Лицензиат 2025

Образовательная программа «Совместный бакалавриат ВШЭ и ЦПМ»

Задачи для подготовки

1. Сходится ли ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi\sqrt{n^2+n})?$$

2. При каких значениях p_1, p_2, a_1, a_2 сходятся интегралы

   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{|x-a_1|^{p_1}|x-a_2|^{p_2}}$

   b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^{p_1} x \cos^{p_2} x}$

3. Исследовать функциональную последовательность $f_n(x) = n\ln(1+\frac{1}{nx})$ на сходимость и на равномерную сходимость на множествах $(0,1)$ и $(1,\infty)$.

4. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $|f(x) - f(y)| \le (x-y)^2$ при всех $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Найдите шестую производную функции $f(x) = \cos(\sin 2x)$ в точке $x = 0$.

6. Докажите неравенство $e^x \le (1+x)^{1+x}$ при $x > -1$. Найдите всех x, при которых достигается знак равенства.

7. Сходится ли ряд $-1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{3}{6} - \cdots - \frac{1}{2n-1} + \frac{3}{2n} - \ldots$?

8. Равномерно ли сходится ряд $\sum_{n\ge 0} \frac{x^n}{n}$ на отрезке $[-1, 0]$?

9. Найдите радиус сходимости степенных рядов

   a) $\displaystyle\sum_{n\ge 0} \frac{x^{n^2}}{(n+1)2^n}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}x^n \quad (x \in \mathbb{R})$

10. Рассмотрим функцию $f(x,y) = e^{-x^2y^{-2}-y^2x^{-2}}$ при $xy \ne 0$ и $f(x,y) = 0$ при $xy = 0$. Есть ли у неё частные производные в 0? Непрерывна ли функция в 0?

11. Постройте график кривой, заданной в полярных координатах уравнением $r = 2\cos\phi + 1$. Вычислите угол наклона касательных к оси абсцисс в точках пересечения с осью ординат и в особой точке кривой.

12. Пусть функция f дифференцируема на $\mathbb{R}^n$ и $\nabla f(x) = k(|x|)x$, где k – некоторая функция на прямой, а $|x|$ – евклидова норма x. Докажите, что f есть функция от $|x|$.

13. Найдите $\frac{\partial^{15} f}{\partial x^{10}\partial y^5}(0,0)$ для $f(x,y) = (x+y)\cos(x^2+y^2)$.

14. Около прямоугольного параллелепипеда со сторонами $2a$, $2b$ и $2c$ опишите эллипсоид $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 + z^2/\gamma^2 = 1$ наименьшего объема.

15. Вычислить интеграл $\int_a^b \sqrt[3]{(b-x)(x-a)^2}dx$ при $b > a$.

16. Вычислить интеграл $\int_a^b \frac{1}{\sqrt[3]{(b-x)(x-a)^2}}dx$ при $b > a$.

17. Доказать, что ряд $\sum (p_n)^{-1}$ расходится (p_n – это n-е простое число).

18. Пусть функция $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ – монотонная функция, и пусть интеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Докажите, что $\lim_{x\to+\infty}(xf(x)) = 0$.

19. Найдите площадь области, ограниченной кривой $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

20. Найдите площадь области, ограниченной кривыми

$$x^2 = ay, x^2 = by, y^2 = px, y^2 = qx, 0 < a < b, 0 < p < q$$

21. Вычислите интеграл. Контур обходится один раз в положительном направлении (против часовой стрелки).

    (a) $\oint_{|z|=1} \frac{e^z \cos \pi z}{z^2 + 2z}dz$;

    (b) $\oint_{|z|=1} \frac{\operatorname{tg}\ z}{ze^{1/(z+2)}}dz$;

    (c) $\oint_{|z|=2} \frac{e^{-1/z}}{z^2 + 1}dz$.

22. Вычислите несобственный интеграл.

    (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10}dx$;

    (b) $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 + 1)^2}dx$;

    (c) $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} \cos \alpha x dx$.

23. Вычислите $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(x^2 + y)$.

24. Функция $f(z)$ голоморфна в области $U \subset \mathbb{C}$ и принимает в ней только вещественные значения. Докажите, что $f(z)$ постоянна в U.

25. Для каких вещественных a и b функция $f(x + iy) = ax^2 + by^2 + ixy$ голоморфна на всей плоскости?

26. Существует ли функция f, голоморфная в проколотом единичном диске $D^* = \{z \in \mathbb{C} | 0 < |z| < 1\}$ и удовлетворяющая условию $|z|^{5/3} \leq |f(z)| \leq |z|^{4/3}$ для всех $z \in D^*$?

27. Приведите пример последовательности неотрицательных ограниченных борелевских функций на $[0, 1]$, поточечно сходящейся к нулю, но не имеющей предела по норме пространства $L^1[0, 1]$.

28. Приведите пример последовательности неотрицательных ограниченных борелевских функций на $[0, 1]$, сходящейся к нулю по норме пространства $L^1[0, 1]$, но не имеющей поточечного предела ни в одной точке.

29. Вычислите объём пространственной фигуры, ограниченной поверхностями

$$z = 6 - x^2 - y^2, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

30. Решите дифференциальное уравнение

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$$

31. Выясните, имеет ли место заключение теоремы единственности для решений уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt[3]{e^x - 1}$$

Нарисуйте приближённо интегральные кривые этого уравнения.

32. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = x \sin x$.

33. Найдите общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y, \end{cases}$$

и нарисуйте фазовый портрет.

34. Линейный оператор A в пространстве вещественных 2×2 матриц переводит произвольную матрицу B в ее коммутатор $\Lambda B - B\Lambda$ с фиксированной диагональной матрицей $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Вычислите экспоненту e^{tA}. Какому дифференциальному уравнению она удовлетворяет?

35. Является ли подмножество в $\mathbb{R}^2$, состоящее из точек с иррациональными координатами (а) открытым, (б) замкнутым, (в) связным, (г) линейно связным, (д) всюду плотным?

36. Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения счетного числа замкнутых множеств.

37. Какие из букв A, O, T, K, B гомеоморфны? Гомотопически эквивалентны?

38. Пусть X хаусдорфово пространство, и пусть $K_1, K_2 \subset X$ – его компактные подмножества. Докажите, что если $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, то существуют такие открытые подмножества $U_1, U_2 \subset X$, что $U_1 \supset K_1$, $U_2 \supset K_2$ и $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

39. На каждой прямой $l \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, проходящей через начало координат, выбрана точка $a(l)$ таким образом, что $a(l)$ непрерывно зависит от l. Докажите, что хотя бы на одной прямой выбрано начало координат.

40. Найдите жорданову нормальную форму оператора третьей производной на пространстве многочленов от одной переменной степени не выше n.

41. Докажите, что у любого набора попарно коммутирующих операторов на конечномерном пространстве над алгебраически замкнутым полем есть общий собственный вектор.

42. На конечномерном векторном пространстве над полем $\mathbb{C}$ задан конечный набор ~~самосопряженных~~ эрмитовых линейных операторов, образующих группу относительно композиции. Докажите, что эти операторы одновременно диагонализуемы, если и только если образуемая ими группа абелева.

43. Пусть $v_1, ..., v_n$ – набор элементов векторного пространства V, $w_1, ..., w_n$ – набор элементов двойственного пространства V^*. Известно, что определитель матрицы $A_{ij} = w_i(v_j)$ отличен от нуля. Покажите, что оба набора состоят из линейно независимых векторов.

44. Существует ли матрица, характеристический многочлен которой равен χ, а минимальный μ, где

    (a) $\chi(\lambda) = (\lambda^6 - 1)$, $\mu(\lambda) = (\lambda^3 - 1)$;

    (b) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$, $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$;

    (c) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^5(\lambda - 2)^5$, $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$

    Если да, приведите пример такой матрицы. Если нет, докажите.

45. Найдите
$$\min_{p,q\in\mathbb{R}} \int_0^1 (x^2 + px + q)^2 dx$$

46. Билинейная форма K на пространстве вещественных 2×2 матриц со следом 0 определяется формулой $K(A, B) = \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}_A \circ \mathrm{ad}_B)$. Здесь ad_A – оператор на пространстве матриц, переводящий матрицу X в $AX - XA$, а Tr обозначает след оператора на пространстве матриц. Вычислите ранг и сигнатуру формы K.

47. Матрица $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$ задаёт на пространстве всех рациональных матриц размера 2×2 линейные операторы:

    (a) $X \mapsto AX + XA$

    (b) $X \mapsto AX - XA$

    (c) $X \mapsto AXA^{-1}$

    Найдите минимальные и характеристические многочлены этих операторов.

48. Матрица линейного оператора F в некотором базисе $e_1, ..., e_n$ представляет собой жорданову клетку размера n с собственным числом λ. Опишите все ненулевые F-инвариантные подпространства и найдите жорданову нормальную форму оператора F^2 при $\lambda = 0$ и $\lambda \neq 0$.

49. Докажите, что линейный оператор F в конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ диагонализуем, если и только если $\mathrm{rk}(F - \lambda E) = \mathrm{rk}(F - \lambda E)^2$ для всех $\lambda \in \Bbbk$.

50. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ найдите расстояние от начала координат до аффинной гиперплоскости, заданной уравнением $x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = 1$.

51. На n-мерном вещественном векторном пространстве V задана квадратичная форма f с положительным индексом инерции p и отрицательным индексом инерции q. Какова максимальная размерность такого подпространства $W \subseteq V$, что $f|_W \equiv 0$?

52. Пусть в евклидовом пространстве V задан самосопряженный оператор A, у которого все корни характеристического многочлена по модулю меньше единицы. Докажите, что A переводит единичный шар с центром в нуле в себя.

53. Минимальный многочлен линейного оператора F полностью разлагается на линейные множители и не имеет кратных корней. Верно ли, что у F лишь конечное число инвариантных подпространств, если и только если минимальный многочлен совпадает с характеристическим?

54. Сколько корней в поле из 125 элементов у многочлена

(a) $x^3 + x^2 - 2x - 2$

(b) $x^3 - 2x^2 + x + 1$

55. Перечислите все группы, у которых нет нетривиальных собственных подгрупп.

56. Изоморфна ли группа кватернионных единиц $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$ группе диэдра D_4 (т.е. группа симметрий квадрата)?

57. Изоморфна ли симметрическая группа S_3 специальной линейной группе $SL_2(\mathbb{F}_2)$ над полем из двух элементов?

58. Положим $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ и $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Изоморфны ли группы $\mathbb{C}^\times / U_n$ и $\mathbb{C}^\times$?

59. Докажите, что симметрическая группа S_n порождается двумя элементами.

60. Разлагается ли группа $GL_2(\mathbb{R})$ в прямое произведение подгрупп $D = \{\lambda E | \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ и $SL_2(\mathbb{R})$? Аналогичный вопрос про группу $GL_3(\mathbb{R})$.

61. Обозначим через $g(A)$ минимальное количество элементов, которыми порождается абелева группа A. Найдите $\max g(A)$ по всем абелевым группам A порядка $2^4 \cdot 3^4 \cdot 7^2$. Укажите, на скольких группах он достигается, и приведите пример такой группы.

62. Верно ли, что конечная абелева группа циклическая, если и только если для каждого k в ней имеется не более одной подгруппы порядка k?

63. Сколько решений имеет уравнение $x^{44} = 1$ в кольце $\mathbb{Z}/(2800)$?

64. Пусть конечная группа G имеет две факторгруппы F_1 и F_2, порядки которых взаимно просты, причем $|G| = |F_1| \cdot |F_2|$. Докажите, что $G \cong F_1 \times F_2$.

65. Приведите пример двух не совпадающих изоморфных друг другу подполей поля комплексных чисел.

66. Являются ли кольца

(a) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 - 2)$

(b) $\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 - 5)$

(c) $\mathbb{Z}[\sqrt{13}] = \mathbb{Z}[x]/(x^2 - 13)$

(1) областями главных идеалов? (2) факториальными кольцами?

67. Над полем $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/(5)$ вычислите

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}^{3502}.$$

68. Существует ли вещественная 3×3 матрица A, удовлетворяющая уравнению $A^2 + A + 7I = 0$? Через I обозначена единичная 3×3 матрица.

69. Существует ли вещественная матрица, квадрат которой равен

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$

Если да, предъявите такую матрицу явно, если нет, объясните почему.

70. Выразите собственные числа, след и определитель оператора левого умножения на заданную квадратную матрицу A, действующего на пространстве $n \times n$ матриц по формуле $X \mapsto AX$, через собственные числа, след и определитель матрицы A.

71. Докажите, что каждый линейный оператор на n-мерном комплексном векторном пространстве имеет инвариантное подпространство размерности $n-1$.

72. Перечислите с точностью до изоморфизма все группы, допускающие точное действие на множестве из пяти элементов с двумя орбитами, состоящими из двух и трёх элементов. (Действие называется точным, если тождественным преобразованием действует только единичный элемент группы.)

73. Обозначим через D_k группу правильного плоского k-угольника в трёхмерном евклидовом пространстве. При каких m и n группы D_{mn} и $D_m \times \mathbb{Z}/(n)$ изоморфны?

74. Можно ли вложить поле из 9 элементов в поле а) из 27 элементов б) из 81 элемента?

75. Сколько существует k-мерных подпространств в n-мерном пространстве над полем $\mathbb{F}_q$, содержащих заданную прямую, проходящую через начало координат?

76. Вычислите порядки групп $GL_n(\mathbb{F}_q)$, $SL_n(\mathbb{F}_q)$, $PGL_n(\mathbb{F}_q)$ и $PSL_n(\mathbb{F}_q)$ над полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов.

77. Матрица M размера $n \times n$ имеет ранг $n-1$. Найдите ранг матрицы алгебраических дополнений к элементам матрицы M.

78. Докажите равенства $\operatorname{Im} F^* = \operatorname{Ann} \operatorname{Ker} F$ и $\operatorname{Ker} F^* = \operatorname{Ann} \operatorname{Im} F$ для пары двойственных линейных отображений $F : V \to W$ и $F^* : W^* \to V^*$ между конечномерными векторными пространствами.

79. Докажите соотношения

    a) $\binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}$

    b) $\binom{a}{k} + \binom{a}{k-1} = \binom{a+1}{k}$.

    Здесь
    $$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)...(a-n+1)}{n!}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

80. Вычислите производящие функции для последовательностей

    a) $1^2, 2^2, 3^2, ..., k^2, ...$

    b) $n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, ..., (n+k)^2, ...$

81. Докажите соотношения

    a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{n}{k} = \binom{a+n}{n}$

    b) $\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} s^k = \frac{(1+\sqrt{s})^n + (1-\sqrt{s})^n}{2}$

82. Найдите производящую функцию последовательности, заданной начальными условиями $a_0 = 1, a_1 = 1$ и рекуррентным соотношением $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ $(n > 1)$.

83. Преобразуйте степенной ряд $\sum_{n\geq 0}(16n^2 + 31n + 18) \cdot x^n$ в несократимую дробь p/q с $p, q \in \mathbb{Z}[x]$.

84. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы начальными условиями $a_0 = 5, a_1 = 3, b_0 = 1, b_1 = 4$ и рекуррентными соотношениями

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}; \quad b_n = 5b_{n-1} - 6b_{n-2} \quad (n > 1)$$

Сравните числа a_n и b_n при достаточно больших n.

85. Пусть $\xi_1, ..., \xi_n$ – независимые и одинаково распределенные случайные величины. Через $\xi_{(k)}$ обозначаем k-е по порядку значение величин ξ_i, расположенных в порядке возрастания. Найдите распределения $\xi_{(1)}$ и $\xi_{(2)}$.

86. Случайная величина θ является суммой двух независимых случайных величин $\theta = \xi + \eta$, где ξ – непрерывная случайная величина с плотностью $\rho(x)$, а η – дискретная случайная величина, принимающая значения x_i с вероятностями p_i. Найдите плотность распределения величины θ.

87. (a) Докажите, что функции $\min(x, y)$ и $\max(x + y - 1, 0)$, $(x, y) \in [0, 1]^2$, являются функциями распределения двумерных случайных векторов со значениями в $[0, 1]^2$.
(b) Пусть случайный вектор (ξ, η) имеет функцию распределения $F(x, y)$, случайная величина ξ имеет распределение $F_1(x)$, случайная величина η имеет распределение $F_2(y)$. Докажите неравенства $\max(F_1(x) + F_2(y) - 1, 0) \leq F(x, y) \leq \min(F_1(x), F_2(y))$.

88. Величины ξ, η независимы и имеют нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Найдите распределение случайного вектора $(3\xi + \eta, \xi - 3\eta)$. Вычислите вероятность $P(|3\xi + \eta| > |\xi - 3\eta|)$.

89. Последовательности случайных величин ξ_n и η_n сходятся по распределению к случайным величинам ξ и η соответственно. Покажите, что в общем случае нельзя утверждать, что $\xi_n + \eta_n$ сходится по распределению к $\xi + \eta$. Докажите, что $\xi_n + \eta_n$ сходится по распределению к $\xi + \eta$, если дополнительно известно, что величина η является константой.

90. Пусть $\varphi(t)$ – характеристическая функция случайной величины. Докажите, что функция $\frac{1+|\varphi(t)|^2}{2}$ тоже является характеристической функцией некоторой случайной величины.

91. (a) Докажите, что сумма независимых пуассоновских случайных величин также является пуассоновской случайной величиной.
(б) Пусть X, Y – независимые пуассоновские случайные величины с параметром λ. Пусть $x \in \mathbb{R}$. Найдите предел $\lim_{\lambda\to\infty} P(X - Y \leq \sqrt{2\lambda}x)$.

92. Рассмотрим множество всех нестрого убывающих последовательностей натуральных чисел. Является ли данное множество счетным, континуальным или оно имеет иную мощность?

93. Рассмотрим множество всех биекций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Является ли данное множество счетным, континуальным или оно имеет иную мощность?

94. Рассмотрим множество непрерывных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Является ли данное множество счетным, континуальным или оно имеет иную мощность?

95. Приведите к дизъюнктивной нормальной форме следующую формулу:

$$((p \leftrightarrow (p \wedge q)) \rightarrow ((r \wedge (p \wedge (r \rightarrow q))) \rightarrow q)).$$

96. Приведите к дизъюнктивной нормальной форме следующую формулу:

$$(((\neg p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow p)) \vee ((r \rightarrow p) \rightarrow (p \vee q))).$$

97. Докажите, что ковер Серпинского является канторовой плоской кривой.

98. Докажить, что эволюта циклоиды получается параллельным переносом самой циклоиды.

99. Докажите, что существует ровно пять типов правильных многогранников.

100. Докажите, что если p - простое число, то число$(p-1)!+1$ делится на p (теорема Вильсона).