

СВОЙСТВА АГРЕГИРОВАННОЙ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГОМОГЕННОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

© А. А. Злотник^{1,2,*}, А.С. Федченко^{1,**}

Поступило .05.2021 г.

¹ Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, Москва, Россия

² Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*E-mail: azlotnik@hse.ru

**E-mail: asfedchenko@yandex.ru

Для агрегированной квазигазодинамической системы уравнений гомогенной газовой смеси получено уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии при наличии потоков диффузии, выведены существование, единственность и L^2 -диссипативность слабых решений начально-краевой задачи для системы, линеаризованной на постоянном решении, и сильная параболичность и локальная по времени классическая однозначная разрешимость задачи Коши для самой квазигазодинамической системы.

Ключевые слова: квазигазодинамическая система уравнений, гомогенная газовая смесь, уравнение баланса энтропии, сильная параболичность, L^2 -диссипативность.

Уравнения движения смесей вязкого сжимаемого газа даны, в частности, в [1, 2]. Регуляризованные, или квазигазодинамические (КГД), системы уравнений однокомпонентного газа представлены в [3, 4, 5]. Их математические свойства, близкие рассматриваемым ниже, выведены в [5, 6, 7, 8]. КГД системы уравнений бинарных смесей газов, в том числе гомогенных (с общей скоростью и температурой компонент), рассмотрены в [4, 9, 10].

В этом сообщении изучается агрегированная КГД система уравнений гомогенной многокомпонентной газовой смеси в отсутствие химических реакций. Для нее приводится уравнение баланса энтропии с неотрицательным производством энтропии при наличии потоков диффузии между компонентами. Устанавливаются также существование, единственность и L^2 -диссипативность слабых решений начально-краевой задачи для системы, линеаризованной на постоянном решении, и сильная параболичность (на компактных множествах значений искомым функций) и локальная по времени классическая однозначная разрешимость задачи Коши для самой КГД системы.

Указанная КГД система уравнений состоит из следующих уравнений баланса массы компонент, суммарного импульса и суммарной полной энергии

$$\partial_t \rho_\alpha + \operatorname{div} [\rho_\alpha (\mathbf{u} - \mathbf{w}_\alpha) + \mathbf{d}_\alpha] = 0, \quad \alpha = \overline{1, K}, \quad (1)$$

$$\partial_t (\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div} [\rho (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \otimes \mathbf{u}] + \nabla p = \operatorname{div} \Pi + [\rho - \tau \operatorname{div} (\rho \mathbf{u})] \mathbf{f}, \quad (2)$$

$$\partial_t E + \operatorname{div} \left[\frac{1}{2} \rho |\mathbf{u}|^2 (\mathbf{u} - \mathbf{w}) + \langle \rho_\alpha h_\alpha (\mathbf{u} - \mathbf{w}_\alpha) \rangle \right] = \operatorname{div} (-\mathbf{q} + \Pi \mathbf{u}) + \rho (\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{f} + Q. \quad (3)$$

В ней основные искомые функции $\rho_1 > 0, \dots, \rho_K > 0$ — плотности компонент смеси, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$, $\theta > 0$ — общие скорость и абсолютная температура смеси, зависящие от $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $t \geq 0$, где $K \geq 2$ и $n = 1, 2, 3$. Операторы div и $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$ берутся по x , а $\partial_t = \partial/\partial t$, $\partial_i = \partial/\partial x_i$. Символы \otimes и \cdot обозначают тензорное и скалярное произведения векторов, а div от тензора берется по его первому индексу.

Компоненты смеси — совершенные политропные газы с уравнениями состояния

$$p_\alpha = (\gamma_\alpha - 1)\rho_\alpha \varepsilon_\alpha = R_\alpha \rho_\alpha \theta, \quad \varepsilon_\alpha = c_{V\alpha} \theta, \quad \alpha = \overline{1, K},$$

где p_α и ε_α — давление и удельная внутренняя энергия компоненты α , с постоянными $\gamma_\alpha > 1$, $R_\alpha > 0$ и $c_{V\alpha} > 0$. Кроме того, $h_\alpha = \varepsilon_\alpha + (p_\alpha/\rho_\alpha) = c_{p\alpha} \theta$ — удельная энтальпия компоненты α , а $c_{V\alpha}$ и $c_{p\alpha} = c_{V\alpha} + R_\alpha$ — ее удельные теплоемкости.

Суммарные плотность, давление, удельная внутренняя энергия и полная энергия смеси задаются формулами

$$\rho = \langle \rho_\alpha \rangle := \rho_1 + \dots + \rho_K, \quad p = \langle p_\alpha \rangle = R\rho\theta, \quad \varepsilon = \langle c_\alpha \varepsilon_\alpha \rangle = c_V \theta, \quad E = \frac{1}{2}\rho|\mathbf{u}|^2 + \rho\varepsilon,$$

с функциями $R := \langle c_\alpha R_\alpha \rangle$, $c_V := \langle c_\alpha c_{V\alpha} \rangle$ (а не постоянными как в однокомпонентном случае) и $c_\alpha := \frac{\rho_\alpha}{\rho}$ — массовыми концентрациями компонент смеси. В уравнениях используются регуляризующие скорости компоненты α и суммарные скорости вида

$$\mathbf{w}_\alpha = \frac{\tau}{\rho_\alpha} [\operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p_\alpha - \rho_\alpha \mathbf{f}], \quad \widehat{\mathbf{w}}_\alpha = \tau \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_\alpha} \nabla p_\alpha - \mathbf{f} \right], \quad (4)$$

$$\mathbf{w} := \langle c_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle = \frac{\tau}{\rho} [\operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \rho \mathbf{f}], \quad \widehat{\mathbf{w}} = \langle c_\alpha \widehat{\mathbf{w}}_\alpha \rangle = \tau \left[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{f} \right], \quad (5)$$

где $\tau = \tau(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta) > 0$ — параметр регуляризации, а $\boldsymbol{\rho} := (\rho_1, \dots, \rho_K)$.

Тензор вязкости имеет вид $\Pi = \Pi^{NS} + \Pi^\tau$, а поток тепла — вид $\mathbf{q} = \mathbf{q}^F + \mathbf{q}^d + \mathbf{q}^\tau$. Здесь тензор вязкости Навье-Стокса и поток тепла Фурье задаются стандартными формулами

$$\Pi^{NS} = \mu [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T - \frac{2}{3}(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbb{I}] + \lambda(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbb{I}, \quad -\mathbf{q}^F = \varkappa \nabla \theta,$$

где $\mu > 0$, $\lambda \geq 0$ и $\varkappa > 0$ — суммарные коэффициенты динамической и объемной вязкости и теплопроводности (они могут зависеть от $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta)$), $\nabla \mathbf{u} = \{\partial_i u_j\}_{i,j=1}^n$, \mathbb{I} — единичный тензор порядка n . Регуляризующие тензор вязкости и поток тепла задаются формулами

$$\Pi^\tau = \rho \mathbf{u} \otimes \widehat{\mathbf{w}} + \tau [\mathbf{u} \cdot \nabla p + \langle \gamma_\alpha p_\alpha \rangle \operatorname{div} \mathbf{u} - \langle (\gamma_\alpha - 1) Q_\alpha \rangle] \mathbb{I}, \quad (6)$$

$$-\mathbf{q}^\tau = \tau \{ [c_V \rho \nabla \theta - \theta \nabla(R\rho)] \cdot \mathbf{u} - \langle Q_\alpha \rangle \} \mathbf{u}. \quad (7)$$

Плотность массовой силы $\mathbf{f}(x, t)$ и мощности тепловых источников $Q_\alpha(x, t) \geq 0$ заданы.

Указанная модель является регуляризованной системой уравнений Навье-Стокса гомогенной смеси вязких теплопроводных сжимаемых газов. Случай регуляризованных уравнений Эйлера, когда физические коэффициенты вязкости и теплопроводности равны 0, охватывается посредством использования искусственных коэффициентов μ , λ , \varkappa , пропорциональных τ , см. [3, 4, 5]; ниже их конкретный вид несуществен. Для бинарной смеси ($K = 2$) при $\mathbf{d}_\alpha = 0$ и $\mathbf{q}^d = 0$ эти уравнения были выведены в [10] агрегированием по α КГД уравнений негомогенных смесей из [9].

Потоки диффузии и дополнительный поток тепла введем, как и в [11], формулами

$$-\mathbf{d}_\alpha := d_0 \left[\sum_{\beta: \beta \neq \alpha} \nabla(G_\alpha - G_\beta) + b_\alpha \nabla \theta \right] = d_0 (K \nabla \overline{G}_\alpha + b_\alpha \nabla \theta), \quad \alpha = \overline{1, K}, \quad (8)$$

$$\mathbf{q}^d = \langle (G_\alpha + K^{-1} b_\alpha \theta) \mathbf{d}_\alpha \rangle, \quad (9)$$

где $G_\alpha = \varepsilon_\alpha - s_\alpha \theta + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha} = (c_{p\alpha} - s_\alpha) \theta$ — потенциал Гиббса и $s_\alpha = s_{\alpha 0} - R_\alpha \ln \rho_\alpha + c_{V\alpha} \ln \theta$ — удельная энтропия компоненты α , с $s_{\alpha 0} = \text{const}$. Величины $d_0 \geq 0$ и b_α здесь не конкретизируются; существенно, что они могут зависеть от искомым функций и предполагается,

что $\langle b_\alpha \rangle = 0$. Здесь и ниже $\bar{\varphi}_\alpha := \varphi_\alpha - K^{-1}\langle \varphi_\alpha \rangle$; ясно, что $\langle \bar{\varphi}_\alpha \rangle = 0$. Важное свойство $\langle \mathbf{d}_\alpha \rangle = 0$ непосредственно следует из (8) и $\langle b_\alpha \rangle = 0$.

Замена $\tilde{b}_\alpha := b_\alpha - K\bar{s}_\alpha$ позволяет сделать введенные выражения для потоков (8) и (9) не зависящими явно от s_α :

$$-\mathbf{d}_\alpha = d_0 \left[\overline{\theta K R_\alpha \frac{1}{\rho_\alpha} \nabla \rho_\alpha} + (K\bar{R}_\alpha + \tilde{b}_\alpha) \nabla \theta \right], \quad \mathbf{q}^d = \langle (c_{p\alpha} + K^{-1}\tilde{b}_\alpha) \theta \mathbf{d}_\alpha \rangle, \quad (10)$$

поскольку $\langle \mathbf{d}_\alpha \rangle = 0$. Кроме того, так как $\rho_\alpha = \frac{c_\alpha p}{R\theta}$ и $R = \langle R_\alpha c_\alpha \rangle$, то верна также формула

$$-\mathbf{d}_\alpha = d_0 \left\{ \theta \left[\overline{K R_\alpha \frac{1}{c_\alpha} \nabla c_\alpha} - K\bar{R}_\alpha \frac{1}{R} \langle R_\alpha \nabla c_\alpha \rangle \right] + K\bar{R}_\alpha \frac{1}{R\rho} \nabla p + \tilde{b}_\alpha \nabla \theta \right\}. \quad (11)$$

При $K = 2$ формулы (8), (9) принимают вид, эквивалентный указанному в [1, гл. VI]

$$-\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = d_0 [\nabla(G_1 - G_2) + b_1 \nabla \theta], \quad \mathbf{q}^d = (G_1 - G_2 + b_1 \theta) \mathbf{d}_1,$$

а формулы (11), (10) преобразуются к более стандартному для бинарных смесей виду

$$-\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_2 = d_0 \left[\frac{R_1 R_2 \theta}{R c_1 (1 - c_1)} \nabla c_1 - \frac{R_1 - R_2}{R \rho} \nabla p + \tilde{b}_1 \nabla \theta \right], \quad \mathbf{q}^d = (c_{p1} - c_{p2} + \tilde{b}_1) \theta \mathbf{d}_1.$$

В частном случае $\tilde{b}_1 = 0$ (т.е. в отсутствие термодиффузии) их вид упрощается.

Из уравнений (1)-(3) следует важное уравнение баланса суммарной массы

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}[\rho(\mathbf{u} - \mathbf{w})] = 0.$$

Ниже важны также эквивалентные (2), (3) (с учетом (1)) уравнения баланса скорости

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + [(\mathbf{u} - \mathbf{w}) \cdot \nabla] \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{1}{\rho} \{ \operatorname{div} \Pi^{NS} + (\operatorname{div} \mathbf{u})(\rho \hat{\mathbf{w}} + \nabla \langle \tau \gamma_\alpha p_\alpha \rangle) + \\ + (\mathbf{u} \cdot \nabla)(\rho \hat{\mathbf{w}}) + \tau \langle \gamma_\alpha p_\alpha \rangle \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla [\tau \mathbf{u} \cdot \nabla p - \tau \langle (\gamma_\alpha - 1) Q_\alpha \rangle] \} + [1 - \frac{1}{\rho} \tau \operatorname{div}(\rho \mathbf{u})] \mathbf{f} \end{aligned} \quad (12)$$

и температуры

$$\begin{aligned} \partial_t \theta + \left(\mathbf{u} - \frac{\langle c_{V\alpha} \rho_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle}{c_V \rho} \right) \cdot \nabla \theta + \frac{R}{c_V} \theta \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{c_V \rho} [\langle c_{V\alpha} \operatorname{div} \mathbf{d}_\alpha \rangle \theta + \\ + \operatorname{div}(-\mathbf{q} + \langle p_\alpha \mathbf{w}_\alpha \rangle) + \Pi : \nabla \mathbf{u} - \rho \hat{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{f} + \langle Q_\alpha \rangle], \end{aligned} \quad (13)$$

где символ $:$ обозначает скалярное произведение тензоров.

Введем суммарную удельную энтропию $S := \langle c_\alpha s_\alpha \rangle$.

Т е о р е м а 1. Пусть $d_0 > 0$. Верно следующее регуляризованное уравнение баланса энтропии гомогенной многокомпонентной смеси при наличии потоков диффузии

$$\partial_t(\rho S) + \operatorname{div} \left[\langle \rho_\alpha s_\alpha (\mathbf{u} - \mathbf{w}_\alpha) \rangle + \frac{1}{K} \langle b_\alpha \mathbf{d}_\alpha \rangle + \frac{1}{\theta} (\mathbf{q}^F + \mathbf{q}^\tau) \right] = \mathcal{P}^{NS} + \langle \mathcal{P}_\alpha^\tau \rangle \quad (14)$$

с производством энтропии $\mathcal{P}^{NS} + \langle \mathcal{P}_\alpha^\tau \rangle$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^{NS} = \frac{1}{\theta} \left[\frac{\mu}{2} |\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T|^2 + \left(\lambda - \frac{2}{3} \mu \right) (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 \right] + \frac{1}{\theta^2} \varkappa |\nabla \theta|^2 + \frac{1}{K d_0 \theta} \langle |\mathbf{d}_\alpha|^2 \rangle \geq 0, \\ \mathcal{P}_\alpha^\tau = \frac{\rho_\alpha}{\tau \theta} |\hat{\mathbf{w}}_\alpha|^2 + \tau \frac{R_\alpha}{\rho_\alpha} [\operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{u})]^2 + \tau c_{V\alpha} \rho_\alpha \left[\mathbf{u} \cdot \nabla \ln \theta + (\gamma_\alpha - 1) \operatorname{div} \mathbf{u} - \frac{(\gamma_\alpha - 1) Q_\alpha}{2 p_\alpha} \right]^2 + \\ + \frac{Q_\alpha}{\theta} \left(1 - \frac{\tau(\gamma_\alpha - 1) Q_\alpha}{4 p_\alpha} \right), \end{aligned}$$

где $\mathcal{P}_\alpha^\tau \geq 0$ при условии $\tau(\gamma_\alpha - 1) Q_\alpha \leq 4 p_\alpha$, $\alpha = \overline{1, K}$.

Уравнение баланса энтропии (14) сохраняет силу при $\mathbf{d}_\alpha = 0$, $\alpha = \overline{1, K}$ (при $K = 2$ см. также [10]) и/или $\tau = 0$. В этих существенно более простых случаях следует отбросить слагаемые соответственно с \mathbf{d}_α и \mathbf{w}_α , \mathbf{q}^τ , \mathcal{P}_α^τ в его левой и правой частях.

Ниже полагаем, что $\mathbf{d}_\alpha = 0$ и (кроме теоремы 3) $\mathbf{f} = 0$, $Q_\alpha = 0$, $\alpha = \overline{1, K}$. Введем вектор искомых функций $\mathbf{z} = (\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta)$ и выполним вспомогательную редукцию уравнений (1), (12) и (13) с точностью $O(|\nabla \mathbf{z}|^2)$

$$\begin{aligned} & \partial_t \rho_\alpha + \nabla \rho_\alpha \cdot \mathbf{u} + \rho_\alpha \operatorname{div} \mathbf{u} = \\ & = \tau [R_\alpha \theta \Delta \rho_\alpha + [\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla] \rho_\alpha + 2\rho_\alpha (\mathbf{u} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{u} + R_\alpha \rho_\alpha \Delta \theta] + O(|\nabla \mathbf{z}|^2), \quad \alpha = \overline{1, K}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t \mathbf{u} + \frac{\theta}{\rho} \langle R_\alpha \nabla \rho_\alpha \rangle + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + R \nabla \theta = 2\tau \frac{\theta}{\rho} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \langle R_\alpha \nabla \rho_\alpha \rangle + \\ & + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{\chi}{\rho} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \tau \frac{\langle \gamma_\alpha p_\alpha \rangle}{\rho} \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} + \tau [\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla] \mathbf{u} + 2\tau R (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla \theta + O(|\nabla \mathbf{z}|^2), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t \theta + \frac{R}{c_V} \theta \operatorname{div} \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \theta = \tau \frac{\theta^2}{c_V \rho} \langle R_\alpha^2 \Delta \rho_\alpha \rangle + \\ & + 2\tau \frac{R\theta}{c_V} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \operatorname{div} \mathbf{u} + \tau [\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \nabla] \theta + \frac{\varkappa}{c_V \rho} \Delta \theta + \tau \frac{\langle R_\alpha p_\alpha \rangle}{c_V \rho} \Delta \theta + O(|\nabla \mathbf{z}|^2), \end{aligned} \quad (17)$$

где $\Delta = \operatorname{div} \nabla$ — оператор Лапласа, $\chi := \frac{1}{3}\mu + \lambda$. Эта система уравнений удобна ниже как для линеаризации исходной КГД системы, так и при анализе ее параболичности.

При $\mathbf{f} = 0$, $Q_1 = \dots, Q_K = 0$ КГД система уравнений (1)–(3) имеет постоянные решения $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta)(x, t) \equiv \mathbf{z}_0 = (\rho_{10}, \dots, \rho_{K0}, \mathbf{u}_0, \theta_0)$ с $\rho_{10} > 0, \dots, \rho_{K0} > 0, \theta_0 > 0$. Положим $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + D_* \tilde{\mathbf{z}}$, где $D_* := \operatorname{diag}\{\rho_{1*}, \dots, \rho_{K*}, u_*, \dots, u_*, \theta_*\}$ — диагональная матрица порядка $K + n + 1$ положительных безразмеривающих параметров, выбираемых ниже, а $\tilde{\mathbf{z}} := (\tilde{\boldsymbol{\rho}}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\theta})$ — вектор безразмерных возмущений, с $\tilde{\boldsymbol{\rho}} := (\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_K)$ и $\tilde{\mathbf{u}} := (\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$.

Линеаризуем КГД систему на таком фоновом решении \mathbf{z}_0 . Введем фоновые нормированное решение $(\hat{\rho}_{10}, \dots, \hat{\rho}_{K0}, \hat{\mathbf{u}}_0, \hat{\theta}_0) := D_*^{-1} \mathbf{z}_0$ с $\hat{\mathbf{u}}_0 = (\hat{u}_{10}, \dots, \hat{u}_{n0})$ и значения ρ , c_α , R и c_V , а также фоновые средние значения $R_\alpha \gamma_\alpha$ и R_α^2

$$\rho_0 := \langle \rho_{\alpha 0} \rangle, \quad c_{\alpha 0} := \frac{\rho_{\alpha 0}}{\rho_0}, \quad R_0 := \langle c_{\alpha 0} R_\alpha \rangle, \quad c_{V0} := \langle c_{\alpha 0} c_{V\alpha} \rangle, \quad (R\gamma)_0 = \langle c_{\alpha 0} R_\alpha \gamma_\alpha \rangle, \quad (R^2)_0 = \langle c_{\alpha 0} R_\alpha^2 \rangle.$$

Подставим решение в форме $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + D_* \tilde{\mathbf{z}}$ в редуцированную систему (15)–(17) и после отбрасывания членов 2-го порядка малости относительно вектор-функции $\tilde{\mathbf{z}}$ и ее производных 1-го и 2-го порядка легко получим линеаризованную систему уравнений

$$\begin{aligned} & \partial_t \tilde{\rho}_\alpha + u_* (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \tilde{\rho}_\alpha + \hat{\rho}_{\alpha 0} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}) = \\ & = \tau_0 u_*^2 \left[\frac{R_\alpha \theta_0}{u_*^2} \Delta \tilde{\rho}_\alpha + (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \tilde{\rho}_\alpha + 2\hat{\rho}_{\alpha 0} (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{R_\alpha \hat{\rho}_{\alpha 0} \theta_*}{u_*^2} \Delta \tilde{\theta} \right], \quad \alpha = \overline{1, K}, \\ & \partial_t \tilde{\mathbf{u}} + u_* \left(\frac{\theta_0}{\rho_0 u_*^2} \langle R_\alpha \rho_{\alpha*} \nabla \tilde{\rho}_\alpha \rangle + (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} + \frac{R_0 \theta_*}{u_*^2} \nabla \tilde{\theta} \right) = u_*^2 \left[2\tau_0 \frac{\theta_0}{\rho_0 u_*^2} (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \langle R_\alpha \rho_{\alpha*} \nabla \tilde{\rho}_\alpha \rangle + \right. \\ & \left. + \frac{\mu_0}{\rho_0 u_*^2} \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \left(\frac{\chi_0}{\rho_0 u_*^2} + \tau_0 \frac{(R\gamma)_0 \theta_0}{u_*^2} \right) \nabla \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} + \tau_0 (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \tilde{\mathbf{u}} + 2\tau_0 \frac{R_0 \theta_*}{u_*^2} (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \nabla \tilde{\theta} \right], \\ & \partial_t \tilde{\theta} + u_* \left(\frac{R_0 \hat{\theta}_0}{c_{V0}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \tilde{\theta} \right) = u_*^2 \left[\tau_0 \frac{\hat{\theta}_0^2 \theta_*}{c_{V0} \rho_0 u_*^2} \langle R_\alpha^2 \rho_{\alpha*} \Delta \tilde{\rho}_\alpha \rangle + \right. \end{aligned}$$

$$+2\tau_0 \frac{R_0 \widehat{\theta}_0}{c_{V0}} (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0 (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \widetilde{\theta} + \left(\tau_0 \frac{(R^2)_0 \theta_0}{c_{V0} u_*^2} + \frac{\varkappa_0}{c_{V0} \rho_0 u_*^2} \right) \Delta \widetilde{\theta} \Big].$$

Здесь $\tau_0, \mu_0, \chi_0, \varkappa_0$ — значения $\tau, \mu, \chi, \varkappa$ на фоновом решении. В полученных уравнениях возник оператор $(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 = (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)(\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) = \widehat{u}_{0i} \widehat{u}_{0j} \partial_i \partial_j$, где по индексам i, j предполагается суммирование от 1 до n .

В последней системе уравнений возможна одновременная симметризация как конвективных слагаемых (с производными ∂_i), так и диссипативных слагаемых (с производными $\partial_i \partial_j$), реализуемая при выполнении условий

$$\frac{u_*^2}{\rho_{\alpha*}^2} = \frac{R_\alpha \theta_0}{\rho_{\alpha 0} \rho_0}, \quad \alpha = \overline{1, K}, \quad \frac{\theta_*^2}{u_*^2} = \frac{\theta_0}{c_{V0}},$$

которые ниже предполагаем выполненными (в них остается один свободный параметр). Это позволяет существенно упростить вид коэффициентов системы:

$$\begin{aligned} & \partial_t \widetilde{\rho}_\alpha + u_* (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \widetilde{\rho}_\alpha + \widehat{\rho}_{\alpha 0} \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}) = \\ & = \tau_0 u_*^2 [a_\alpha \widehat{\theta}_0 \Delta \widetilde{\rho}_\alpha + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \widetilde{\rho}_\alpha + 2\widehat{\rho}_{\alpha 0} (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + a_\alpha \widehat{\rho}_{\alpha 0} \Delta \widetilde{\theta}], \quad \alpha = \overline{1, K}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t \widetilde{\mathbf{u}} + u_* (\langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \widetilde{\rho}_\alpha \rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}} + a_0 \nabla \widetilde{\theta}) = u_*^2 [2\tau_0 (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \widetilde{\rho}_\alpha \rangle + \\ & + \bar{\mu}_0 \Delta \widetilde{\mathbf{u}} + (\bar{\chi}_0 + \tau_0 \widehat{\theta}_0 (a\gamma)_0) \nabla \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0 (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \widetilde{\mathbf{u}} + 2\tau_0 a_0 (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \nabla \widetilde{\theta}], \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & \partial_t \widetilde{\theta} + u_* (a_0 \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \widetilde{\theta}) = \\ & = u_*^2 [\tau_0 \langle a_\alpha \widehat{\rho}_{\alpha 0} \Delta \widetilde{\rho}_\alpha \rangle + 2\tau_0 a_0 (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + \tau_0 (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla)^2 \widetilde{\theta} + (\tau_0 (a^2)_0 + \bar{\varkappa}_0) \Delta \widetilde{\theta}], \end{aligned} \quad (20)$$

где для удобства записи введены постоянные

$$\begin{aligned} a_\alpha & := \frac{R_\alpha \theta_*}{u_*^2}, \quad a_0 := \langle c_{\alpha 0} a_\alpha \rangle = \frac{R_0 \theta_*}{u_*^2}, \quad (a\gamma)_0 = \langle c_{\alpha 0} a_\alpha \gamma_\alpha \rangle, \quad (a^2)_0 := \langle c_{\alpha 0} a_\alpha^2 \rangle, \\ \bar{\mu}_0 & := \frac{\mu_0}{\rho_0 u_*^2}, \quad \bar{\chi}_0 := \frac{\chi_0}{\rho_0 u_*^2}, \quad \bar{\varkappa}_0 := \frac{\varkappa_0}{c_{V0} \rho_0 u_*^2}. \end{aligned}$$

Введем скалярные произведения и нормы $(\cdot, \cdot)_\Omega = (\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_\Omega = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ и $(\cdot, \cdot)_\Omega = (\cdot, \cdot)_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$, $\|\cdot\|_\Omega = \|\cdot\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ в пространствах Лебега функций и вектор-функций соответственно, где Ω — область в \mathbb{R}^n . Пусть $\mathbf{H}^1(\Omega)$ — пространство Соболева вектор-функций, а $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ — замыкание в нем пространства гладких финитных в Ω вектор-функций. Напомним, что $\mathbf{H}_0^1(\mathbb{R}^n) = \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим симметризованную линеаризованную систему уравнений (18)–(20) в цилиндре $Q := \Omega \times (0, \infty)$ при краевых и начальных условиях $\widetilde{\mathbf{z}}|_{\partial Q \times (0, \infty)} = 0$ и $\widetilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}(x)$. Уравнениям (18)–(20) при $\partial_t \widetilde{\mathbf{z}}(\cdot, t), \nabla \widetilde{\mathbf{z}}(\cdot, t) \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ отвечает интегральное тождество

$$(\partial_t \widetilde{\mathbf{z}}(\cdot, t), \mathbf{z})_\Omega + u_* \mathcal{B}_\Omega(\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot, t), \mathbf{z}) + u_*^2 \mathcal{A}_\Omega(\widetilde{\mathbf{z}}(\cdot, t), \mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega).$$

В нем $t > 0$, $\mathbf{z} = (\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta)(x)$ и стоят билинейные формы

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\Omega(\widetilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) & := \langle (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \widetilde{\rho}_\alpha + \widehat{\rho}_{\alpha 0} \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}, \rho_\alpha)_\Omega \rangle + \\ & + \langle (\widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \widetilde{\rho}_\alpha \rangle + (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}} + a_0 \nabla \widetilde{\theta}, \mathbf{u})_\Omega + (a_0 \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \widetilde{\theta}, \theta)_\Omega \end{aligned}$$

и (после выноса вперед слагаемых без множителя τ_0)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\Omega(\widetilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) & := \bar{\mu}_0 (\nabla \widetilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{u})_\Omega + \bar{\chi}_0 (\operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}, \operatorname{div} \mathbf{u})_\Omega + \bar{\varkappa}_0 (\nabla \widetilde{\theta}, \nabla \theta)_\Omega + \\ & + \tau_0 [\langle (a_\alpha \widehat{\theta}_0 \nabla \widetilde{\rho}_\alpha, \nabla \rho_\alpha)_\Omega \rangle + \langle (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \widetilde{\rho}_\alpha, (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \rho_\alpha)_\Omega \rangle + 2 \langle (\widehat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}, \langle \widehat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle \rangle_\Omega + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (\nabla \tilde{\theta}, \langle a_\alpha \hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle)_\Omega + 2(\langle \hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \tilde{\rho}_\alpha \rangle, (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u})_\Omega + (\hat{\theta}_0 (a\gamma)_0 \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}, \operatorname{div} \mathbf{u})_\Omega + \\
& + ((\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u})_\Omega + 2(a_0 \nabla \tilde{\theta}, (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u})_\Omega + \\
& + (\langle a_\alpha \hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \tilde{\rho}_\alpha \rangle, \nabla \theta)_\Omega + 2((\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}}, a_0 \nabla \theta)_\Omega + (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \tilde{\theta}, \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \theta)_\Omega + ((a^2)_0 \nabla \tilde{\theta}, \nabla \theta)_\Omega,
\end{aligned}$$

где тензоры $\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{u}$ рассматриваются как векторы длины n^2 . Нетрудно видеть, что верны свойства

$$\mathcal{B}_\Omega(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega), \quad \mathcal{A}_\Omega(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = \mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z}, \tilde{\mathbf{z}}) \quad \forall \tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (21)$$

Соответствующая $\mathcal{A}_\Omega(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z})$ квадратичная форма для любой $\mathbf{z} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ такова

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z}, \mathbf{z}) &= \bar{\mu}_0 \|\nabla \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\chi}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\varkappa}_0 \|\nabla \theta\|_\Omega^2 + \\
&+ \tau_0 [\hat{\theta}_0 \langle a_\alpha \|\nabla \rho_\alpha\|_\Omega^2 \rangle + \langle \|\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \rho_\alpha\|_\Omega^2 \rangle + \hat{\theta}_0 (a\gamma)_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \langle \|\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla\|_\Omega^2 \rangle + \\
&+ \langle \|\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \theta\|_\Omega^2 \rangle + (a^2)_0 \|\nabla \theta\|_\Omega^2 + 4(\langle \hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle + a_0 \nabla \theta, (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u})_\Omega + 2(\langle a_\alpha \hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle, \nabla \theta)_\Omega].
\end{aligned}$$

Для обоснования положительной определенности $\mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z}, \mathbf{z})$ важна следующая лемма.

Л е м м а 1. Справедлива формула

$$\begin{aligned}
& \hat{\theta}_0 \langle a_\alpha \|\nabla \rho_\alpha\|^2 \rangle + \langle (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \rho_\alpha)^2 \rangle + \hat{\theta}_0 (a\gamma)_0 (\operatorname{div} \mathbf{u})^2 + |(\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}|^2 + (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \theta)^2 + (a^2)_0 |\nabla \theta|^2 + \\
& + 2[\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot (\langle \hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle + a_0 \nabla \theta)] \operatorname{div} \mathbf{u} + 2(\langle \hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle + a_0 \nabla \theta, (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}) + 2(\langle a_\alpha \hat{\rho}_{\alpha 0} \nabla \rho_\alpha \rangle, \nabla \theta) = \\
& = \langle (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \rho_\alpha + \hat{\rho}_{\alpha 0} \operatorname{div} \mathbf{u})^2 \rangle + |(\hat{\theta}_0 a_\alpha)^{1/2} \nabla \rho_\alpha + \sqrt{c_{\alpha 0}} (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} + \sqrt{c_{\alpha 0}} a_\alpha \nabla \theta|^2 + \\
& + (a_0 \operatorname{div} \mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \theta)^2 + g_0 (\operatorname{div} \mathbf{u})^2,
\end{aligned}$$

где $g_0 := \langle \hat{\rho}_{\alpha 0}^2 \rangle + a_0^2 - \hat{\theta}_0 (a\gamma)_0 = \frac{\theta_0}{u_*^2} \langle c_{\alpha 0} c_{V\alpha} (\gamma_\alpha - \tilde{\gamma}_0)^2 \rangle \geq 0$, $\tilde{\gamma}_0 := \frac{R_0}{c_{V0}} - 1$, $\hat{\theta}_0 a_\alpha = \frac{\hat{\rho}_{\alpha 0}^2}{c_{\alpha 0}}$.

Форма $\mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z}, \mathbf{z})$ приводима к сумме квадратов и положительно определена.

Л е м м а 2. Пусть $\mathbf{z} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, причем $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Справедливы формула и неравенство

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\Omega(\mathbf{z}, \mathbf{z}) &= \bar{\mu}_0 \|\nabla \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\chi}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\varkappa}_0 \|\nabla \theta\|_\Omega^2 + \tau_0 [\langle \|\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \rho_\alpha + \hat{\rho}_{\alpha 0} \operatorname{div} \mathbf{u}\|_\Omega^2 \rangle + \\
& + \langle \|\hat{\theta}_0 a_\alpha\|^{1/2} \nabla \rho_\alpha + \sqrt{c_{\alpha 0}} (\hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} + \sqrt{c_{\alpha 0}} a_\alpha \nabla \theta\|_\Omega^2 \rangle + \|a_0 \operatorname{div} \mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \nabla \theta\|_\Omega^2 + g_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_\Omega^2] \geq \\
& \geq \max \{ \delta_1 \tau_0 \langle \|\nabla \rho_\alpha\|_\Omega^2 \rangle, \bar{\mu}_0 \|\nabla \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\chi}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \bar{\varkappa}_0 \|\nabla \theta\|_\Omega^2 \},
\end{aligned}$$

где $\delta_1 := \frac{1}{2}(1 + \max\{2\delta_0 - 1, 0\})^{-1} \hat{\theta}_0 \min_{\alpha=\overline{1, K}} a_\alpha$, $\delta_0 := \tau_0 \max \{ \frac{|\hat{\mathbf{u}}_0|^2}{\bar{\mu}_0}, \frac{(a^2)_0}{\bar{\varkappa}_0} \}$.

Введем пространство $\mathbf{V}(Q_T) := \{ \tilde{\mathbf{z}} \in L^2((0, T); \mathbf{H}_0^1(\Omega)); \partial_t \tilde{\mathbf{z}} \in L^2((0, T); \mathbf{H}^{-1}(\Omega)) \}$, где $Q_T = \Omega \times (0, T)$, область Ω ограничена и $\mathbf{H}^{-1}(\Omega) = (\mathbf{H}_0^1(\Omega))^*$, и напомним, что $\mathbf{V}(Q_T) \subset C([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))$, см., например, [12]. Для начально-краевой задачи для системы уравнений (18)–(20) в Q с условиями $\tilde{\mathbf{z}}|_{\partial\Omega \times (0, \infty)} = 0$, $\tilde{\mathbf{z}}|_{t=0} = \tilde{\mathbf{z}}^{(0)} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ введем слабое решение $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbf{V}(Q_T)$ для всех $T > 0$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int_0^T \langle \partial_t \tilde{\mathbf{z}}(\cdot, t), \mathbf{z}(\cdot, t) \rangle_{\mathbf{H}^{-1}(\Omega) \times \mathbf{H}_0^1(\Omega)} dt + u_* \mathcal{B}_{Q_T}(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) + u_*^2 \mathcal{A}_{Q_T}(\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) = 0 \quad \forall \mathbf{z} \in \mathbf{L}^2((0, T); \mathbf{H}_0^1(\Omega))$$

для всех $T > 0$. Здесь в билинейных формах \mathcal{B}_{Q_T} и \mathcal{A}_{Q_T} скалярные произведения берутся по Q_T , а не Ω как выше.

Т е о р е м а 2. 1. Слабое решение $\tilde{\mathbf{z}} \in \mathbf{V}(Q_T)$ с любым $T > 0$ системы уравнений (18)–(20) существует и единственно и для него верно энергетическое равенство

$$\frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{z}}(\cdot, T)\|_{\Omega}^2 + u_*^2 \mathcal{A}_{Q_T}(\tilde{\mathbf{z}}, \tilde{\mathbf{z}}) = \frac{1}{2}\|\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|_{\Omega}^2 \quad \forall T > 0.$$

2. Существует производная $\partial_t(\|\tilde{\mathbf{z}}\|_{\Omega}^2) \in L^1(0, \infty)$, верны свойства $\mathbf{L}^2(\Omega)$ -диссипативности $\partial_t(\|\tilde{\mathbf{z}}(\cdot, t)\|_{\Omega}^2) \leq 0$ п.в. на $(0, \infty)$ (и поэтому $\max_{t \geq 0} \|\tilde{\mathbf{z}}(\cdot, t)\|_{\Omega} = \|\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|_{\Omega}$) и оценка

$$2u_*^2 \max \{ \delta_1 \tau_0 \langle \|\nabla \tilde{\rho}_\alpha\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2 \rangle, \bar{\mu}_0 \|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2 + \bar{\chi}_0 \|\operatorname{div} \mathbf{u}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2 + \bar{\varkappa}_0 \|\nabla \theta\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2 \} \leq \|\tilde{\mathbf{z}}^{(0)}\|_{\Omega}^2.$$

П. 1 вытекает из свойств (21), леммы 2 и [12], а п. 2 следует из п. 1 и леммы 2.

Для анализа параболичности системы (1)–(3) в уравнениях редуцированной системы (15)–(17) нужно отбросить конвективные слагаемые слева и остаточные члены $O(|\nabla \mathbf{z}|^2)$ справа. В полученной однородной системе уравнений, содержащей только производные ∂_t и $\partial_i \partial_j$, следует «заморозить» зависящие от решения \mathbf{z} коэффициенты перед $\partial_i \partial_j$ в некоторой (любой) точке $\mathbf{z}_0 = (\rho_{10}, \dots, \rho_{K0}, \mathbf{u}_0, \theta_0)$, уже бравшейся как фоновое решение. Применяя к результату интегральное преобразование Фурье \mathcal{F} по x , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\partial_t \mathcal{F} \mathbf{z}(\zeta, t) + u_*^2 |\zeta|^2 A(\mathbf{z}_0, \xi) \mathcal{F} \mathbf{z}(\zeta, t) = 0, \quad t > 0, \quad (22)$$

с параметром $\zeta \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и вещественной матрицей $A(\mathbf{z}_0, \xi)$ порядка $K + n + 1$ с вектор-столбцом $\xi = \zeta/|\zeta|$. Пусть $\lambda[A(\mathbf{z}_0, \xi)]$ — собственные значения введенной матрицы.

Выполним замену $\mathbf{z} = D_* \tilde{\mathbf{z}}$ с введенной выше матрицей $D_* = D_*(\mathbf{z}_0)$. Тогда $\mathcal{F} \mathbf{z} = D_* \mathcal{F} \tilde{\mathbf{z}}$ и после умножения системы (22) слева на D_*^{-1} получим эквивалентную систему

$$\partial_t \mathcal{F} \tilde{\mathbf{z}}(\zeta, t) + u_*^2 |\zeta|^2 \hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi) \mathcal{F} \tilde{\mathbf{z}}(\zeta, t) = 0, \quad t > 0,$$

с матрицей $\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi) = D_*^{-1} A(\mathbf{z}_0, \xi) D_*$, подобной матрице $A(\mathbf{z}_0, \xi)$. Нетрудно видеть, что матрица $-\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)$ непосредственно возникает и в результате применения \mathcal{F} к правым частям уравнений (18)–(20). Поэтому $\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi) = [\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)]^T$ и $\lambda[\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)] = \lambda[A(\mathbf{z}_0, \xi)] \in \mathbb{R}$.

Пусть $\Lambda = \operatorname{diag}\{a_1, \dots, a_K\}$, I_k — единичная матрица порядка k , $\hat{\rho}_0 := (\hat{\rho}_{10}, \dots, \hat{\rho}_{K0})^T$, $s = s(\xi) := \hat{\mathbf{u}}_0 \cdot \xi$. Явный 3×3 -блочный вид матрицы $\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)$ таков:

$$\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi) = \begin{pmatrix} \tau_0(\hat{\theta}_0 \Lambda + s^2 I_K) & 2\tau_0 s \hat{\rho}_0 \otimes \xi & \tau_0 \Lambda \hat{\rho}_0 \\ 2\tau_0 s \xi \otimes \hat{\rho}_0 & (\bar{\mu}_0 + \tau_0 s^2) I_n + [\bar{\chi}_0 + \tau_0 \hat{\theta}_0 (a\gamma)_0] \xi \xi^T & 2\tau_0 a_0 s \xi \\ \tau_0 \hat{\rho}_0^T \Lambda & 2\tau_0 a_0 s \xi^T & \bar{\varkappa}_0 + \tau_0 [s^2 + (a^2)_0] \end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма с матрицей $\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi) \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} &= \bar{\mu}_0 |\mathbf{v}|^2 + \bar{\chi}_0 (\xi \cdot \mathbf{v})^2 + \bar{\varkappa}_0 q^2 + \tau_0 \{ \hat{\theta}_0 \langle a_\alpha r_\alpha^2 \rangle + s^2 |\mathbf{r}|^2 + 4s(\hat{\rho}_0 \cdot \mathbf{r}) \xi \cdot \mathbf{v} + \\ &+ 2\langle a_\alpha \hat{\rho}_{\alpha 0} r_\alpha \rangle q + s^2 |\mathbf{v}|^2 + \hat{\theta}_0 (a\gamma)_0 (\xi \cdot \mathbf{v})^2 + 4a_0 s (\xi \cdot \mathbf{v}) q + [s^2 + (a^2)_0] q^2 \} \end{aligned}$$

для любого блочного вектора $\mathbf{b} := (\mathbf{r}^T, \mathbf{v}, q)^T$ с $\mathbf{r}^T = (r_1, \dots, r_K) \in \mathbb{R}^K$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $q \in \mathbb{R}$.

Данная квадратичная форма положительно определена.

Л е м м а 3. Для любого блочного вектора $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{K+n+1}$ верны формула и неравенства

$$\begin{aligned} \hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi) \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} &= \bar{\mu}_0 |\mathbf{v}|^2 + \bar{\chi}_0 (\xi \cdot \mathbf{v})^2 + \bar{\varkappa}_0 q^2 + \tau_0 \{ |s\mathbf{r} + (\xi \cdot \mathbf{v}) \hat{\rho}_0|^2 + \\ &+ \langle |(\hat{\theta}_0 a_\alpha)^{1/2} r_\alpha \xi + \sqrt{c_{\alpha 0}} s \mathbf{v} + \sqrt{c_{\alpha 0}} a_\alpha q \xi|^2 \rangle + [a_0 (\xi \cdot \mathbf{v}) + sq]^2 + g_0 (\xi \cdot \mathbf{v})^2 \} \geq \\ &\geq \max \{ \delta_1 \tau_0 |\mathbf{r}|^2, \bar{\mu}_0 |\mathbf{v}|^2 + \bar{\chi}_0 (\xi \cdot \mathbf{v})^2 + \bar{\varkappa}_0 q^2 \} \geq \delta_2 |\mathbf{b}|^2 \end{aligned}$$

с $\delta_2 := \frac{1}{2} \min \{ \delta_1 \tau_0, \bar{\mu}_0, \bar{\varkappa}_0 \} > 0$.

Можно показать, что лемма 2 для $\Omega = \mathbb{R}^n$ и лемма 3 эквивалентны.

Сформулируем теорему о локальной по времени однозначной разрешимости задачи Коши для КГД системы уравнений (1)–(3), рассматриваемой в слое $\Pi_T := \mathbb{R}^n \times (0, T)$, при начальных условиях $\boldsymbol{\rho}|_{t=0} = \boldsymbol{\rho}^{(0)}(x)$, $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^{(0)}(x)$, $\theta|_{t=0} = \theta^{(0)}(x)$ для $x \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\mathcal{D} := (\underline{\rho}_1, \bar{\rho}_1) \dots \times (\underline{\rho}_K, \bar{\rho}_K) \times (-\bar{u}_1, \bar{u}_1) \dots \times (-\bar{u}_n, \bar{u}_n) \times (\underline{\theta}, \bar{\theta}) \subset (0, \infty)^K \times \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. При $\tau, \mu, \lambda, \varkappa \in C(\mathcal{D})$ по лемме 3 эквивалентная КГД система, которой отвечает матрица $\hat{A}(\mathbf{z}_0, \xi)$, удовлетворяет в \mathcal{D} условию сильной параболичности по Вишику и тем более равномерной параболичности по Петровскому [13]. Пусть $0 < \beta < 1$ — параметр.

Т е о р е м а 3. Пусть $\tau, \mu, \lambda, \varkappa \in C^2(\mathcal{D})$. Пусть начальные данные $\boldsymbol{\rho}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}, \theta^{(0)} \in C^{(2,\beta)}(\mathbb{R}^n)$, причем их значения $(\boldsymbol{\rho}^{(0)}, \mathbf{u}^{(0)}, \theta^{(0)})(x)$ принадлежат какому-либо компактному в \mathcal{D} и $\mathbf{f} \in C^{(0,\beta,0)}(\bar{\Pi}_T)$, $Q_\alpha \in C^{(1,\beta,0)}(\bar{\Pi}_T)$, $\alpha = \bar{1}, \bar{K}$.

Тогда при достаточно малом $T > 0$ задача Коши для КГД системы уравнений (1)–(3) в слое Π_T имеет единственное классическое решение $\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta \in C^{(2,\beta,\beta/2)}(\bar{\Pi}_T)$ с $\partial_t \boldsymbol{\rho}, \partial_t \mathbf{u}, \partial_t \theta \in C^{(0,\beta,0)}(\bar{\Pi}_T)$, и его значения $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{u}, \theta)(x, t)$ принадлежат \mathcal{D} .

Здесь $C^{(m,\beta,\beta_t)}(\bar{\Pi}_T)$ с $m = 0, 1, 2, 0 \leq \beta_t < 1$ — пространства функций, имеющих непрерывные и ограниченные в $\bar{\Pi}_T$ производные порядка $k = 0, \dots, m$ по x , удовлетворяющие условию Гёльдера порядка β по x и β_t по t (при $0 < \beta_t < 1$) равномерно в $\bar{\Pi}_T$, а $C^{(2,\beta)}(\mathbb{R}^n)$ — стандартные пространства Гёльдера. Указанная теорема следует из общего результата о локальной по времени однозначной разрешимости задачи Коши для квазилинейных параболических по Петровскому систем, см. теорему 6.3 и замечание 1 к ней в гл. 3, §4 [13].

ИСТОЧНИКИ ФИНАНСИРОВАНИЯ

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 19-11-00169.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика, изд. 3-е. М.: Наука, 1986.
2. Giovangigli V. Multicomponent flow modeling. Boston, Birkhäuser, 1999.
3. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: МАКС Пресс, 2004.
4. Елизарова Т.Г. Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. М.: Научный мир, 2007.
5. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва–Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009.
6. Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48. № 3. С. 445–472.
7. Злотник А.А. // ДАН. 2010. Т. 431. № 5. С. 605–609.
8. Злотник А.А. // ДАН. 2010. Т. 433. № 6. С. 599–603.
9. Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Четверушкин Б.Н. // ДАН. 2014. Т. 459. № 4. С. 395–399.
10. Елизарова Т.Г., Злотник А.А., Шильников Е.В. // ЖВМиМФ. 2019. Т. 59. № 11. С. 1899–1914.
11. Злотник А.А., Федченко А.С. // Дифференц. уравнения. 2021 (сдано в печать).
12. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
13. Эйдельман С.Д. Параболические системы. М.: Наука, 1964.