

На правах рукописи

**Москалик Алексей Витальевич**

**МЕТОДЫ ФОРМИРОВАНИЯ ПОРТФЕЛЯ  
ГОСУДАРСТВЕННЫХ ЦЕННЫХ БУМАГ**

Специальность 08.00.13 -  
математические и инструментальные методы экономики

Автореферат диссертации на соискание ученой степени  
кандидата экономических наук

Москва - 2005

Работа выполнена на кафедре "Бизнес-аналитики"  
Государственного университета - Высшей школы экономики

Научный руководитель: доктор экономических наук, профессор  
Кравченко Татьяна Константиновна

Официальные оппоненты: доктор экономических наук, профессор  
Егорова Наталья Евгеньевна

кандидат экономических наук  
Герасимов Александр Валентинович

Ведущая организация: Московский государственный университет  
экономики, статистики и информатики  
(МЭСИ)

Защита диссертации состоится "24" марта 2005 года в 14-00 часов на заседании  
диссертационного совета Д 212.048.02 в Государственном университете -  
Высшей школе экономики по адресу: 101990, Москва, ул. Мясницкая, д. 20,  
ауд. 311

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Государственного  
университета - Высшей школы экономики

Автореферат разослан " \_\_\_\_ " февраля 2005 года.

Ученый секретарь  
диссертационного совета,  
доктор экономических наук

Смирнов С.Н.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность исследования.** Развитая финансовая система является одним из необходимых условий полноценного функционирования экономики. Более чем за десять последних лет отечественная финансовая система претерпела значительные изменения, однако этап становления еще не завершился, и остается неоспоримым факт нереализованного потенциала для дальнейшего развития и совершенствования. К примеру, показатели количества профессиональных участников фондовых рынков РФ и США отличаются на порядок.

С началом функционирования фондового рынка в РФ стало востребованным решение прикладных задач инвестирования денежных средств в финансовые активы. По данному направлению исследовательской деятельности имеется достаточно развитая теоретическая база, известны десятки методов и подходов решения инвестиционных задач. Тем не менее, практическая реализация каждый раз требует адаптации и модификации, особенно для применения в условиях отечественного развивающегося финансового рынка.

Отдельно отмечается необходимость дополнительного исследования математических методов и инструментальных средств для решения прикладных инвестиционных задач с ярко выраженными отличительными свойствами. К их числу относится задача формирования портфеля государственных ценных бумаг (ГЦБ). Данная задача представляет собой самостоятельное направление исследований, имеющих важное теоретическое и практическое значение по следующим причинам:

1) масштабность данного сектора финансового рынка (доля по объемам и количеству заключаемых сделок составляет от 10% до 70% от общего объема финансового рынка), а также значимость функций, выполняемых ГЦБ (финансирование дефицита государственного бюджета, управление денежной массой, формирование соответствующего уровня доходности финансового рынка, регулирование темпов инфляции) обуславливает их важную роль как инструмента макроэкономической политики и государственного регулирования;

2) отсутствие адекватных моделей и методов формирования портфеля ГЦБ, учитывающих особенности рассматриваемого сектора рынка (специфика целей эмиссии и обращения, единственность эмитента для всего объема ценных бумаг, принадлежность к классу ценных бумаг с фиксированным доходом).

В связи с перечисленными причинами исследуемая в работе проблема является актуальной.

**Цель исследования** заключается в построении и реализации модели формирования портфеля ГЦБ.

Для достижения поставленной цели в рамках исследования **решаются следующие задачи:**

- определение характера и степени влияния свойств ГЦБ на процесс инвестирования;
- формулировка математической задачи формирования портфеля ГЦБ;
- выбор метода решения задачи формирования портфеля ГЦБ;
- построение модели формирования портфеля ГЦБ на основе выбранного метода;
- проведение экономико-математического анализа модели, оценка риска, доходности, сравнительная оценка эффективности портфелей ГЦБ;
- разработка инструментальных средств для реализации модели формирования портфеля ГЦБ;
- осуществление экспериментальных расчетов и анализ полученного результата.

**Объектом исследования** является процесс формирования портфеля ГЦБ, в качестве **предмета исследования** выбраны методы формирования портфеля ценных бумаг.

**Теоретические и методологические основы исследования.** В качестве источников, составивших базу исследования, использованы отечественная и зарубежная монографическая литература, научные публикации в периодической печати, официальные статистические данные по рынку государственных ценных бумаг Российской Федерации, а также методическая, нормативная, учетная и отчетная документация кредитных организаций.

В обобщении методов решения инвестиционных задач, подходов анализа и моделирования финансового рынка использованы работы зарубежных авторов: Марковица Г., Шарпа В., Навроцки Д., Самуэльсона П., Хиршлейфера Д., Фабоцци Ф., Росса С., Ролла Р., и др., а также работы отечественных авторов: Рязанова Б., Игнатушенко В., Шведова А., Бабикова В., Касимова Ю., Шапкина А., Егоровой Н., Смулова А. и др. В вопросах исследования ГЦБ, как отдельного экономического объекта, и как составной части государственных финансов, использованы работы: Фишера И., Рэй К., Дугласа Л., Головачева Д., Баринаова Э., Хмыз О., Мещеровой Н., и др. По вопросам математических методов в составе теоретической базы рассмотрены работы: Васильева Ф., Бахвалова Н., Вержбицкого В., Афанасьева В. и др.

Разработка инструментальных средств реализации модели формирования портфеля ГЦБ опирается на численные методы, теорию вероятностей, методы математической статистики, теорию вычислительных систем и машин, современные информационные технологии.

**Научная новизна** исследования заключается в следующем:

- сформулирована математическая задача, в которой удалось учесть выделенные свойства ГЦБ за счет использования специальной модели динамики стоимости ценных бумаг;
- сформирован вектор критериев, позволяющий провести экспертную сравнительную оценку методов формирования портфеля ценных бумаг;

- построена целевая функция решения оптимизационной задачи поиска эффективных портфелей ГЦБ, с применением мультипликативной свертки, сводящей область допустимых значений параметра рисковости инвестора к конечному интервалу;

- на основе градиентного метода разработан алгоритм поиска множества эффективных портфелей ценных бумаг, позволяющий за одну итерацию совершать обмен более чем двух ценных бумаг;

- предложен подход сравнительной оценки эффективности портфеля ГЦБ в условиях неопределенной ставки безрискового актива.

**Практическая значимость работы.** Основные положения, выводы и рекомендации, полученные в ходе диссертационной работы, обеспечивают научную и практическую базу для решения прикладных задач управления финансовыми ресурсами с применением многокритериального анализа риска и доходности портфеля.

Разработанная модель формирования портфеля ГЦБ может использоваться в учебном процессе в качестве наглядного пособия по теории фондового рынка.

К числу наиболее существенных результатов, полученных лично автором, относятся: модель формирования портфеля ГЦБ, основанная на решении двухкритериальной оптимизационной задачи максимизации ожидаемого дохода и минимизации величины ожидаемых потерь; инструментальные средства расчета величины ожидаемых потерь портфеля ГЦБ; алгоритм поиска точек множества эффективных портфелей и его реализация в инструментальных средствах.

**Апробация исследования.** Основные положения по теме исследования обсуждены на научном семинаре кафедры "Бизнес-аналитики" ГУ-ВШЭ. Тезисы доклада на тему "Формирование портфеля государственных ценных бумаг" представлены на Шестом всероссийском симпозиуме "Стратегическое планирование и развитие предприятий". Результаты работы, касающиеся методов оценки эффективности инвестирования изложены на межбанковских заседаниях и круглых столах, получена положительная оценка специалистов финансового рынка. Методические разработки автора использованы при постановке и реализации задач контроля и управления финансовыми рисками в ряде кредитных организаций: Инвестиционном коммерческом банке "Восток-Запад", ТрансКредитБанке, Банке ЗЕНИТ.

**Публикации.** Основные положения, выводы и предложения, содержащиеся в данной работе, изложены в пяти научных публикациях, общим объемом 2,58 п. л.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, содержит библиографию из 136 наименований, объем диссертации 140 страниц. Имеются таблицы, пояснительные схемы, графики и приложения

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**В первой главе** "Анализ процесса инвестирования в государственные ценные бумаги" обобщены и проанализированы свойства задачи инвестирования в ГЦБ, поставлена математическая задача формирования портфеля.

Задача инвестирования в ГЦБ обладает набором ярко выраженных отличительных свойств, которые могут быть разделены на две группы: 1) *свойства ценных бумаг*, присущие только этому финансовому активу; 2) *свойства финансового рынка*, на котором рассматриваемые ценные бумаги имеют обращение.

*Свойства ГЦБ*, присущие только этому финансовому активу и влияющие на модель формирования портфеля ценных бумаг, следующие:

- эти ценные бумаги выполняют особую роль в экономике: они одновременно являются одним из инструментов финансирования и выступают как макроэкономический регулятор;

- эмитентом является государство, поэтому рассматриваемый финансовый актив требует специального подхода при расчете финансового риска инвестиций;

- весь объем выпущенных и обращающихся на финансовом рынке ГЦБ относится к одному эмитенту, поэтому они имеют бóльший список общих свойств, чем другие финансовые активы;

- эти ценные бумаги обладают высокой степенью типизации, а именно, в отличие от других финансовых активов, имеют конечное число вариантов структуры выплаты доходов и погашения;

- рассматриваемые ценные бумаги относятся к классу финансовых активов с фиксированным доходом, другими словами, они имеют конечный срок обращения и известный график выплаты доходов.

*Свойства и отличительные черты финансового рынка ГЦБ*, на котором эти ценные бумаги имеют обращение, следующие:

- значительные доли по объемам и количеству сделок, по сравнению с другими сегментами финансового рынка;

- широкий состав участников, сглаживающий рыночные аномалии и обеспечивающий достаточный уровень ликвидности;

- развитая нормативная база и стандартизованные правила заключения торговых сделок и проведения расчетов, сводящие к минимуму операционные риски;

- этот сегмент финансового рынка выступает в качестве индикатива и, соответственно, является ориентиром для других сегментов финансового рынка;

- равная осведомленность всех участников рассматриваемого сегмента финансового рынка;

- развитая техническая база, позволяющая вести статистические наблюдения за ходом торгов.

Выделены два свойства, оказывающие влияние на постановку математической задачи формирования портфеля: 1) принадлежность к классу ценных бумаг с фиксированным доходом; 2) единственность эмитента. Первое свойство обуславливает проведение исследования рыночной стоимости ГЦБ в координатах "доходность" - "срок до погашения", второе свойство обосновывает предположение о единой функциональной зависимости между доходностью и сроком до погашения (т.н. "кривая доходности") для всех рассматриваемых ценных бумаг.

С учетом выделенных свойств динамика стоимостей ГЦБ по времени  $\Delta\vec{p}$  разложена на два направления: (1)  $\Delta\vec{p}_{duration}$  - движение вдоль кривой доходности при уменьшении дюрации<sup>1</sup>, и (2)  $\Delta\vec{p}_{yieldcurve}$  - изменение формы и положения кривой доходности при воздействии экзогенных факторов:

$$\Delta\vec{p} = \Delta\vec{p}_{duration} + \Delta\vec{p}_{yieldcurve} \quad (1)$$

Сформулирована математическая задача, вобравшая в себя выделенные отличительные свойства за счет использования модели кривой доходности:

*Найти структуру портфеля ГЦБ  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  такую, что функция изменения ожидаемой стоимости портфеля  $\Delta V^{expected} = \Delta V^{expected}(\vec{x}, \Delta\vec{p}^{expected})$  достигает своего максимума на множестве допустимых портфелей<sup>2</sup>, изменения рыночной стоимости ценных бумаг происходят в соответствии с моделью (1).*

**Во второй главе** "Модель формирования портфеля государственных ценных бумаг" проведен комплексный анализ методов формирования портфеля. С помощью построенного вектора критериев выбраны методы современной портфельной теории, и на их основе построена модель формирования портфеля ГЦБ.

Выбор метода решения задачи формирования портфеля разделен на два этапа. На первом этапе проведена классификация, основанная на типах используемых моделей экономических процессов. На втором этапе, с помощью построенного вектора критериев, проведена экспертная сравнительная оценка и сделан выбор.

Методы формирования портфеля классифицированы на следующие группы: бесфакторные, однофакторные, многофакторные. Названия групп методов обусловлены количеством факторов в оценке ожидаемой стоимости портфелей ценных бумаг. Основу группы *бесфакторных методов* составляют методы технического анализа. Группа *однофакторных методов* базируется на простых и тривиальных алгоритмах. Ярким примером является индексный метод формирования портфеля, когда портфель строится в соответствии с выбранным рыночным индексом являющимся единственным фактором

<sup>1</sup> Под дюрацией понимается величина, равная сумме всех сроков платежей по данной ценной бумаге, средневзвешенных по суммам. Измеряется в днях, неделях, месяцах, годах и т.п.

<sup>2</sup> Множество допустимых портфелей определяется ограничениями инвестиционной задачи: объемом и сроками инвестиций, предопределенным набором финансовых активов.

ожидаемой стоимости портфеля. Наиболее многочисленная группа *многофакторных методов* содержит в своей основе методы, основанные на экономико-математических моделях ожидаемой стоимости портфеля.

Группы методов оценены с помощью построенного вектора критериев. В основу вектора вошли заимствованные из теории информации критерии качества, адаптированные для решения данной задачи. Вектор расширен также критериями, заимствованными из системного анализа.

*Репрезентативность* метода оценивается, во-первых, правильностью применяемой концепции, и, во-вторых, в обоснованностью отбора существующих признаков и причинно-следственных связей. *Достаточность* рассматривается с точки зрения полноты предоставляемой информации для принятия решения. *Доступность* метода оценивается как прозрачность и понятность получения результата. В отличие от оценки репрезентативности, методы оцениваются с позиции понятности результатов для конечных потребителей. *Устойчивость* метода означает степень влияния незначительных изменений исходных данных на конечный результат. Оценка по этому критерию объединена с оценкой *достоверности*, под которой понимается проверка методов в исторической ретроспективе (так называемый back-testing). Под *управляемостью* метода подразумевается возможность его адаптации для решения разного рода узкоспециализированных задач в рамках одной проблемы формирования портфеля ценных бумаг. *Расширяемость* метода означает возможность использования нового набора исходных данных и, также новых результатов исследований. Под *масштабируемостью* подразумевается возможность увеличения размерности задачи. Сравнительная оценка методов представлена в табл. 1.

Таблица 1

**Сравнительная оценка групп методов формирования портфеля ценных бумаг**

Критерий\группа методов	Бесфакторные	Однофакторные	Многофакторные
репрезентативность	3	2	1
достаточность	3	2	1
доступность	3	1	2
устойчивость и достоверность	3	1	2
управляемость	3	2	1
расширяемость	2	3	1
масштабируемость	1	2	2
Итого:	18	13	10

Группы методов по каждому из критериев на основе экспертной оценки упорядочены в порядке убывания предпочтительности по первому, второму и



третьему местам. Далее проведено суммирование набранных позиций. Как видно из приведенного материала, наиболее предпочтительными являются многофакторные методы, занимающие по большинству критериев первое место. На втором месте расположены однофакторные, и на последней позиции бесфакторные. В результате сравнительного анализа для построения модели выбраны многофакторные методы, в частности, методы современной портфельной теории.

Методы современной портфельной теории базируются на предпосылках о рациональном поведении инвестора, при которых инвестор стремится максимизировать ожидаемую выгоду. При оценке ожидаемой выгоды принимаются во внимание как *ожидаемая стоимость* так и *ожидаемая величина потерь* портфеля. Упомянутые характеристики портфеля оцениваются разными способами, но в современной портфельной теории, как в одной из частных случаев задач прикладной математики, предпочтение отдано методам статистического анализа. Поэтому для оценки ожидаемой стоимости и ожидаемой величины потерь портфеля используются математическое ожидание и дисперсия изменения стоимости портфеля, соответственно.

Ожидаемая выгода инвестора описывается посредством функции полезности портфеля с двумя операндами - математическим ожиданием изменения стоимости портфеля и среднеквадратичным отклонением величины изменения стоимости портфеля. В общем виде функция полезности портфеля ГЦБ записывается:

$$U = U(\bar{x}) = U(M(\Delta V), \delta(\Delta V)), \quad (2)$$

где  $U$  - функция полезности, вектор  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  - структура портфеля,  $M(\Delta V)$  - оператор математического ожидания, или центрального момента первого порядка величины относительного изменения стоимости портфеля,  $\delta(\Delta V)$  - среднеквадратичное отклонение величины относительного изменения стоимости портфеля.

Предпосылки рационального поведения инвестора о максимизации ожидаемого дохода и минимизации ожидаемой величины потерь записываются в виде формул частных производных функции полезности:

$$\begin{aligned} \partial U(M(\Delta V), \delta(\Delta V)) / \partial M(\Delta V) &> 0 \\ \partial U(M(\Delta V), \delta(\Delta V)) / \partial \delta(\Delta V) &< 0 \end{aligned} \quad (3)$$

В рамках модели (1) величина математического ожидания изменения стоимости портфеля записывается в виде суммы математических ожиданий от изменений стоимости портфеля ценных бумаг, обусловленных уменьшением дюрации и динамикой кривой доходности. Так как для динамики кривой доходности принимается гипотеза о нормальном законе распределения с нулевым математическим ожиданием, то второе слагаемое приравнивается к нулю, и в рамках сделанных предположений приходим к равенству, что математическое ожидание изменения стоимости портфеля обусловлено только изменением дюрации:

$$\begin{aligned}
M(\Delta V) &= M(\bar{x}, \Delta \bar{p}) = \\
&= M(\bar{x}, \Delta \bar{p}_{duration}) + M(\bar{x}, \Delta \bar{p}_{yieldcurve}) = \\
&= \bar{x}M(\Delta \bar{p}_{duration})
\end{aligned} \tag{4}$$

Среднеквадратичное отклонение изменения рыночной стоимости ГЦБ также разлагается на две составляющие, но так как это не отражается в модели решения задачи формирования портфеля ГЦБ, то среднеквадратичное отклонение изменения стоимости портфеля рассчитывается по формуле:

$$\delta(\Delta V) = \delta(\bar{x}, \Delta \bar{p}) = \sqrt{D(\bar{x}, \Delta \bar{p})} = \sqrt{\bar{x}C_{\Delta p}\bar{x}^T}, \tag{5}$$

где  $C_{\Delta p}$  - матрица, состоящая из коэффициентов взаимных ковариаций изменений рыночных цен  $i$ -х и  $j$ -х ценных бумаг.

С учетом проведенных математических преобразований, задача поиска структуры портфеля сводится к решению многокритериальной оптимизационной задачи:

$$\begin{aligned}
&\max(M(\Delta V_{duration})) \\
&\min(\delta(\Delta V)),
\end{aligned} \tag{6}$$

где

$\Delta V$  - ожидаемое изменение стоимости портфеля;

$$\begin{aligned}
\Delta V &= (\bar{x}, \Delta \bar{p}) = (\bar{x}, \Delta \bar{p}_{duration} + \Delta \bar{p}_{yieldcurve}) = \\
&= \Delta V_{duration} + \Delta V_{yieldcurve}
\end{aligned} \tag{7}$$

$\Delta V_{duration}$ ,  $\Delta V_{yieldcurve}$  - изменения стоимости портфеля из-за изменения дюрации и положения кривой доходности, соответственно;

$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  - вектор долей ценных бумаг в портфеля;

$$\sum_{i=1, N} x_i = 1 \tag{8}$$

$$x_i \geq 0, \forall i = 1, N$$

Решение оптимизационной задачи (6, 7, 8) означает поиск множества точек, удовлетворяющих условиям эффективности по Парето, носящими в современной портфельной теории название *эффективных портфелей*. Очевидно, что наилучшее инвестиционное решение, с точки зрения рационального поведения инвестора, находится на множестве эффективных портфелей. Окончательный выбор зависит от предпочтений инвестора относительно риска и доходности<sup>3</sup>. Задача (6, 7, 8) относится к классу

<sup>3</sup> В финансовой теории вместо величин математического ожидания изменения стоимости портфеля и среднеквадратичного отклонения изменения стоимости портфеля используются пропорциональные им величины, имеющие экономический смысл, соответственно: доходность и риск.

многокритериальных задач, поэтому для ее решения применен метод свертки критериев в единую целевую функцию.

Известно несколько вариантов построения функции свертки. Впервые целевая функция для задачи выбора портфеля предложена Г. Марковицем в 1952 году:

$$U = M(\Delta V) - \delta(\Delta V)/\lambda, \quad (9)$$

где  $\lambda$  - толерантность инвестора к риску. Для  $\lambda = \infty$  основной целью инвестора выступает максимизация доходности, для  $\lambda = 0$  - минимизация риска. Существует также вариант функции полезности, построенный на основе индекса Шарпа:

$$U = (M(\Delta V) - \lambda)/\delta(\Delta V). \quad (10)$$

В этом случае коэффициент  $\lambda$  замещает в формуле Шарпа величину доходности безрискового актива. Для фиксированного  $\lambda$  точка, максимизирующая целевую функцию, соответствует точке касания рыночной кривой и множества допустимых портфелей. Одним из недостатков вышеперечисленных методов является неограниченный интервал коэффициента толерантности инвестора к риску. Другим недостатком является суммирование в функции полезности величин разной размерности.

Чтобы убрать выделенные недостатки целевых функций была использована мультипликативная функция полезности. Свойства функции полезности (3), а также нижеперечисленные свойства:

1.  $U(x_1, x_2)$  - строго возрастающая по  $x_1, x_2$ ;
2.  $U(k_1*x_1, k_2*x_2) = f(k_1, k_2)*U(x_1, x_2)$  - однородная относительно  $x_1, x_2$ ;
3.  $f(1, 1) = 1$ ,

в соответствии с теоремами В. Айкорна однозначно определяют внешний вид искомой целевой функции. После подстановки формул критериев и проведения необходимых математических преобразований портфелей построена следующая целевая функция:

$$U = M(\Delta V)^\lambda * (1/\delta(\Delta V))^{1-\lambda}, \quad (11)$$

где  $\lambda \in [0,1]$  - уровень толерантности инвестора к риску. Для  $\lambda=1$  инвестор максимизирует доходность, для  $\lambda=0$  инвестор минимизирует риск. Ограничение интервала  $\lambda$  является полезным для алгоритмов, основанных на последовательном переборе значений  $\lambda$  при формировании множества эффективных портфелей. Устранено также некорректное суммирование величин разных размерностей. Переход к такому виду функции позволяет также рассматривать коэффициент  $\lambda$  как коэффициент чувствительности или эластичности доходности к риску, чего нельзя было делать при использовании аддитивных функций. Это может быть особенно полезно при аналитическом исследовании множества эффективных портфелей.

В формуле (11), также как в формулах (9) и (10),  $\lambda$  является только относительной оценкой уровня толерантности, и абсолютное значение этой величины не несет экономического смысла. При фиксированном коэффициенте  $\lambda$  целевая функция достигает своего экстремума в точке, принадлежащей множеству эффективных портфелей.

Описав в формуле (11) величины  $\delta$  ( $\Delta V$ ) и  $M(\Delta V)$  (4, 5), а также с учетом проведенных модификаций функции полезности, задача поиска эффективных портфелей записывается следующим образом:

$$\max \left\{ (\bar{x} M(\Delta \vec{p}_{duration}))^\lambda \left( 1 / \sqrt{\bar{x} C_{\Delta p} \bar{x}^T} \right)^{1-\lambda} \right\} \quad (12)$$

$$\sum_{i=1, N} x_i = 1 \quad (13)$$

$$x_i \geq 0, \forall i = 1, N, \quad ,$$

где:

$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  - вектор долей ценных бумаг в портфеля;

$\Delta \vec{p}$  - вектор изменений стоимости ценных бумаг;

$\Delta \vec{p}_{duration}$  - часть вектора изменений стоимости ценных бумаг,

обусловленная уменьшением дюрации;

$M(\Delta \vec{p}_{duration})$  - математическое ожидание вектора изменений стоимости ценных бумаг;

$C_{\Delta p}$  - матрица, состоящая из коэффициентов взаимных ковариаций изменений рыночных цен  $i$ -х и  $j$ -х ценных бумаг;

$\lambda$  - коэффициент, задающий уровень толерантности инвестора к риску.

*Таким образом, модель формирования портфеля государственных ценных бумаг представляет собой решение задачи (12) в условиях ограничений (13). Инвестор делает свой окончательный выбор на основе множества эффективных портфелей, исходя из собственных предпочтений относительно риска и доходности.*

**В третьей главе** "Экономико-математический анализ модели формирования портфеля ГЦБ" решены задачи: оценка доходности и риска портфеля ГЦБ, поиск множества эффективных портфелей ГЦБ. Разработан подход сравнительной оценки эффективности портфелей.

В настоящее время момент наиболее распространены следующие подходы оценки доходности инвестиций: чистый дисконтированный доход (Net Present Value – NPV), внутренняя норма доходности (Internal Rate of Return – IRR), дисконтированный срок окупаемости (Payback Period – PP), индекс рентабельности (Profitability Index – PI), модифицированная внутренняя норма рентабельности (Modified Internal Rate of Return – MIRR).

Для поставленной задачи формирования портфеля ГЦБ сформулированы основные требования к оценке ожидаемой доходности:

- корректность для всех рассматриваемых ценных бумаг, независимо от структуры выплаты дохода;

- использование специфики выбранного финансового актива как актива с фиксированным доходом;

- возможность задания временного горизонта инвестирования.

В соответствии с перечисленными требованиями применены следующие методы оценки ожидаемой доходности портфеля ГЦБ: 1) метод расчета внутренней нормы доходности к погашению (т.н. эффективная доходность), 2) метод линейной экстраполяции динамики рыночных цен.

На основе проведенного расчета за прошедшие даты (back-testing) и экспертных оценок, рекомендуется использовать в случае долгосрочных временных горизонтов инвестирования метод расчета эффективной доходности, а для краткосрочных - метод линейной экстраполяции. В этом случае оцененная ожидаемая доходность имеет наиболее приближенное значение к наблюдаемой доходности.

*Оценка риска* - следующая задача в реализации модели формирования портфеля ГЦБ. В научных публикациях и в решении прикладных задач методы оценки риска классифицированы на три группы: регулятивные, вероятностно-статистические, имитационные. Регулятивные методы ввиду своих недостатков (статичность параметров; отсутствие формализации обоснования применения регуляторов) неприменимы для использования в методике формирования портфеля ценных бумаг. Имитационные методы дают неплохие результаты, но не дают возможность формализовать величину риска в виде аналитических формул, что не позволяет оперировать математическим аппаратом. Для задачи формирования портфеля ГЦБ выбраны *вероятностные методы оценки величины ожидаемых потерь*, в частности, методика RiskMetrics.

Методика RiskMetrics является результатом совместной исследовательской работы компании Reuters и инвестиционной компании J.P.Morgan. Эта методика была представлена в середине 90-х годов и в настоящий момент находит широкое применение в финансовых организациях. Для использования в условиях развивающейся экономики методика RiskMetrics требует адаптации.

В рамках RiskMetrics делается предположение, что законы распределения изменений рыночных цен одинаковы для всех рассматриваемых финансовых активов. Отдельно задаются:

- вид закона распределения выборки наблюдений за рыночными ценами финансового актива;
- временные границы оцениваемого риска;
- уровень доверительной вероятности получаемых оценок риска.

Для расчета величины риска инвестиций в финансовые активы применяется следующая формула:

$$VaR = k_{\alpha} \sqrt{\bar{x} C_{\Delta p} \bar{x}^T}, \quad (14)$$

где:

VaR - величина риска портфеля (Value-at-Risk),

$k_{\alpha}$  - коэффициент уровня доверительной вероятности,

$x = \{x_i\}$  - вектор долей ценных бумаг в портфеле,  
 $C_{\Delta p}$  - ковариационная матрица изменения рыночных цен.

Для расчета величины риска методикой RiskMetrics приведенная формула расчета величины риска (14) адаптирована для применения в условиях рынка государственных ценных бумаг Российской Федерации. Потребовал коррекции порядок расчета элементов ковариационной матрицы в связи с особенностями динамики рыночных цен для развивающихся финансовых рынков, а также в связи с особенностями самих ГЦБ. А именно, введен алгоритм расчета стоимостей в случае неопределенных рыночных цен за дни с недостаточным количеством сделок. Также введена проверка гипотез применяемых законов распределения стоимостей облигаций, ввиду постоянно меняющейся структуры данных. Для статистического анализа использован хи-квадрат критерий согласия.

*Поиск эффективных портфелей ГЦБ* произведен на основе полученных оценок доходности и риска портфелей. Исходя из системы уравнений (12, 13) граница эффективных портфелей в координатах риск-доходность является кусочно-непрерывной и состоит из фрагментов гипербол и прямых. В рамках современной портфельной теории показывается, что множество эффективных портфелей содержит конечную последовательность множества так называемых *угловых портфелей*, при этом любой портфель из множества эффективных портфелей является линейной комбинацией двух смежных угловых портфелей. Методы решения задачи поиска множества оптимальных портфелей делятся на два вида: точные и приближенные - для решения задачи формирования портфеля ГЦБ выбраны последние, ввиду гибкости и простоты реализации.

Вид целевой функции (12), относящейся к классу квадратичных функций, для решения этой задачи позволил выбрать вычислительный метод, основанный на градиентном методе наискорейшего спуска. Для решения аналогичных задач в научной литературе (например, В. Шарпом) предложен вариант градиентного метода, состоящего из двух этапов: (1) определения двух ценных бумаг, соответственно, наилучших и наихудших, исходя из величин градиента целевой функции; (2) определения оптимального количества для обмена найденных ценных бумаг. На каждом шаге итерационного вычислительного процесса происходит один обмен двух ценных бумаг. Очевидно, что модификация вычислительного процесса, увеличивающая число обмениваемых за один шаг ценных бумаг, уменьшит количество итераций, и, соответственно, повысит скорость сходимости и, одновременно, увеличит размерность решаемых задач. Такая модификация была произведена при решении задачи формирования портфеля ГЦБ. Предложен следующий вариант градиентного метода: в исходной точке рассчитывается вектор градиента целевой функции, далее, на основе вектора градиента вычисляется вектор для перехода к следующей итерации путем последовательного удаления компонент, выходящих за рамки ограничений:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_i = 1 \quad (15)$$

Алгоритм представлен следующей последовательностью шагов вычислительной процедуры:

1. Расчет вектора градиента.
2. Расчет проекции вектора градиента.
3. Проверка для условия (15) и исключение компонент, выводящих за пределы ограничения.
4. Расчет проекции получившегося вектора и выполнение п.3
5. Вычисление портфеля, являющегося исходным для следующего итерационного шага, как суммы портфеля и вектора проекции "очищенного" градиента.

*В результате расчетов модели формируется множество точек эффективных портфелей. Точность построения множества выбирается в соответствии с требованиями решаемой задачи. Окончательное решение по формируемому портфелю ГЦБ остается за инвестором, выбор производится исходя из одного или одновременно нескольких параметров: ставки доходности, величины риска, а также величины коэффициента  $\lambda$ .*

Выбор портфеля субъективен, так как помимо рыночной конъюнктуры он зависит от предпочтений инвестора.

Другой задачей, сопряженной с поиском эффективных портфелей, является *оценка эффективности портфеля ГЦБ*, по сути, представляющая собой отдельную и сложную многофакторную задачу. Сравнительная оценка эффективности портфелей ГЦБ является одним из инструментов, позволяющих сделать выбор и принять инвестиционное решение. Для проведения оценки эффективности портфелей государственных ценных бумаг необходимо провести анализ и обосновать предпочтительность одного портфеля относительно другого.

В решении прикладных задач применяется несколько способов оценки эффективности портфеля, среди которых значительную долю занимают достаточно простые, но надежные способы. И по данный момент нет единого способа, позволяющего корректно и полно оценить эффективность управления портфелем. Автором выделено три основные группы методов оценки эффективности управления портфелем. Первую группу составляют методы, *основывающиеся на расчете фактической доходности* от проведенных операций по управлению портфелем и полученной прибыли. Вторая группа состоит из методов, *позволяющих оценить ожидаемую доходность* анализируемых портфелей. В третью группу входят методы, *основанные на интегрированной оценке, включающей доходность и риск портфеля*. Именно по этой причине для целей диссертационной работы выбрана эта группа методов, и на ее основе разработан подход оценки эффективности портфеля ГЦБ.

В рамках современной портфельной теории предложено и апробировано несколько оценок эффективности инвестиций, используемых для анализа и

сравнения взаимных инвестиционных фондов: индекс Шарпа (Sharpe ratio), индекс Трейнора (Treynor ratio), альфа Йенсена (Jensen's Alpha).

Для решения задачи формирования портфеля ГЦБ выбран индекс Шарпа, показывающий отношение превышения доходности анализируемого портфеля над безрисковым активом (например, ГЦБ Казначейства США) к общей величине риска портфеля, измеряемой как стандартное отклонение стоимости портфеля за рассматриваемый период. Индекс Трейнора неприменим, так как содержит коэффициент "бета", не имеющий корректного экономического смысла для ГЦБ; показатель Йенсена также имеет объективные сложности с расчетом эталонного портфеля ГЦБ. Индекс Шарпа, содержащий однозначно определяемые показатели стандартного отклонения стоимости и доходности, с практической точки зрения оказался наиболее удобной оценкой эффективности управления портфелем.

Применительно к задаче оценки эффективности портфеля ГЦБ, возникает неопределенность с вычислением ставки безрискового актива. Стандартным приемом является вычисление ставки безрискового актива  $R_{risk\ free}$  на основе ставок ГЦБ с дюрацией, эквивалентной дюрации оцениваемого финансового актива. Что объективно некорректно для оценки эффективности портфеля ГЦБ.

Разработанная методика основывается на том, что  $R_{risk\ free}$  не является заданной величиной, а выступает переменным параметром. Задача оценки портфелей трансформируется в параметрическую задачу. Для оценки эффективности портфелей ГЦБ рассчитываются две величины:  $RY$  - индекс риск-доход (16), и  $r_{cr}$  - ставка предельной доходности безрискового финансового актива (17):

$$RY = VaR_{portf}/Y_{portf}, \quad (16)$$

где  $Y_{portf}$  - доходность портфеля,  $VaR_{portf}$  - оценочная величина риска портфеля.

$$r_{cr} = (VaR_1 * Y_2 - VaR_2 * Y_1) / (VaR_2 - VaR_1), \quad (17)$$

где  $Y_1, Y_2$  - доходности портфелей,  $VaR_1, VaR_2$  величины рисков портфелей.

Рассчитанная по формуле (16) величина  $RY$  является удельной величиной риска, то есть риска, приходящегося на единицу доходности и может самостоятельно выступать в качестве одной из оценок управления портфелем.

Сравнительная оценка эффективности портфелей проводится следующим образом. Во-первых, исходя из полученных величин  $RY$  определяется первоначальное предпочтение относительно эффективности анализируемых портфелей ГЦБ. Во-вторых, принимая во внимание ожидаемый диапазон величины  $R_{risk\ free}$  и предельную доходность безрискового актива  $r_{cr}$ , формулируется окончательное заключение относительно эффективности портфелей ГЦБ.

Понятно, что если  $r_{cr}$  попадает в ожидаемый диапазон величины  $R_{risk\ free}$ , то однозначного заключения сделать не удастся. Однако, в этом случае предлагается скорректировать предположение относительно  $R_{risk\ free}$ .



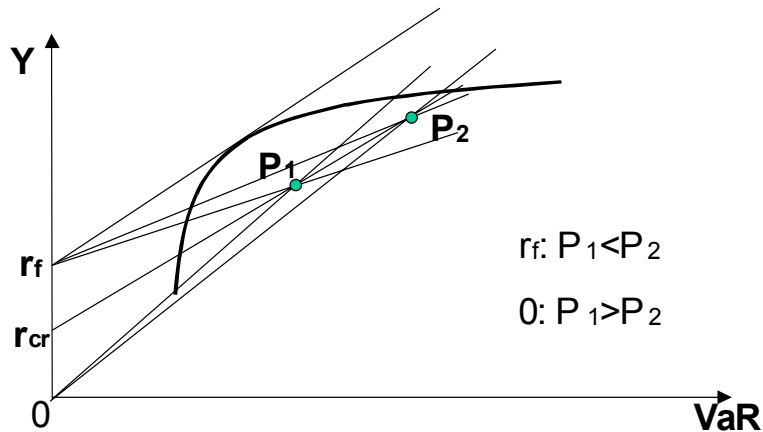


Рис.1. Сравнительный анализ эффективности портфелей ГЦБ

Иллюстрация метода анализа эффективности портфелей государственных ценных бумаг приведена на рис. 1. Индекс риск-доход равен тангенсу угла прямой, проведенной из точки начала осей координат до точки портфеля<sup>4</sup>. Портфель  $P_1$  имеет большее значение индекса "риск-доход", чем портфель  $P_2$ . Величина  $r_{cr}$  численно равна доходности в точке пересечения оси ординат и прямой, проведенной через точки  $P_1$  и  $P_2$ . Величина  $r_{cr}$  показывает предельный уровень доходности безрискового актива, при котором сохраняется отношение портфелей  $P_1$  и  $P_2$ , полученное из индекса "риск-доход". В рассматриваемом примере, предполагаемый диапазон доходности безрискового актива  $r_f$  лежит выше рассчитанной  $r_{cr}$ , поэтому наиболее предпочтительным является портфель  $P_2$ . В случаях, когда  $r_f$  задается как диапазон и  $r_{cr}$  лежит внутри предполагаемого диапазона, для принятия окончательного решения требуется доопределение диапазона.

**В четвертой главе** "Реализация модели на примере отечественного рынка ГЦБ" проведена прикладная реализация модели: разработан вычислительный инструментарий, выполнены и проанализированы экспериментальные расчеты на примере данных по отечественному рынку ГЦБ.

Для проверки и анализа работы созданного автором инструментальных средств выполнено несколько серий вычислительных экспериментов, позволивших оценить разработанную модель и её реализацию.

Отдельные элементы модели прошли успешную апробацию в различных кредитных организациях. В частности, в Инвестиционном банке "Восток-Запад" в решении прикладной задачи расчета позиции на корреспондентском счете. В Акционерном коммерческом банке "ТрансКредитБанк" разработана и

<sup>4</sup> Индекс Шарпа численно равен тангенсу угла наклона прямой, проведенной из точки портфеля до точки лежащей на вертикальной оси на расстоянии  $r_f$ , соответствующему величине безрисковой ставки доходности. Отметим, что максимальное значение индекса Шарпа достигается в точке, принадлежащей множеству эффективных портфелей.

реализована методика оценки величины риска валютной позиции банка, что по многим позициям совпадает с расчетом риска портфеля ценных бумаг. В Банке ЗЕНИТ проведена работа по структуризации финансовых рисков.

В результате практической апробации модели формирования портфеля ГЦБ сделаны следующие выводы. Во-первых, оценено быстродействие, максимальная размерность решаемых задач, количество итераций для разных размерностей портфелей. Во-вторых, проанализирована устойчивость решения к изменению рыночной ситуации: оценено изменение множества эффективных портфелей за двухнедельный период. В третьих, для проведения сравнительной оценки с методами формирования портфеля, относимых к классу однофакторных методов, проведено количественное сравнение величин риска и доходности эффективных портфелей с портфелем, состоящим из равных долей государственных ценных бумаг.

Все эксперименты выполнены на статистической информации рынка ГЦБ, обращающихся на Организованном рынке ценных бумаг (ОРЦБ) Российской Федерации. Использовались данные с января по декабрь 2001 года. Собрана статистика по рыночным ценам и доходностям 22-х финансовых инструментов.

Для оценки быстродействия и максимальной размерности решаемых задач проведены экспериментальные расчеты для портфелей размерности 5, 10, 15 и 22 ценных бумаг. Получена оценка количества итераций расчета эффективных портфелей с фиксированной точностью  $1,0 \cdot 10^{-10}$ , соответствующей требованиям решения прикладных задач. На основе результатов построена регрессионная модель для оценки основных рабочих характеристик процедур расчетов решения задач большей размерности. Полученная регрессионная модель имеет следующий вид:

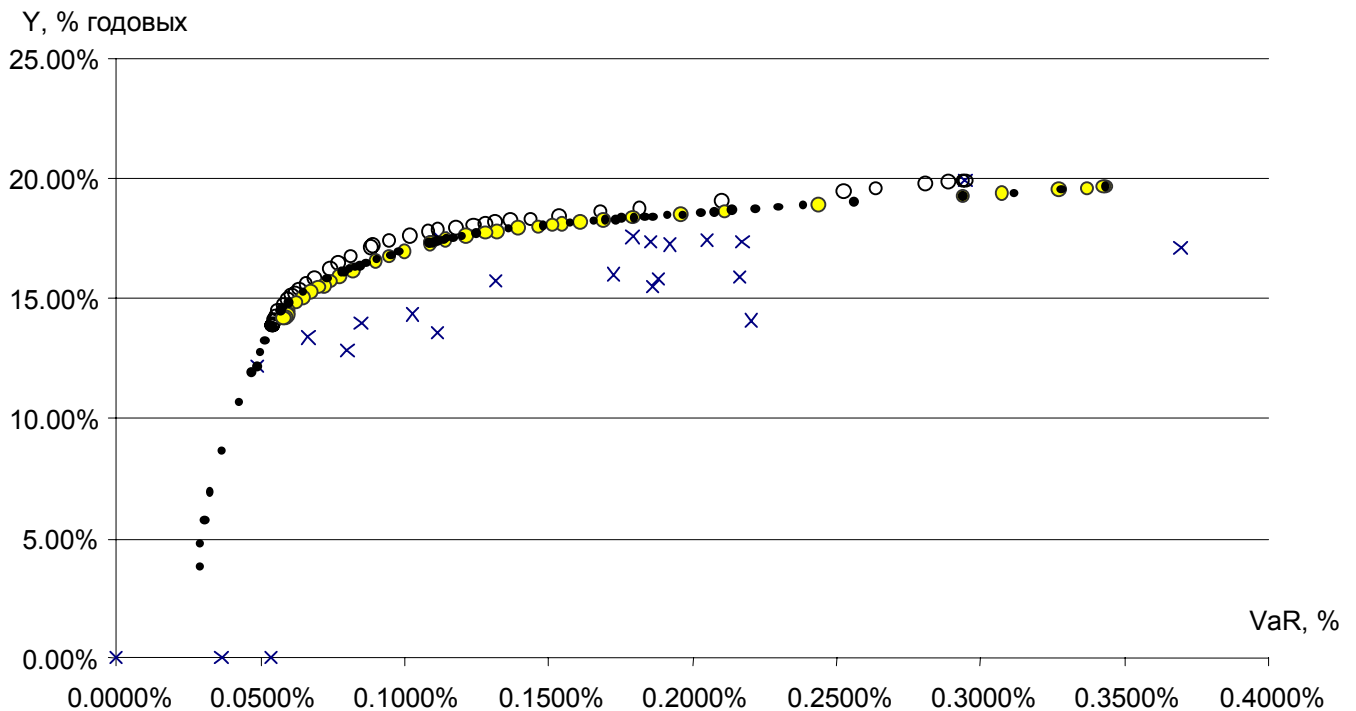
$$y = 0.4209x^2 - 4.0021x + 70.648$$
$$R^2 = 0.9979,$$

где  $x$  - размерность портфеля,  $y$  - количество итераций, требуемых для получения результата с фиксированной точностью  $1,0 \cdot 10^{-10}$ . Результаты этой серии экспериментов дают положительные рекомендации для использования разработанных инструментальных средств для задач с количеством бумаг в портфеле порядка ста ценных бумаг.

Целью следующей серии экспериментов был анализ динамики множества эффективных портфелей. С этой целью на две даты: 14 сентября и 28 сентября были построены множества эффективных портфелей. Далее, построено новое множество, структура портфелей которого соответствовала множеству эффективных портфелей от 14 сентября, но для расчета риска и доходности взяты данные от 28 сентября.

Результаты эксперимента наглядно представлены на рис. 2. "Крестиками" помечены ценные бумаги на 14 сентября; круглыми полыми точками обозначены точки множества оптимальных портфелей по данным 14 сентября; крупными закрашенными точками обозначены портфели со структурой

портфелей предыдущего множества, но с рассчитанными риском и доходностью на 28 сентября; темными точками меньшего диаметра обозначены точки множества эффективных портфелей на 28 сентября.



**Рис. 2. Множества эффективных портфелей ГЦБ на 14 и 28 сентября.**

Результаты эксперимента показали, что максимальное относительное отклонение по доходности между точками множеств составило 1.6%. Это позволило сделать вывод, что при переходе от одной точки наблюдения к другой, сформированный в первой точке портфель будет также находиться в окрестности множества эффективных портфелей новой точки наблюдений.

Заключительная серия экспериментов проведена с целью количественно показать эффективность применения методики. Для этого построен портфель с одинаковыми долями ценных бумаг, затем найдены структуры двух портфелей из множества эффективных портфелей: с такой же доходностью и с минимально возможным риском, и с таким же риском и максимально возможной доходностью. Результаты сравнения приведены в табл. 2.

Проведенные эксперименты показали работоспособность вычислительного инструментария, а также применимость методики для работы на рынке государственных ценных бумаг Российской Федерации, номинированных в рублях и обращающихся на организованном рынке ценных бумаг.

Таблица 2

**Сравнительный анализ усредненного и модельных портфелей ГЦБ**

№	Риск, %	Доходность, % годовых	Уменьшение риска от нач. портфеля, %	Увеличение доходности от нач. портфеля, %
1. Начальный портфель (равные доли)	0.1001%	15.13%	-	-
2. Эффективный портфель с тем же риском	0.1001%	17.60%	0.00%	16.31%
3. Эффективный портфель с той же доходностью	0.0605%	15.13%	60.49%	0.00%

Результаты проведенных экспериментов позволяют дать положительные рекомендации для использования модели и инструментальных средств формирования портфеля ГЦБ также и при работе с другими долговыми инструментами.

**ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ ДИССЕРТАЦИИ**

1. Проанализированы отличительные свойства ГЦБ, определены характер и степень их влияния на процесс формирования портфеля как в целом, так и на его отдельные этапы. Среди проанализированных свойств выделены два, нашедших отражение в постановке математической задачи формирования портфеля ГЦБ: принадлежность ГЦБ к классу ценных бумаг с фиксированным доходом; единственность эмитента для всех ГЦБ, обращающихся на внутреннем финансовом рынке.
2. Сформулирована математическая задача формирования портфеля ГЦБ, учитывающая их основные свойства и использующая модель с двумя доминирующими факторами динамики рыночной стоимости ГЦБ: изменением дюрации, и изменением положения и формы кривой доходности.
3. Проведен выбор метода решения задачи формирования портфеля ГЦБ. Для этой цели методы формирования портфеля классифицированы на три группы: *бесфакторные* - использующие нечеткие или неформализуемые факторы ожидаемой стоимости портфеля, *однофакторные* - состоящие в основном из простых и тривиальных алгоритмов, и *многофакторные* - базирующиеся на экономико-математических моделях оценки ожидаемой стоимости портфеля. Каждая группа оценена с помощью построенного вектора критериев. В него вошли следующие критерии: репрезентативность, достаточность, доступность, устойчивость, достоверность, управляемость, расширяемость,

масштабируемость. В результате многокритериального анализа выбраны *методы современной портфельной теории*, основанные на анализе риска и доходности портфеля.

4. На базе выбранного метода построена модель формирования портфеля ГЦБ, которая заключается в поиске множества эффективных портфелей ГЦБ и в окончательном определении структуры искомого портфеля в соответствии с предпочтениями инвестора относительно риска и доходности.

5. Проведен экономико-математический анализ модели и выбраны подходы оценки величин ожидаемой доходности и риска. Для оценки величины ожидаемой доходности предложено использование эффективной доходности к погашению - для долгосрочного периода инвестирования, и метода линейной экстраполяции - для краткосрочного периода инвестирования. Для оценки величины риска предложено использование методики RiskMetrics.

6. Предложен подход сравнительной оценки эффективности портфелей ГЦБ, в основе которого положен индекс Шарпа. Данный подход позволяет проводить анализ эффективности портфеля в условиях неопределенности ставки безрискового актива. Сравнительный анализ эффективности портфелей ГЦБ производится исходя из величины индекса "риск-доходность" (величина риска, приходящаяся на единицу доходности) и диапазона ставки безрискового актива.

7. Модель формирования портфеля реализована с помощью разработанных инструментальных средств. Поиск множества эффективных портфелей проведен с помощью градиентного метода приближенных вычислений. По сравнению с известными алгоритмами, предложенный автором вычислительный алгоритм позволяет за одну итерацию проводить изменения количества не двух, а большего числа ценных бумаг, входящих в портфель, тем самым улучшена сходимость метода и увеличена размерность решаемых задач. По результатам проведенных экспериментов вычислительный инструментальный рекомендован для решения задач размерностью порядка ста ценных бумаг.

8. Оценена устойчивость модели во временной ретроспективе: изменения доходности эффективных портфелей за двухнедельный период составили не более 1.6%, зафиксированы улучшения по доходности на 16% и по риску на 60% при применении реализованной модели, по сравнению с однофакторными методами.

Дальнейшее развитие данной проблематики предполагается по нескольким направлениям: (1) применение разработанной модели для финансовых активов - векселей, корпоративных облигаций, и других долговых ценных бумаг, (2) использование других подходов в оценке риска и доходности портфеля ценных бумаг, (3) совершенствование инструментальных средств.

**По теме диссертации опубликованы следующие работы:**

1. Москалик А.В. Нахождение оптимального портфеля государственных ценных бумаг методом наискорейшего спуска: рекламно-техническое описание информационной системы. -М.: Информационно-библиотечный фонд Российской Федерации, 2000. - 0,17 п.л.
2. Москалик А.В. Оценки эффективности и их применение для формирования портфеля госбумаг: депонированная рукопись №56334. -М.: ИНИОН РАН, 2001. - 0,58 п.л.
3. Москалик А.В. Оптимальные портфели государственных ценных бумаг//Актуальные проблемы современной науки (ISSN-1608-2721). -№ 4, июль 2002. - 0,33 п.л.
4. Москалик А.В. Выбор метода формирования портфеля государственных ценных бумаг//Вопросы экономических наук (ISSN-1728-8878). - № 4, ноябрь 2003. - 1,21 п.л.
5. Москалик А.В. Оценка риска портфеля государственных ценных бумаг//Аспирант и соискатель (ISSN-1608-9014). - № 3, июнь 2004. - 0,29 п.л.

Лицензия ЛР №020832 от 15 октября 1993 г.

Подписано к печати 17.02.05

Формат издания 60x84/16

Бум.офсет.№1

Печать офсетная

Объем 1.0 п.л

Тираж 100 экз.

Заказ№

---

Типография издательства ГУ-ВШЭ, 125319, г. Москва, Кочновский пр-д, д.3