3. Pastukhova S.E. Improved homogenization estimates for higher-order elliptic operators in energy norms / S.E. Pastukhova // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — V. 45. — P. 3351–3369.

4. Пастухова С.Е. Оценки погрешности усреднения эллиптических операторов на основе корректоров первого и второго порядка / С.Е. Пастухова // Матем. сб. — 2024. — Т. 215, № 7. — С. 74–95.

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА САМОСОГЛАСОВАННЫХ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ [1]

А.В. Перескоков (Москва, НИУ МЭИ, НИУ ВШЭ)
pereskokov62@mail.ru

Рассмотрим спектральную задачу в $L^2(\mathbb{R}^3)$ для атома водорода в однородном магнитном поле, возмущенном самосогласованным полем

$$\left(\mathbb{H}_0 + \varepsilon \mathbb{M}_3 + \varepsilon^2 \mathbb{V}\right) \psi(x) = E\psi(x), \tag{1}$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1. \tag{2}$$

Здесь

$$\mathbb{H}_0 = -\Delta - |x|^{-1}, \qquad \mathbb{M}_3 = ix_2 \frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1 \frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}(x_1, x_2) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \left((x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2\right) \mid \psi(x') \mid^2 dx', \tag{3}$$

через $x = (x_1, x_2, x_3)$ обозначены декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, Δ — оператор Лапласа, магнитное поле направлено вдоль оси x_3, малый параметр $\varepsilon > 0$ в (1) пропорционален напряженности поля. Самосогласованный потенциал $\mathbb{V}$, задаваемый формулой (3), представляет собой интегральную нелинейность типа Хартри.

Пусть числа $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условиям $1 \ll n \lesssim \varepsilon^{-1/4}$ и $5^{-1/2} n < |m| < n$. Тогда у задачи (1), (2) имеется серия асимптотических собственных значений

$$E_k = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon m + \frac{1}{2}\varepsilon^2 n^2 (n^2 + m^2) +$$

$$+\varepsilon^2 n^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{a}\xi^2/4} \int_{\theta_-}^{\theta_+} \frac{(|J_k^+(\theta,\xi)|^2 + |J_k^-(\theta,\xi)|^2)\cos^3\theta}{\sqrt{a\cos^2\theta - 1}} d\theta \, d\xi \times$$

[1] Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012).

$$\times\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{a}\xi^2/4}\int_{\theta_-}^{\theta_+}\frac{(|J_k^+(\theta,\xi)|^2+|J_k^-(\theta,\xi)|^2)\cos\theta}{\sqrt{a\cos^2\theta-1}}d\theta\, d\xi\right)^{-1}+$$

$$+O(n^{-4-2/5}),\qquad n\to\infty, \tag{4}$$

где $k=0,1,2,\ldots,$

$$a=\frac{n^2}{|m|^2},\qquad \theta_\pm=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{a}},$$

а функции $J_k^\pm(\theta,\xi)$ определены равенствами

$$J_k^\pm(\theta,\xi)=\int_{\mathbb{R}^2}\exp\Big\{\frac{\sqrt{5}\sqrt{a}\xi}{\sqrt[4]{5-a}\;2\sqrt{2}}(t\sin\theta\mp r\sqrt{\cos^2\theta-a^{-1}})+\frac{5\sqrt{a}}{4\sqrt{5-a}}\times$$

$$\times\Big\{-t^2\Big[\frac{(2\sqrt{a}-\sqrt{5-a})\sqrt{5-a}}{5a}+\sin^2\theta\Big]-$$

$$-r^2\Big[\frac{(2\sqrt{a}-\sqrt{5-a})(4\sqrt{a}+\sqrt{5-a})}{5a}-\sin^2\theta\Big]\pm$$

$$\pm 2tr\sin\theta\sqrt{\cos^2\theta-a^{-1}}\Big\}-\frac{i\sqrt{5}\sqrt{a}\xi}{\sqrt[4]{5-a}\;2\sqrt{2}}(r\sin\theta\pm t\sqrt{\cos^2\theta-a^{-1}})+$$

$$+\frac{i5\sqrt{a}}{4\sqrt{5-a}}\Big\{\pm(t^2-r^2)\sin\theta\sqrt{\cos^2\theta-a^{-1}}-$$

$$-2tr\Big[\frac{(2\sqrt{a}-\sqrt{5-a})\sqrt{5-a}}{5a}-\sin^2\theta\Big]\Big\}\Big\}H_k(t+ir)dt\,dr.$$

Здесь $H_k(z)$, $k=0,1,2,\ldots$ — полиномы Эрмита. Формула (4) описывает расщепление спектра, так как поправка в ней зависит от третьего квантового числа k. Выражения для соответствующих асимптотических собственных функций приведены в [1]. При их выводе были использованы результаты работы [2].

Таким образом, на уравнения самосогласованного поля распространены методы, использованные ранее в [2]. Отметим, что при таком обобщении приходится дополнительно вычислять асимптотику квантовых средних.

Литература

1. Перескоков А.В. Об асимптотике гипергеометрических когерентных состояний и собственных функций атома водорода в

магнитном поле. Нахождение самосогласованных уровней энергии / А.В. Перескоков // ТМФ. — 2025. — Т. 222, № 3. — С. 531–550.

2. Перескоков А.В. Асимптотика спектра атома водорода в магнитном поле вблизи нижних границ спектральных кластеров / А.В. Перескоков // Тр. ММО. — 2012. — Т. 73, № 2. — С. 277-325.

О НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА[1]

Г.Г. Петросян (Воронеж, ВГПУ)
garikpetrosyan@yandex.ru

В сепарабельном банаховом пространстве E рассматривается задача Коши для дифференциального включения смешанного типа

$$^{CG}D_0^{\alpha}x(t) + A_1 {}^{CG}D_0^{\alpha-1}x(t) + A_2x'(t) + Bx(t) \in F(t, x(t)),\ t \in [0, a],$$

$$x(0) = x_0,\ x'(0) = x_1,$$

где $^{CG}D_0^{\alpha}$ и $^{CG}D_0^{\alpha-1}$ – дробные производные Капуто-Герасимова соответственно порядков α и $\alpha - 1$, $\alpha \in (1, 2)$, $A_1 : D(A_1) \subset E \to E$ и $A_2 : D(A_2) \subset E \to E$ – линейные замкнутые операторы, порождающие соответственно равномерно ограниченные C_0–полугруппы операторов $\{T_1(t), t \geqslant 0\}$ и $\{T_2(t), t \geqslant 0\}$ в E. Оператор $B = A_2 \circ A_1$, нелинейность $F : [0, a] \times E \multimap E$ – многозначное отображение типа Каратеодори и $x_0, x_1 \in E$ наперед заданы.

Литература

1. Афанасова М.С. Об обобщенной краевой задаче для управляемой системы с обратной связью и бесконечным запаздыванием / М.С. Афанасова, В.В. Обуховский, Г.Г. Петросян // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2021. – Т. 31, № 2. – С. 167-185.

2. Петросян Г.Г. О задаче Коши для дифференциального включения дробного порядка с нелинейным граничным условием / Г.Г. Петросян, М.С. Афанасова // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика. – 2017. – № 1. – С. 135-151.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда в рамках научного проекта № 22-71-10008.