**Теорема 1.** *Пусть* $\hat{f} \in \mathbb{L}_1(D_1)$, *а* $\psi$ *такова, что* $0 < c_\psi < \infty$, *см.* (3). *Тогда интеграл в формуле* (2) *сходится поточечно к* $u$.

**Теорема 2.** *Пусть* $u(t,x,y) \in \mathcal{H}_1$. *Пусть решение* $\Psi(t,x,y) \in \mathcal{H}_1$, *а* $\psi(t,x)$ *таково, что* $0 < c_\psi < \infty$. *Тогда 1)* $\tilde{u}(t,x,y) \in \mathcal{H}_1$, *где*

$$\tilde{u}(t,x,y) = \frac{1}{c_\psi} \int_{A_1}^{A_2} \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \int_{|\vec{\chi}_s|<\rho} F(g)\Psi_g(t,x,y)\, dt_s\, dx_s d\phi\, \frac{da}{a^3},$$

$0 < A_1 < A_2 < \infty$, $-\infty < \Phi_1 < \Phi_2 < \infty$, $|\vec{\chi}_s|^2 = c^2 t_s^2 + x_s^2$, $0 < \rho < \infty$, *2)*

$$\lim_{\substack{A_1 \to 0,\, A_2 \to \infty \\ \Phi_1 \to -\infty,\, \Phi_2 \to \infty \\ \rho \to \infty}} \|u(\cdot,\cdot,y) - \tilde{u}(\cdot,\cdot,y)\| = 0.$$

## Список литературы


[1] Городницкий Е. А., Перель М. В. *Обоснование основанной на вейвлетах интегральной формулы для решения волнового уравнения.* Зап. научн. сем. ПОМИ, 461.0 (2017), 107-123.

[2] Perel M., Gorodnitskiy E. *Integral representations of solutions of the wave equation based on relativistic wavelets.* J. Phys. A: Math. Theor., 45 (2012), 385203.

[3] Antoine J. P. et al *Two-dimensional wavelets and their relatives.* Cambridge University Press: 2008.

[4] Grossman A., Morlet J., and Paul T. *Integral transforms associated to square integrable representations.* J. Math. Phys, 27 (1985), 2473-2479.


# ОБ АСИМПТОТИКЕ САМОСОГЛАСОВАННЫХ УРОВНЕЙ ЭНЕРГИИ


ПЕРЕСКОКОВ А.В.

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Россия

Национальный исследовательский университет «МЭИ», Россия

pereskokov62@mail.ru


Рассмотрим спектральную задачу в $L^2(\mathbb{R}^3)$ для атома водорода в однородном магнитном поле, возмущенном самосогласованным полем

$$\left(\mathbb{H}_0 + \varepsilon\mathbb{M}_3 + \varepsilon^2\mathbb{V}\right)\psi(x) = E\psi(x), \quad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1. \tag{1}$$

Здесь

$$\mathbb{H}_0 = -\Delta - |x|^{-1}, \qquad \mathbb{M}_3 = ix_2\frac{\partial}{\partial x_1} - ix_1\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^3}\big((x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2\big) \mid \psi(x') \mid^2 dx', \qquad (2)$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$ — декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$, $\Delta$ — оператор Лапласа, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Самосогласованный потенциал (2) представляет собой интегральную нелинейность типа Хартри.

Пусть числа $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условиям $1 \ll n \lesssim \varepsilon^{-1/4}$ и $5^{-1/2}n < |m| < n$. Тогда у задачи (1) имеется серия асимптотических собственных значений

$$E_k = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon m + \frac{1}{2}\varepsilon^2 n^2(n^2 + m^2) +$$
$$+\varepsilon^2 n^4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{a}\xi^2/4}\int_{\theta_-}^{\theta_+}\frac{(|J_k^+(\theta,\xi)|^2 + |J_k^-(\theta,\xi)|^2)\cos^3\theta}{\sqrt{a\cos^2\theta - 1}}d\theta\, d\xi \times$$
$$\times\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sqrt{a}\xi^2/4}\int_{\theta_-}^{\theta_+}\frac{(|J_k^+(\theta,\xi)|^2 + |J_k^-(\theta,\xi)|^2)\cos\theta}{\sqrt{a\cos^2\theta - 1}}d\theta\, d\xi\right)^{-1} +$$
$$+O(n^{-4-2/5}), \qquad n \to \infty, \qquad (3)$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$, $a = n^2/|m|^2$, $\theta_\pm = \pm\arccos(1/\sqrt{a})$, а функции $J_k^\pm(\theta, \xi)$ определены равенствами

$$J_k^\pm(\theta,\xi) = \int_{\mathbb{R}^2}\exp\Big\{\frac{\sqrt{5}\sqrt{a}\xi}{\sqrt[4]{5-a}\;2\sqrt{2}}(t\sin\theta \mp r\sqrt{\cos^2\theta - a^{-1}}) + \frac{5\sqrt{a}}{4\sqrt{5-a}}\times$$
$$\times\Big\{-t^2\Big[\frac{(2\sqrt{a} - \sqrt{5-a})\sqrt{5-a}}{5a} + \sin^2\theta\Big] -$$
$$-r^2\Big[\frac{(2\sqrt{a} - \sqrt{5-a})(4\sqrt{a} + \sqrt{5-a})}{5a} - \sin^2\theta\Big] \pm$$
$$\pm 2tr\sin\theta\sqrt{\cos^2\theta - a^{-1}}\Big\} - \frac{i\sqrt{5}\sqrt{a}\xi}{\sqrt[4]{5-a}\;2\sqrt{2}}(r\sin\theta \pm t\sqrt{\cos^2\theta - a^{-1}}) +$$
$$+\frac{i5\sqrt{a}}{4\sqrt{5-a}}\Big\{\pm(t^2 - r^2)\sin\theta\sqrt{\cos^2\theta - a^{-1}} -$$
$$-2tr\Big[\frac{(2\sqrt{a} - \sqrt{5-a})\sqrt{5-a}}{5a} - \sin^2\theta\Big]\Big\}\Big\}H_k(t + ir)dt\, dr.$$

Здесь $H_k(z)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ — полиномы Эрмита. Формула (3) описывает расщепление спектра. Выражения для соответствующих асимптотических собственных функций приведены в [1]. Таким образом, на уравнения самосогласованного поля распространены методы, использованные ранее в [2, 3]. Отметим, что при таком обобщении приходится дополнительно вычислять асимптотику квантовых средних.

Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012).

### Список литературы

[1] Перескоков А.В. *Об асимптотике гипергеометрических когерентных состояний и собственных функций атома водорода в магнитном поле. Нахождение самосогласованных уровней энергии.* ТМФ, 222, № 3 (2025), 531-550.

[2] Карасев М.В., Новикова Е.М. *Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле.* ТМФ, 108, № 3 (1996), 339-387.

[3] Перескоков А.В. *Асимптотика спектра атома водорода в магнитном поле вблизи нижних границ спектральных кластеров.* Тр. ММО, 73, № 2 (2012), 277-325.

## О ДЕФОРМАЦИЯХ ФАВАРА МНОГОЧЛЕНОВ ЯКОБИ

ПЕТРОВ В. Э.[1,a], ПЕТРОВ Ф. В.[2,b]

[1]ООО “ТВЭЛЛ”, Санкт-Петербург, Россия
[2]СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия
[a]petrov_twell@list.ru, [b]fedyapetrov@mail.ru

В теории ортогональных многочленов одним из основных является трехчленное рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют три последовательных многочлена [1, гл. 10]:

$$p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)p_n(x) - C_n p_{n-1}(x). \tag{1}$$

Теорема Фавара [2] утверждает, что если $A_n, B_n, C_n$ — вещественные числа при всех $n = 1, 2, \ldots$, причем $A_n > 0$ и $C_n > 0$, то последовательность многочленов, заданая соотношением (1) и начальными условиями $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = ax + b$, $a > 0$, будет ортогональной относительно некоторой неотрицательной конечной меры Лебега-Стильтьеса на вещественной оси.