Вступительные задания
НИУ «Высшая школа экономики»
Факультет Компьютерных наук
Магистерская программа
"Наука о данных"

1. Задача 1 (10 points)
   - Multiply (5 points)
   $$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$
   - Solve (5 points)
   $$\begin{pmatrix}1 & x\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2 + 2\begin{pmatrix}1 & x\\ 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$
2. Задача 2 (10 points)
   - (5 баллов) Пусть
   $$L(x,y) = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & x\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$
   Найти градиент $L(x,y)$ в точке (1,1).
   - (5 баллов) Найти $x, y \in [-1, 1]$, такие что функция
   $$L(x,y) = \begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x & y\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 1\end{pmatrix}.$$
   достигает своего минимального значения.
3. Задача 3 (10 баллов)
   - (5 баллов) Для двух независимых непрерывных равномерно распределённых случайных величин $k_1 \sim U(1,5)$, $k_2 \sim U(3,7)$ найти вероятность:
   $$\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & k_1\\ k_2 & 0\end{pmatrix} \in [4, 10].$$
   - (5 баллов) Проверить при каких допустимых значениях параметров a, b, c случайные величины $x, y \in \{0, 1, 2\}$ независимы (если такие параметры существуют), если известна таблица вероятностей
   $$P_{ij} = p(x = i, y = j)$$
   $$P = \{P_{ij}\} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix}a & 2 & 3\\ 1 & b & 1\\ 2 & 3 & c\end{bmatrix}.$$

4. Задача 4 (10 баллов)

   - (5 баллов) Вычислить количество строк длины 10, состоящих из 0, 1 или 2, таких, что в них не встречается ни подстрока '01', ни подстрока '20'.
   - (5 баллов) Дан код

```
s=0
for a in range(1, 40):
    for b in range(a, a+3):
        for c in range(a, b+1):
            s=s+a+b+c
print(s)
```

     Что будет напечатано после его выполнения?

5. Задача 5 (10 баллов)

   - (5 баллов) Заданы множества $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$ и предикаты $P(x, y) = (x > y)$, $Q(x, y) = (xy < 10)$, проверить истинность утверждения

$$\forall x \in X, \exists y \in Y, (P(x, y) \to (Q(x, y) \to \neg P(x, y))) \vee P(x, y)$$

   - (5 points) On a certain social network, there are 2019 users, some pairs of which are friends, where friendship is a symmetric relation. Initially, there are 1010 people with 1009 friends each and 1009 people with 1010 friends each. However, the friendships are rather unstable, so events of the following kind may happen repeatedly, one at a time:

     Let A, B, and C be people such that A is friends with both B and C, but B and C are not friends; then B and C become friends, but A is no longer friends with them.

     Prove that, regardless of the initial friendships, there exists a sequence of such events after which each user is friends with at most one other user.