КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ТРЕХМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА ХАРТРИ ВБЛИЗИ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ[1]

А.В. Перескоков (Москва, НИУ МЭИ, НИУ ВШЭ)

pereskokov62@mail.ru

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора типа Хартри в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$(-\Delta_q - \frac{1}{\mid q \mid} + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1 - \mu e^{-\varkappa \varepsilon^{3/4} |q-q'|}}{\mid q - q' \mid} \mid \psi(q') \mid^2 dq')\psi = \lambda\psi, \qquad (1)$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1, \qquad (2)$$

где Δ_q — оператор Лапласа, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, $\varkappa > 0$, μ — параметры, а потенциал самодействия является разностью кулоновского и экранированного кулоновского потенциалов. Подобные потенциалы (например, двойной потенциал Юкавы) возникают при описании реальных взаимодействий.

Хорошо известно, что при $\varepsilon = 0$ собственные значения $\lambda = \lambda_n(\varepsilon)$ задачи (1), (2) имеют вид

$$\lambda_n(0) = -\frac{1}{4n^2}, \quad n = 1, 2, \dots, \qquad (3)$$

где n — главное квантовое число. Пусть теперь ε не равно нулю. Рассмотрим случай, когда число n велико. Для определенности будем считать, что λ имеет порядок ε. Тогда n имеет порядок $\varepsilon^{-1/2}$.

Пусть $p = n - \mid m \mid -1$, где m — магнитное квантовое число. В данной работе для каждого $p = 0, 1, 2, \dots$ найдены асимптотические собственные значения

$$\lambda_{n,i}^{(p)}(\varepsilon) = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon \left(\frac{\ln n}{4\pi n^2} + \frac{E_{1,i}^{(p)}}{n^2} \right) + O\left(\frac{\varepsilon \ln n}{n^{5/2}} \right), \quad n \to \infty, \qquad (4)$$

где $i = 0, \dots, I_p$, которые расположены вблизи верхних границ спектральных кластеров. В частности, при $p = 0$ существует одно число

$$E_{1,0}^{(0)} = \frac{1}{4\pi} \left(5 \ln 2 + \gamma - \mu f_0 \left(\frac{b_0^2}{2} \right) \right),$$

[1] Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012)

где $\gamma \approx 0.57$ — постоянная Эйлера, $b_0 = 2\varkappa\ n^{3/2}\varepsilon^{3/4}$, $f_0(x) = e^x \mathrm{Ei}(-x)$. Здесь

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^t}{t}\ dt$$

обозначает интегральную показательную функцию.

При $p = 1$ существуют два числа

$$E_{1,0}^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\left(5\ln 2 + \gamma - \frac{5}{8} - \right.$$

$$\left. -\mu\left[\frac{1}{\sqrt{2}b_0}\left(3f_2\left(\frac{b_0^2}{2}\right) - f_1\left(\frac{b_0^2}{2}\right)\right) - \frac{3}{4}f_0\left(\frac{b_0^2}{2}\right)\right]\right),$$

$$E_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{4\pi}\left(5\ln 2 + \gamma - \frac{3}{4} - \mu\left[\frac{\sqrt{2}}{b_0}f_2\left(\frac{b_0^2}{2}\right) - \frac{1}{2}f_0\left(\frac{b_0^2}{2}\right)\right]\right),$$

где $f_1(x) = e^{x/2}W_{-3/2,0}(x)$, $f_2(x) = e^{x/2}W_{-5/2,0}(x)$. Здесь $W_{\varkappa,\mu}(z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция Уиттекера. Она связана с вырожденной гипергеометрической функцией $\Psi(a, b; z)$ соотношением $W_{\varkappa,\mu}(z) = z^{\mu+1/2}e^{-z/2}\Psi(\mu - \varkappa + 1/2, 2\mu + 1; z)$.

Соответствующие (4) асимптотические собственные функции локализованы вблизи окружности в пространстве $\mathbb{R}^3$, на которой потенциал самодействия в (1) имеет логарифмическую особенность [1]. Поэтому второй член в формуле (4) содержит $\ln n$. Так как он имеет порядок $(\varepsilon \ln n)/n^2$, а внутри кластера соответствующая поправка принимает значения порядка ε/n^2, то числа $\lambda_{n,i}^{(p)}(\varepsilon)$ расположены вблизи верхних границ спектральных кластеров. Эти кластеры образуются вокруг уровней энергии (3) невозмущенного оператора (при $\varepsilon = 0$).

Литература

1. Pereskokov A.V. Asymptotics of the spectrum of a three-dimensional Hartree type operator near upper boundaries of spectral clusters / A.V. Pereskokov // J. Math. Sci. — 2024. — V. 281, № 4. — P. 612–624.