0}{c_{V0}}}. \tag{34}$$

Симметричность диссипативных слагаемых обеспечивается выполнением тех же условий и условия $R_0\theta_*/u_*^2 = R_0^2\theta_0^2/\big(c_{V0}u_*^2\theta_*\big)$, которое следует из предыдущих. Таким образом, при указанном в (34) выборе u_* и θ_* приходим к следующей упрощенной системе уравнений

$$\partial_t\tilde{r} + u_*\big(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\tilde{r} + \operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\big) = \tau_0 u_*^2\big[\Delta\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \bar{a}\Delta\widetilde{\theta}\,\big], \tag{35}$$

$$\partial_t\widetilde{\mathbf{u}} + u_*\big(\nabla\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + \bar{a}\nabla\widetilde{\theta}\,\big) =$$

$$= u_*^2\big[\tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\nabla\tilde{r} + \bar{\mu}_0\Delta\widetilde{\mathbf{u}} + \bar{\chi}_0\nabla\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0\bar{a}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\nabla\widetilde{\theta}\,\big], \tag{36}$$

$$\partial_t\widetilde{\theta} + u_*\big(\bar{a}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\theta}\,\big) = u_*^2\big[\tau_0\bar{a}\Delta\tilde{r} + \tau_0\bar{a}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \big(\tau_0\bar{a}^2 + \bar{\varkappa}_0\big)\Delta\widetilde{\theta}\,\big], \tag{37}$$

где $\bar{a} := \sqrt{R_0/c_{V0}}$ и для $\bar{\mu}_0$, $\bar{\chi}_0$, $\bar{\varkappa}_0$ использованы прежние обозначения (32) с $u_* = \sqrt{R_0\theta_0}$.

Если функции $\tilde{r}$, $\widetilde{\mathbf{u}}$, $\widetilde{\theta}$ найдены, то в силу (29) для $\widetilde{\rho}_\alpha$ получается простейшее неоднородное уравнение переноса

$$\partial_t\widetilde{\rho}_\alpha + u_*\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\rho}_\alpha = g_\alpha := -\widehat{\rho}_{\alpha0}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0 u_*^2\big[\widehat{\rho}_{\alpha0}\Delta\tilde{r} + \widehat{\rho}_{\alpha0}(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + a\widehat{\rho}_{\alpha0}\Delta\widetilde{\theta}\,\big] \tag{38}$$

для $\alpha = \overline{1,K}$, поскольку можно считать, что $u_* = \sqrt{R_0\theta_0}$ в (28). Оно допускает решение в явном виде.

Для анализа задачи Коши для системы (29), (30), (31) умножим ее уравнения на соответствующие компоненты «произвольной» вектор-функции $\mathbf{z} = (\rho_1,\ldots,\rho_n,\mathbf{u},\theta)(x)$ (ее не следует путать с решением КГидД системы, которое выше обозначалось аналогично) и проинтегрируем по $\mathbb{R}^n$. Результаты сложим, проинтегрируем по частям и получим интегральное тождество

$$(\partial_t\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t),\mathbf{z})_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)} + u_*\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t),\mathbf{z}) + u_*^2\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t),\mathbf{z}) = 0, \quad t > 0. \tag{39}$$

В нем участвуют скалярное произведение в пространстве Лебега вектор-функций $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ и формы

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) :=$$

$$:= \langle\big(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\rho}_\alpha + \widehat{\rho}_{\alpha0}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}},\rho_\alpha\big)\rangle + \big(\langle\widehat{\rho}_{\alpha0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta},\mathbf{u}\big) + \big(a\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\theta},\theta\big),$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) := \bar{\mu}_0\big(\nabla\widetilde{\mathbf{u}},\nabla\mathbf{u}\big) + \bar{\chi}_0\big(\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}},\operatorname{div}\mathbf{u}\big) + \bar{\varkappa}_0\big(\nabla\widetilde{\theta},\nabla\theta\big) +$$

$$+\tau_0\Big[\big(\langle\widehat{\rho}_{\alpha0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle,\langle\widehat{\rho}_{\alpha0}\nabla\rho_\alpha\rangle\big) + \big((\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}},\langle\widehat{\rho}_{\alpha0}\nabla\rho_\alpha\rangle\big) + \big(a\nabla\widetilde{\theta},\langle\widehat{\rho}_{\alpha0}\nabla\rho_\alpha\rangle\big) +$$

$$+\big(\langle\widehat{\rho}_{\alpha0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle,(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\big) + \big((\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}},(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\big) + \big(a\nabla\widetilde{\theta},(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\big) +$$

$$+\big(\langle\widehat{\rho}_{\alpha0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle,a\nabla\theta\big) + \big((\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}},a\nabla\theta\big) + \big(a\nabla\widetilde{\theta},a\nabla\theta\big)\Big].$$

Здесь уже для краткости $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ или $L^2(\mathbb{R}^n)$ (тензоры $\nabla\widetilde{\mathbf{u}},\nabla\mathbf{u}$ рассматриваем как векторы длины n^2). Эти формулы годятся для пространств как вещественных, так и комплекснозначных функций $\widetilde{\mathbf{z}}$, $\mathbf{z}$; в первом случае обе формы являются билинейными, а во втором — полуторалинейными.

Ниже ограничимся вещественным случаем в отличие от [8, 9]. Тогда с помощью интегрирования по частям можно записать

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) = \big(\widehat{\mathbf{u}}_0, \langle(\nabla\widetilde{\rho}_\alpha)\rho_\alpha\rangle + (\nabla\widetilde{\mathbf{u}})\mathbf{u} + (\nabla\widetilde{\theta})\theta\big) -$$
$$-\big(\widetilde{\mathbf{u}}, \langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle\big) + \big(\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle, \mathbf{u}\big) - a\big(\widetilde{\theta}, \operatorname{div}\mathbf{u}\big) + a(\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}, \theta),$$

и поскольку $(\nabla w)w = 0.5\nabla(w^2)$, $(\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} = 0.5\nabla(|\mathbf{u}|^2)$ и $\widehat{\mathbf{u}}_0 = \mathrm{const}$, то получим

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z},\mathbf{z}) = 0, \quad \mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}},\mathbf{z}) = \mathcal{A}(\mathbf{z},\widetilde{\mathbf{z}}) \quad \forall \mathbf{z},\widetilde{\mathbf{z}} \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n), \tag{40}$$

где $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$ — пространство Соболева вектор-функций $\mathbf{z} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, имеющих обобщенные по Соболеву производные $\partial_i\mathbf{z} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$, $i = \overline{1,n}$. Далее, для любой $\mathbf{z} \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$ непосредственно выводим

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z},\mathbf{z}) = \bar{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2 + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\theta\|^2 +$$
$$+\tau_0\big[\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle\|^2 + \|(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\|^2 + \|a\nabla\theta\|^2 +$$
$$+2\big((\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}, \langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle\big) + 2\big(a\nabla\theta, \langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle\big) + 2\big(a\nabla\theta, (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\big)\big] =$$
$$= \bar{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|^2 + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|^2 + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\theta\|^2 + \tau_0\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u} + a\nabla\theta\|^2 \geqslant 0. \tag{41}$$

Здесь для краткости $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$ или $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Таким образом, билинейная форма $\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\widetilde{\mathbf{z}},\mathbf{z})$ — симметричная и неотрицательно определенная. Однако в отличие от однокомпонентного случая она не является положительно определенной, поскольку

$$\mathcal{A}_{\mathbb{R}^n}(\mathbf{z},\mathbf{z}) = \tau_0\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle\|^2 \ \text{ при } \ \mathbf{u} = \mathrm{const}, \ \theta = \mathrm{const},$$

а $\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\rho_\alpha\rangle \equiv 0$ означает только то, что $\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\rho_\alpha\rangle \equiv \mathrm{const}$. (Для $\mathbf{z} \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$ все три const равны 0). Это обстоятельство является прямым следствием использования общей регуляризующей скорости $\widehat{\mathbf{w}}$ (точнее, суммарного давления p) в уравнениях (1).

Пусть $\mathbf{W}(S_T)$ — пространство вектор-функций $\widetilde{\mathbf{z}} \in L^2((0,T);\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n))$, имеющих обобщенную производную $\partial_t\widetilde{\mathbf{z}} \in L^2((0,T);\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n))$, где $S_T = \mathbb{R}^n \times (0,T)$ — слой и $\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n) = (\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n))^*$, см., например, [20]. Введем *слабое решение* $\widetilde{\mathbf{z}} \in \mathbf{W}(S_T)$ задачи Коши для системы уравнений (29)–(31), удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int_0^T \big\langle\partial_t\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t),\mathbf{z}\big\rangle_{\mathbb{R}^n}\,dt + u_*\mathcal{B}_{S_T}(\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t),\mathbf{z}) + u_*^2\mathcal{A}_{S_T}(\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t),\mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{L}^2((0,T);\mathbf{H}_0^1(\Omega)) \tag{42}$$

для всех $T > 0$ и начальному условию $\widetilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \widetilde{\mathbf{z}}^{(0)} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$. Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$ — отношение двойственности на $\mathbf{H}^{-1}(\mathbb{R}^n) \times \mathbf{H}_0^1(\mathbb{R}^n)$, а в используемых билинейных формах скалярные произведения берутся по S_T вместо $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Для решения $\widetilde{\mathbf{z}} \in \mathbf{W}(S_T)$ ($T > 0$ — любое) линеаризованной системы уравнений* (29)–(31) *верно энергетическое (в математическом смысле слова) равенство*

$$0.5\|\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)} + \bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{\mathbf{L}^2(S_t)} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(S_t)} + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\mathbf{L}^2(S_t)} +$$
$$+\tau_0\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\mathbf{L}^2(S_t)} = 0.5\|\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)} \tag{43}$$

при всех $t \geqslant 0$. Как следствие, функция $\|\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)}$ не возрастает при $t \geqslant 0$ (это свойство $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$-диссипативности), введенное решение единственно и верна энергетическая оценка

$$\max\big\{0.5\sup_{t\geqslant 0}\|\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)},\ \big[\bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{\mathbf{L}^2(S)} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(S)} + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\mathbf{L}^2(S)} +$$

$$+\tau_0\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big]^{1/2}\big\} \leqslant 0.5\|\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{44}$$

где $S := \mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$.

Доказательство. Взятие $\mathbf{z} = \widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t)$ в тождестве (42) и применение первого свойства (40) и свойства (41) приводят к указанному энергетическому равенству (с t в роли T). При этом свойство $\mathbf{z}\in C([0,T];\mathbf{L}^2(R^n))$ и формула

$$\int_0^T \big\langle \partial_t\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t),\mathbf{z}\big\rangle_{\mathbb{R}^n}\,dt = 0.5\|\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,T)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)} - 0.5\|\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)}$$

при всех $T>0$ вытекают из [20, гл. IV, теорема 1.17 и замечание 1.22]. Свойство $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)$-диссипативности очевидно (поскольку в (43) нормы по S_t не убывают по $t\geqslant 0$), а энергетическая оценка легко вытекает стандартным образом. Единственность решения следует из (43) или (44).

Следствие 1. *В силу энергетических равенства (43) и оценки (44) существует $\partial_t\big(\|\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)}\big)\in L^1(0,+\infty)$ и верна другая форма энергетического равенства*

$$0.5\partial_t\big(\|\widetilde{\mathbf{z}}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)}\big) + \bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)} +$$

$$+\tau_0\|\langle\widehat{\rho}_{\alpha 0}\nabla\widetilde{\rho}_\alpha\rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^n)} = 0$$

при почти всех $t>0$, которая формально получается из тождества (39) при $\mathbf{z} = \widetilde{\mathbf{z}}(\cdot,t)$.

Замечание 1. *Поскольку коэффициенты системы уравнений (29)–(31) постоянны, то производные $\partial_t\widetilde{\mathbf{z}} = (\partial_t\widetilde{\boldsymbol{\rho}},\partial_t\widetilde{\mathbf{u}},\partial_t\widetilde{\theta})$ и $\partial_i\widetilde{\mathbf{z}} = (\partial_i\widetilde{\boldsymbol{\rho}},\partial_i\widetilde{\mathbf{u}},\partial_i\widetilde{\theta})$, $i=\overline{1,n}$ удовлетворяют той же системе уравнений. Поэтому априорная оценка (44) сохраняет силу при замене $\widetilde{\mathbf{z}}$ на $\partial_t\widetilde{\mathbf{z}}$ и $\partial_i\widetilde{\mathbf{z}}$ (на самом деле, и на производную $\widetilde{\mathbf{z}}$ любого порядка по $t,x_1,\ldots,x_n$). Такие следствия априорной оценки позволяют вывести существование введенного выше обобщенного решения системы при надлежащих условиях регулярности $\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}$. Оно также следует из указанной выше связи данной системы уравнений с системой (35)–(37), анализ которой более стандартен (см. ниже). Здесь подробнее на этом останавливаться не будем.*

5. L^2-диссипативность упрощенной линеаризованной КГидД системы уравнений. Выполним анализ начально-краевой задачи для упрощенной системы уравнений (35)–(37). Для этого введем вектор-функции $\tilde{\mathbf{y}} := (\tilde{r},\widetilde{\mathbf{u}},\widetilde{\theta})$ и $\mathbf{y} := (r,\mathbf{u},\theta)$ и формы, аналогичные определенным выше

$$\tilde{\mathcal{B}}_\Omega(\widetilde{\mathbf{y}},\mathbf{y}) := \big(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\tilde{r} + \widehat{\rho}_{\alpha 0}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}},r\big)_\Omega + \big(\nabla\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + \bar{a}\nabla\widetilde{\theta},\mathbf{u}\big)_\Omega + \big(\bar{a}\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla\widetilde{\theta},\theta\big)_\Omega,$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_\Omega(\widetilde{\mathbf{y}},\mathbf{y}) := \bar{\mu}_0\big(\nabla\widetilde{\mathbf{u}},\nabla\mathbf{u}\big)_\Omega + \bar{\chi}_0\big(\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}},\operatorname{div}\mathbf{u}\big)_\Omega + \bar{\varkappa}_0\big(\nabla\widetilde{\theta},\nabla\theta\big)_\Omega +$$

$$+\tau_0\big[\big(\nabla\tilde{r},\nabla r\big)_\Omega + \big((\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}},\nabla r\big)_\Omega + \big(\bar{a}\nabla\widetilde{\theta},\nabla r\big)_\Omega +$$

$$+\big(\nabla\tilde{r},(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\big)_\Omega + \big((\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}},(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\big)_\Omega + \big(\bar{a}\nabla\widetilde{\theta},(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\big)_\Omega +$$

$$+\big(\nabla\tilde{r},\bar{a}\nabla\theta\big)_\Omega + \big((\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}},\bar{a}\nabla\theta\big)_\Omega + \big(\bar{a}\nabla\widetilde{\theta},\bar{a}\nabla\theta\big)_\Omega\big].$$

Здесь для краткости $(\cdot,\cdot)_\Omega$ — скалярное произведение в $\mathbf{L}^2(\Omega)$ или $L^2(\Omega)$, а Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Снова эти формулы годятся для пространств как вещественных, так и комплекснозначных функций $\widetilde{\mathbf{y}}$, $\mathbf{y}$; в первом случае обе формы являются билинейными, а во втором — полуторалинейными.

Ниже ограничимся вещественным случаем. Тогда снова имеем

$$\tilde{\mathcal{B}}_\Omega(\mathbf{y},\mathbf{y})=0,\quad \tilde{\mathcal{A}}_\Omega(\widetilde{\mathbf{y}},\mathbf{y})=\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{y},\widetilde{\mathbf{y}})\ \ \forall \mathbf{y},\widetilde{\mathbf{y}}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega), \tag{45}$$

где $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ — пространство Соболева вектор-функций $\mathbf{y}\in\mathbf{L}^2(\Omega)$ с $\partial_i\mathbf{y}\in\mathbf{L}^2(\Omega)$, $i=\overline{1,n}$ и таких, что $\mathbf{y}|_{\partial\Omega}=0$ (напомним, что для общей области Ω на самом деле это пространство строится как замыкание в норме $\mathbf{H}^1(\Omega)$ пространства бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций). Далее, для любой $\mathbf{y}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ непосредственно имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{A}}_\Omega(\mathbf{y},\mathbf{y})&=\bar{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|_\Omega^2+\bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_\Omega^2+\bar{\varkappa}_0\|\nabla\theta\|_\Omega^2+\tau_0\big[\|\nabla r\|_\Omega^2+\|(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\|_\Omega^2+\|\bar{a}\nabla\theta\|_\Omega^2+\\&+2\big((\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u},\nabla r\big)_\Omega+2\big(\bar{a}\nabla\theta,\nabla r\big)_\Omega+2\big(\bar{a}\nabla\theta,(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}\big)_\Omega\big]=\\&=\bar{\mu}_0\|\nabla\mathbf{u}\|_\Omega^2+\bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\mathbf{u}\|_\Omega^2+\bar{\varkappa}_0\|\nabla\theta\|_\Omega^2+\tau_0\|\nabla r+(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}+\bar{a}\nabla\theta\|_\Omega^2\geqslant 0,\end{aligned}\tag{46}$$

где для краткости $\|\cdot\|_\Omega$ — норма в $\mathbf{L}^2(\Omega)$ или $L^2(\Omega)$. Поскольку

$$\|\nabla r\|_\Omega\leqslant|\widehat{\mathbf{u}}_0|\|\nabla\mathbf{u}\|_\Omega+\bar{a}\|\nabla\theta\|_\Omega+\|\nabla r+(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}+\bar{a}\nabla\theta\|_\Omega,$$

то билинейная форма $\tilde{\mathcal{A}}_\Omega(\widetilde{\mathbf{y}},\mathbf{y})$ является уже не только симметричной, но и положительно определенной для $\widetilde{\mathbf{y}},\mathbf{y}\in\mathbf{H}_0^1(\Omega)$.

Пусть $\mathbf{W}(Q_T)$ — пространство вектор-функций $\widetilde{\mathbf{y}}\in L^2((0,T);\mathbf{H}_0^1(\Omega))$, имеющих обобщенную производную $\partial_t\widetilde{\mathbf{y}}\in L^2((0,T);\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$, где $Q_T=\Omega\times(0,T)$ — цилиндр и $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)=(\mathbf{H}_0^1(\Omega))^*$. Введем *слабое решение* $\widetilde{\mathbf{y}}\in\mathbf{W}(Q_T)$ начально-краевой задачи для системы уравнений (35)–(37) при краевом условии $\widetilde{\mathbf{y}}|_{\partial\Omega\times(0,T)}=0$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int_0^T\big\langle\partial_t\widetilde{\mathbf{y}}(\cdot,t),\mathbf{y}\big\rangle_\Omega\,dt+u_*\tilde{\mathcal{B}}_{Q_T}(\widetilde{\mathbf{y}}(\cdot,t),\mathbf{y})+u_*^2\tilde{\mathcal{A}}_{Q_T}(\widetilde{\mathbf{y}}(\cdot,t),\mathbf{y})=0\ \ \forall\mathbf{y}\in\mathbf{L}^2((0,T);\mathbf{H}_0^1(\Omega))\tag{47}$$

для всех $T>0$ и начальному условию $\widetilde{\mathbf{y}}|_{t=0}=\widetilde{\mathbf{y}}^{(0)}\in\mathbf{L}^2(\Omega)$. Здесь $\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$ — отношение двойственности на $\mathbf{H}^{-1}(\Omega)\times\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, а в используемых билинейных формах скалярные произведения берутся по Q_T вместо Ω.

Следующая теорема аналогична теореме 2 (вместе с ее доказательством на основе определения (47) и свойств (45), (46), включая свойство $\mathbf{y}\in C([0,T];\mathbf{L}^2(\Omega))$ при всех $T>0$).

Теорема 3. *Для введенного слабого решения $\widetilde{\mathbf{y}}\in\mathbf{W}(Q_T)$ ($T>0$ — любое) линеаризованной системы уравнений (35)–(37) верно энергетическое равенство*

$$\begin{gathered}0.5\|\widetilde{\mathbf{y}}(\cdot,t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2+\bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(Q_t)}^2+\bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(Q_t)}^2+\bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|_{\mathbf{L}^2(Q_t)}^2+\\+\tau_0\|\nabla\tilde{r}+(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}}+a\nabla\widetilde{\theta}\|_{\mathbf{L}^2(Q_t)}^2=0.5\|\widetilde{\mathbf{y}}^{(0)}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2\end{gathered}$$

при всех $t\geqslant 0$. Как следствие, функция $\|\widetilde{\mathbf{y}}(\cdot,t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ не возрастает при $t\geqslant 0$ (это свойство $\mathbf{L}^2(\Omega)$-диссипативности), введенное решение единственно и верна энергетическая оценка

$$\begin{gathered}\max\Big\{0.5\sup_{t\geqslant 0}\|\widetilde{\mathbf{y}}(\cdot,t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)},\ \big[\bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2+\bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(Q)}^2+\bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2+\\+\tau_0\|\nabla\tilde{r}+(\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}}+a\nabla\widetilde{\theta}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2\big]^{1/2}\Big\}\leqslant 0.5\|\widetilde{\mathbf{y}}^{(0)}\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)},\end{gathered}$$

где $Q:=\Omega\times(0,+\infty)$.

Справедлив также аналог следствия 1: верны свойство $\partial_t\big(\|\widetilde{\mathbf{y}}(\cdot,t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\big) \in L^1(0,+\infty)$ и другая форма энергетического равенства

$$0.5\partial_t\big(\|\widetilde{\mathbf{y}}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}\big) + \bar{\mu}_0\|\nabla\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \bar{\chi}_0\|\operatorname{div}\widetilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(\Omega)} + \bar{\varkappa}_0\|\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} +$$
$$+\tau_0\|\nabla\tilde{r} + (\widehat{\mathbf{u}}_0\cdot\nabla)\widetilde{\mathbf{u}} + a\nabla\widetilde{\theta}\|^2_{\mathbf{L}^2(Q_t)} = 0$$

при почти всех $t>0$. В силу него $\|\widetilde{\mathbf{y}}(\cdot,t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ экспоненциально быстро убывает по $t \geqslant 0$.

Отметим, что введенное слабое решение не только единственно, но и существует, что можно обосновать в соответствии с [20]. Его регулярность можно изучить стандартными методами теории параболических уравнений [21]. Кроме того, последняя теорема автоматически переносится с начально-краевой задачи на задачу Коши.

6. Анализ параболичности исходной КГидД системы уравнений гомогенной газовой смеси. Анализ параболичности по Петровскому КГД и КГидД систем уравнений в однокомпонентном случае был выполнен в [8, 9, 10]. Чтобы выполнить его для системы (1)–(3), в редуцированной системе (20)–(22) следует отбросить конвективные слагаемые в левых частях и остаточные члены $O(|\nabla\mathbf{z}|^2)$ в правых частях уравнений. В полученной упрощенной однородной системе уравнений, содержащей только производные ∂_t и $\partial_i\partial_j$, следует «заморозить» зависящие от решения $\mathbf{z}$ коэффициенты перед $\partial_i\partial_j$ и выполнить преобразование Фурье по x:

$$\mathcal{F}\mathbf{z}(\zeta,t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{z}(x,t)e^{-\mathrm{i}x\cdot\zeta}\,d\zeta,\quad \zeta\in\mathbb{R}^n,$$

где i — мнимая единица. «Замороженные» коэффициенты будем брать в некоторой точке $\mathbf{z}_0 = (\rho_{10},\ldots,\rho_{K0},\mathbf{u}_0,\theta_0)$, уже бравшейся выше как фоновое решение. Это приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\partial_t\mathcal{F}\mathbf{z}(\zeta,t) + |\zeta|^2A_0(\xi)\mathcal{F}\mathbf{z}(\zeta,t) = 0,\quad t>0 \tag{48}$$

с параметром $\zeta\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ и вещественной матрицей $A_0(\xi)$ порядка $K+n+1$ с $\xi=\zeta/|\zeta|$.

Свойства параболичности определяются в терминах собственных значений $\lambda[A_0(\xi)]$ введенной матрицы. Как и в [8, 9, 10], под *неравномерной параболичностью* в некоторой подобласти $\mathcal{D}\subset(0,+\infty)^K\times\mathbb{R}^n\times(0,+\infty)$ области значений решения удобно понимать свойство

$$\inf_{|\xi|=1}\operatorname{Re}\lambda[A_0(\xi)] > 0\ \ \forall\mathbf{z}_0\in\mathcal{D}, \tag{49}$$

где $\operatorname{Re}\lambda$ — вещественная часть λ.

Выполним замену $\mathbf{z} = D\widetilde{\mathbf{z}}$ с диагональной матрицей $D := \operatorname{diag}\{\rho_{1*},\ldots,\rho_{n*},u_*,\theta_*\}$ с элементами, удовлетворяющими условиям (27). Тогда $\mathcal{F}\mathbf{z} = D\mathcal{F}\,\widetilde{\mathbf{z}}$ и после умножения системы (48) слева на D^{-1} приходим к эквивалентной системе

$$\partial_t\mathcal{F}\,\widetilde{\mathbf{z}}(\zeta,t) + |\zeta|^2\hat{A}_0(\xi)\mathcal{F}\,\widetilde{\mathbf{z}}(\zeta,t) = 0,\quad t>0$$

с матрицей $\hat{A}_0(\xi) = D^{-1}A_0(\xi)D$, подобной матрице $A_0(\xi)$.

Нетрудно видеть, что матрица $\hat{A}_0(\xi)$ напрямую возникает в результате применения преобразования Фурье не к редуцированной системе (20)–(22) как выше, а к правой части симметризованной линеаризованной системы (29)–(31). Поэтому $\hat{A}_0(\xi) = [\hat{A}_0(\xi)]^T$, а

$\lambda[\hat{A}_0(\xi)] = \lambda[A_0(\xi)]$ вещественны и (с учетом непрерывности $\hat{A}_0(\xi)$ по ξ) условие (49) принимает вид

$$\lambda[\hat{A}_0(\xi)] > 0 \ \ \forall \xi : |\xi| = 1, \ \ \mathbf{z}_0 \in \mathcal{D}. \tag{50}$$

Явный 3×3-блочный вид матрицы $\hat{A}_0(\xi)$ следующий:

$$\hat{A}_0(\xi) = u_*^2 \begin{pmatrix} \tau_0 \widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 \otimes \widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 & \tau_0 s \widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 \otimes \xi & \tau_0 a \widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 \\ \tau_0 s \xi \otimes \widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 & (\bar{\mu}_0 + \tau_0 s^2) I_n + \bar{\chi}_0 \xi \xi^T & \tau_0 a s \xi \\ \tau_0 a \widehat{\boldsymbol{\rho}}_0^T & \tau_0 a s \xi^T & \bar{\varkappa}_0 + \tau_0 a^2 \end{pmatrix},$$

где $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 := (\widehat{\rho}_1, \ldots, \widehat{\rho}_K)^T$, $s = s(\xi) := \widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \xi$, вектор ξ считаем столбцом, I_n — единичная матрица порядка n. Сразу ясно, что блок $\tau_0 \widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 \otimes \widehat{\boldsymbol{\rho}}_0$ порядка K имеет ранг всего 1. При этом квадратичная форма с матрицей $\hat{A}_0(\xi)$ имеет вид

$$\begin{gathered} \hat{A}_0(\xi)\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \tau_0 (\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 \cdot \mathbf{r})^2 + 2\tau_0 s (\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 \cdot \mathbf{r})(\xi \cdot \mathbf{v}) + 2\tau_0 a (\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 \cdot \mathbf{r}) q + \\ + (\bar{\mu}_0 + \tau_0 s^2)|\mathbf{v}|^2 + \bar{\chi}_0 (\xi \cdot \mathbf{v})^2 + 2\tau_0 a s (\xi \cdot \mathbf{v}) q + (\bar{\varkappa}_0 + \tau_0 a^2) q^2 = \\ = \bar{\mu}_0 |\mathbf{v}|^2 + \bar{\chi}_0 (\xi \cdot \mathbf{v})^2 + \bar{\varkappa}_0 q^2 + \tau_0 \big[s^2 (|\mathbf{v}|^2 - (\xi \cdot \mathbf{v})^2) + (\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 \cdot \mathbf{r} + s \xi \cdot \mathbf{v} + a q)^2 \big] \geqslant 0, \end{gathered} \tag{51}$$

для любого вектора $\mathbf{b} := (\mathbf{r}, \mathbf{v}, q)^T$ с $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^K$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Отметим, что выражение в квадратных скобках можно также записать в виде $\tau_0 |(\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 \cdot \mathbf{r}) \xi + s \mathbf{v} + a q \xi|^2$.

Формула (51), особенно с указанной альтернативной записью выражения в квадратных скобках, является прямым матричным аналогом для (41). Из нее следует, что вместо (50) выполнено только более слабое свойство

$$\lambda[\hat{A}_0(\xi)] \geqslant 0 \ \ \forall |\xi| = 1, \ \ \mathbf{z}_0 \in \mathcal{D},$$

причем собственное значение $\lambda[\hat{A}_0(\xi)] = 0$ имеет кратность $K-1$, поскольку $\hat{A}_0(\xi)\mathbf{y} \cdot \mathbf{y} = 0$ означает, что $\mathbf{v} = 0$, $q = 0$, $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_0 \cdot \mathbf{r} = 0$. Таким образом, происходит вырождение размерности $K-1$ свойства неравномерной параболичности в $\mathcal{D}$. Поэтому для исходной КГидД системы нельзя дать столь элементарное доказательство локальной классической корректности задачи Коши как в [8].

Уравнения баланса массы компонент (1) при $\mathbf{d}_\alpha = 0$ после приведения к недивергентному виду в силу уравнения баланса суммарной массы (12) и деления на ρ_α можно переписать в виде

$$\partial_t \ln \rho_\alpha + \nabla \ln \rho_\alpha \cdot (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) + \operatorname{div}(\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) = 0. \tag{52}$$

Как следствие, при всех $\alpha, \beta = \overline{1, K}$ имеем

$$\partial_t \ln \frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta} + \nabla \ln \frac{\rho_\alpha}{\rho_\beta} \cdot (\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{w}}) = 0. \tag{53}$$

Это дифференциальные уравнения *первого* порядка (они вытекают также из (13)). Все K уравнений (1) можно эквивалентным образом заменить на одно из них (или одно из уравнений (52)) с фиксированным $\alpha = \beta$ и $K-1$ уравнений (53) с остальными $\alpha \neq \beta$. Отсюда ясно, что КГидД система уравнений (1)–(3) (при $\mathbf{d}_\alpha = 0$) является системой уравнений *составного типа*. Это существенно для корректной постановки краевых условий для плотностей компонент (или их концентраций) в начально-краевых задачах.

Таким образом, КГидД система уравнений (1)–(3) гомогенной смеси в отсутствие потоков диффузии имеет составной тип, как и система уравнений Навье-Стокса сжимаемого однокомпонентного газа. В противоположность этому система уравнений Эйлера однокомпонентной газовой динамики имеет гиперболический тип, а КГидД система уравнений однокомпонентного газа — параболический тип. Вместе с тем для всех этих систем, включая КГидД систему (1)–(3) при наличии потоков диффузии, справедливы уравнения баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 19-01-00262.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика, изд. 3-е. М.: Наука, 1986.
2. *Р.И. Нигматулин.* Динамика многофазных сред. Ч. 1. М.: Наука, 1987.
3. *Н.Н. Пилюгин, Г.А. Тирский.* Динамика ионизированного излучающего газа. М.: Изд-во Московского ун-та, 1989.
4. *V. Giovangigli.* Multicomponent flow modeling. Boston, Birkhäuser, 1999.
5. *Б.Н. Четверушкин.* Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
6. *Т.Г. Елизарова.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
7. *Ю.В. Шеретов.* Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
8. *А.А. Злотник, Б.Н. Четверушкин.* О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической 2-го порядка модификации и устойчивости малых возмущений для них // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
9. *А.А. Злотник.* О параболичности квазигидродинамической системы уравнений и устойчивости малых возмущений для нее // Матем. заметки. 2008. Т. 83. №5. С. 667–682.
10. *А.А. Злотник.* Квазигазодинамическая система уравнений с общими уравнениями состояния // Докл. АН. 2010. Т. 431. № 5. С. 605-609.
11. *А.А. Злотник.* Линеаризованная устойчивость равновесных решений квазигазодинамической системы уравнений // Докл. АН. 2010. Т. 433. № 6. С. 599-603.
12. *Т.Г. Елизарова, А.А. Злотник, Б.Н. Четверушкин.* О квазигазо- и гидродинамических уравнениях бинарных смесей газов // Докл. РАН. 2014. Т. 459. № 4. С. 395–399.
13. *В.А. Балашов, Е.Б. Савенков.* Многокомпонентная квазигидродинамическая модель для описания течений многофазной жидкости с учетом межфазного взаимодействия // Прикл. мех. техн. физ. 2018. Т. 59. № 3. С. 57–68.
14. *Т.Г. Елизарова, А.А. Злотник, Е.В. Шильников.* Регуляризованные уравнения для численного моделирования течений гомогенных бинарных смесей вязких сжимаемых газов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т. 59. № 11. С. 1899–1914.
15. *V. Balashov, A. Zlotnik, E. Savenkov.* Analysis of a regularized model for the isothermal two-component mixture with the diffuse interface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. 2017. Vol. 32. No. 6. P. 347–358.

16. *V. Balashov, A. Zlotnik.* An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier-Stokes-Cahn-Hilliard equations // J. Comput. Dynamics. 2020. V. 7. № 2. P. 291–312.
17. *V. Balashov, A. Zlotnik.* On a new spatial discretization for a regularized 3D compressible isothermal Navier–Stokes–Cahn–Hilliard system of equations with boundary conditions // J. Sci. Comput. 2021. V. 86. Article 33.
18. *Т.Г. Елизарова, Е.В. Шильников.* Численное моделирование газовых смесей в рамках квазигазодинамического подхода на примере взаимодействия ударной волны с пузырьком газа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2021. Т. 61. № 1. С. 124–135.
19. *И.А. Квасников.* Термодинамика и статистическая физика. Т. 1. Теория равновесных систем: Термодинамика, изд. 2-е М.: Едиториал УРСС, 2002.
20. *Х. Гаевский, К. Грегер, К. Захариас.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
21. *О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

НИУ Высшая школа экономики, г. Москва,
Институт прикладной математики
им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Поступила в редакцию
? .03.2021 г.

ON PROPERTIES OF A QUASI-HYDRODYNAMIC SYSTEM OF EQUATIONS FOR A HOMOGENEOUS GAS MIXTURE WITH A COMMON REGULARIZING VELOCITY

A.A. Zlotnik, A.S. Fedchenko

We study a quasi-hydrodynamic system of equations for a homogeneous (with common velocity and temperature) multicomponent gas mixture in the absence of chemical reactions, with a common regularizing velocity. We derive the entropy balance equation with a non-negative entropy production taking into account the diffusion fluxes of the mixture components. In the absence of diffusion fluxes, a system of equations linearized at a constant solution is constructed by a new technique, it is reduced to a symmetric form, and the L^2-dissipativity of its solutions is proved, as well as the degeneration (with respect to the densities of the mixture components) of the parabolicity property of the original system is established. Actually, the system has the composite type. The obtained properties strictly reflect its physical correctness and dissipative nature of the quasi-hydrodynamic regularization.