**Лекции 8-10. Вторичная обработка результатов статистического наблюдения: моделирование функциональных и семантических связей взаимосвязей между показателями**

В социально-экономической статистике, как и в других отраслях статистической науки, большое значение имеет закон всеобщей связи явлений. К числу важнейших задач статистики относятся выявление причин, определяющих пространственные и временные различия между объектами, и количественная оценка обнаруженных взаимосвязей.

Всё многообразие взаимосвязей между процессами и явлениями можно описать на основе статистических моделей, построенных с использованием тех или иных характеризующих их показателей. Для адекватного моделирования целесообразно, прежде всего, провести группировку взаимосвязей между показателями по типу зависимости.

***Во-первых, выделяется группа функциональных связей***, которые, как известно, характеризуются тем, что каждому значению факторного показателя соответствует одно и только одно значение результирующего показателя.

$$Y = f(X)$$

Например, это балансовая связь объемных показателей, зависимость средних величин от системы весов, или, иначе говоря, от структуры совокупности, взаимосвязь между относительными показателями и др. В ряде случаев функциональная связь показателей соответствует аналогичной связи признаков единицы совокупности, охватываемой данными показателями. Например, стоимость проданного товара $Q$ функционально связана с ценой товара $p$ и физическим объёмом продажи $q$.

$$Q = p * q$$

Как показывает приведённый простой пример, функциональные связи моделируются с помощью мультипликативных факторных моделей, построенных методом связующих звеньев. ***Разновидностью функциональных связей являются семантические связи,*** которые на основе значения доли описывают зависимости между показателями, характеризующими часть и целое, то есть вложенные совокупности. Например, стоимость импортного сырья предприятия зависит от общей стоимости сырья и доли импортного сырья в его общем стоимостном объёме.

$$Q_{имп} = d_{имп} * Q_{общ}$$

Сказанное распространяется и на функциональную зависимость от двух или нескольких переменных — аргументов. Но сохранение такого рода функциональной связи и для сводных характеристик совокупности в ряде случаев требует определенной системы взвешивания средних величин, которая, как будет показано ниже, называется индексным методом. Так, работа w, выполненная в отдельном рейсе автомашины и представленная к оплате заказчику, является произведением веса груза g на расстояние перевозки $l$, т.е. w=g$l$. Чтобы соблюсти это соотношение не только для отдельного рейса, но и для общих итогов по всем рейсам вместе, для которых общая работа W=Σw, а общий вес перевезенных автомобильным транспортом однородных (то есть допускающих суммирование в натуральных единицах измерения) грузов G=Σg, среднее расстояние $l$ должно быть получено как:

$$\bar{l} = \frac{W}{G} = \frac{\Sigma w}{\Sigma g} = \frac{\Sigma gl}{\Sigma g},$$

т. е. как средняя арифметическая, взвешенная по показателю веса груза.

Если же учесть, что перевозились разные грузы с дифференцированной оплатой за 1 т·км (*руб.*), то стоимость каждого рейса выразится как s=g$lp$. Общая же стоимость всех перевозок составит

$$S = \Sigma glp = \Sigma g \cdot \frac{\Sigma gl}{\Sigma g} \cdot \frac{\Sigma glp}{\Sigma gl} = G\bar{l}\,\bar{p}.$$

Средняя оплата 1 т·км, как видим, должна при этом взвешиваться по числу тонно-км (выполненных в данном рейсе или вообще в перевозках данного вида груза).

***Во-вторых, выделяется группа статистических связей,*** для которых характерно, что каждому значению факторного показателя соответствует некоторое распределение результирующего показателя (от некоторого минимального до некоторого максимального значения).

$$(Y_1,\ldots,Y_n) = f(X)$$

Например, как известно из экономической теории, объём выпуска продукции зависит от объёма ресурсов рабочей силы и капитала, авансированных для её производства, однако, при одинаковых значениях ресурсных показателей на различных предприятиях может быть получен различный объём продукции. ***Разновидностью статистических связей являются связи корреляционные,*** когда каждому значению факторного показателя соответствует распределение результирующего показателя с функционально определённым уровнем среднего значения.

$$\bar{Y} = f(X)$$

Для моделирования связей первой группы используется метод экономических индексов, для моделирования связей второй группы – методы дисперсионного и регрессионного анализа.

Рассмотрим содержание, особенности применения и аналитические возможности исследования в практической статистике функциональных и семантических связей на основе индексного метода.

Слово индекс (index) в переводе с латинского означает показатель. Индексы, прежде всего, — это относительные показатели. Причем, если любой индекс — относительная величина, то не всякая относительная величина — индекс.

Индексами называют относительные величины, характеризующие соотношение значений изменяющегося показателя на сравниваемом уровне (числитель индекса) и на уровне базы сравнения (знаменатель индекса). Индексы характеризуют изменение явлений во времени, пространстве и по сравнению с ожидаемым значением (например, с бизнес-планом предприятия).

При помощи индексов можно характеризовать изменения самых различных показателей: изменение размеров объёма перевозок, удельного расхода материала, объема выпускаемой продукции, цен, себестоимости, численности работающих, производительности труда, заработной платы и т. п.

При всем своем разнообразии эти показатели можно подразделить на две группы. Одни показатели являются **объемными**, допускающими суммирование (это объем выпускаемой продукции, размер посевных площадей, численность работающих и т п.). Все они выражаются абсолютными величинами. Другие представляют собой показатели, рассчитанные на какую-то единицу (показатели цен, себестоимости, эффективности капитала, производительности труда, заработной платы и т. п.). Их *условно* можно назвать качественными. Определение «меры качественности» показателя всегда должно производиться с учётом конкретных условий моделирования, в многофакторных моделях – на основе проведения попарных сопоставлений. При этом необходимо сравнить сопоставляемые показатели факторной модели в отношении, во-первых, статистической структуры показателя (следовательно, его содержательной интерпретации с точки зрения метода измерения или расчёта). Во-вторых, следует оценить рассматриваемую пару факторных характеристик с точки зрения содержательной близости к результирующему показателю.

Исходя из указанного деления, одну группу индексов можно назвать индексами количественных показателей, а вторую группу индексов — индексами качественных показателей.

Индексы могут отражать изменение во времени и пространстве как отдельных единичных, простых показателей (например, изменение объема производства чугуна, стали, электроэнергии и т. п.), так и одноименных показателей по сложным совокупностям (например, изменение объема производства продукции всей промышленности). Индексы первого рода, т. е. отражающие соотношение простых единичных показателей, называют *индивидуальными*. Индексы второго рода, т. е. характеризующие изменение определенного показателя в целом по какой то сложной совокупности, называют *общими*. Общие индексы являются своего рода сводными показателями, обобщающими изменение изучаемого явления по совокупности. Последние, в свою очередь, могут различаться по широте совокупности. Так, например, наряду с общим индексом, характеризующим изменение объема продукции всей промышленности, могут исчисляться индексы объема производства по отдельным отраслям. Последние, будучи по своей природе общими индексами, выступают в этом случае в роли групповых (частных) индексов. Иногда их также называют субиндексами по отношению к общему итоговому (тотальному) индексу.

Исчисление общих индексов, выступающих в качестве обобщающих относительных показателей, позволяющих соотносить между собой показатели по сложным совокупностям, составляет особый прием исследования, именуемый *индексным методом*. Индексный метод дает возможность не только изучать динамику тех или иных сложных показателей, но и измерять влияние отдельных факторов на динамику сложного показателя, дает возможность абстрагироваться от одних факторов (в случае необходимости) или рассматривать их взаимосвязанно. В настоящее время индексный метод завоевал прочное место в статистике, хотя отдельные вопросы, связанные с его использованием, и сегодня не решены до конца.

Индексный метод имеет свою терминологию и символику. Например, обычно для обозначения наиболее часто индексируемых величин пользуются следующей символикой: $q$ — количество (объем) какого-либо продукта, $c$ или z — себестоимость единицы изделия, $p$ — цена единицы продукции, $t$ — затраты времени на единицу продукции, $w$ — выработка продукции в единицу времени, и т. д. Чтобы различать, к какому периоду относятся индексируемые величины, возле символа внизу ставятся подстрочные знаки. Например, если сравнивается продукция 2004 г. с продукцией 2003 г., то первая обозначается через $q_1$, а вторая — через $q_0$.

Исходя из принятых обозначений индексируемых величин, легко записать для различных показателей индивидуальные индексы, обычно обозначаемые через $i$. Так, индивидуальный индекс объема выразится как $i = \frac{q_1}{q_0}$, индекс цен —$i = \frac{p_1}{p_0}$, индекс себестоимости — $i = \frac{c_1}{c_0}$, индекс урожайности $i = \frac{y_1}{y_0}$ и т. д.

Общие же индексы, обычно обозначаемые символом ***I***, рассчитываются сложнее, так как для них должны выполняться все основные тождества, справедливые для индивидуальных индексов.

Особенности и различные способы построения общих индексов рассмотрим отдельно для количественных и качественных показателей.

Наиболее типичным индексом количественных показателей является индекс объема, или, как его чаще называют, индекс физического объема. Общий индекс физического объема, как любой общий индекс вообще, может быть построен двумя способами: как агрегатный и как средний из индивидуальных.

**Агрегатный индекс физического объема.** Допустим, мы располагаем данными о производстве различных видов продукции в пределах одного предприятия или группы предприятий за два периода, необходимо при помощи общего индекса охарактеризовать изменение объема всей продукции. **В относительно неоднородных совокупностях несоизмеримая в физических, натуральных единицах продукция не допускает простого суммирования.** Поэтому, прежде всего, **необходимо найти определенный соизмеритель, позволяющий выразить в соизмеримом виде общий объем измеряемого показателя для каждого из сопоставляемых уровней.** Таким соизмерителем могут служить и себестоимость или цена единицы продукции, и затраты труда на единицу продукции, и некоторые другие показатели. Чаще всего для неоднородной продукции в качестве соизмерителя выступает цена. Умножая на цены количество производимой продукции, получаем стоимостное (ценностное) выражение продукции каждого вида, которое допускает суммирование.

Пользуясь принятой ранее символикой, стоимость продукции в базисном периоде можно представить как $\Sigma q_0 p_0$, а в отчетном периоде — $\Sigma q_1 p_1$, т. е. стоимость зависит от количества произведенной продукции и от цен.

Если продукцию двух сравниваемых периодов оценить по одним и тем же ценам и сопоставить, то мы покажем изменение стоимости всей продукции за счет изменения только объема (физического) продукции. Построенный таким образом индекс именуют *агрегатным индексом физического объема.* Его формулу можно записать следующим образом:

$$I_q = \frac{\Sigma q_1 p}{\Sigma q_0 p},$$

где $q_0$ и $q_1$— продукция в базисном и отчетном периодах;

$p$ — цены, сопоставимые для двух периодов.

В зависимости от уровня, на котором будет зафиксировано значение соизмерителя, мы получим систему индексов Пааше (вес зафиксирован на сравниваемом уровне) или систему индексов Ласпейреса (вес зафиксирован на уровне базы сравнения). В соответствии с международными учётными стандартами официальной статистики, обычно при построении агрегатного индекса физического объема в качестве соизмерителей принимаются цены базисного периода ($p_0$*), то есть индекс фифзического объёма принято строить, как правило, в форме индекса Ласпейреса.*

Таким образом, *агрегатным индексом* называется общий индекс, полученный путем сопоставления итогов, выражающих величину сложного показателя в отчетном и базисном периодах при помощи соизмерителей (неизменных). Сам способ исчисления общего индекса таким путем (при помощи соизмерителей) называется *агрегатный.* Отличительной особенностью любого агрегатного индекса является то, что в числителе и знаменателе его фигурирует сумма произведений двух показателей, один из которых меняется, т. е. выступает в роли индексируемой величины, а второй остается неизменным, то есть выступает в роли соизмерителя. Разность между числителем и знаменателем агрегатных индексов характеризуется в абсолютном выражении изменение сложного показателя за счет изменения индексируемой величины.

Проиллюстрируем расчет агрегатного индекса физического объема на примере (см. таблицу 1).

Таблица 1

| Продукты | Выработано единиц | | Цена за единицу руб | | Стоимость продукции | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | базисный период $q_0$ | отчетный период, $q_1$ | базисный период, $p_0$ | отчетный период, $p_1$ | базисного периода в базисных ценах $q_0p_0$ | отчетного периода в базисных ценах $q_1p_0$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| А | 5 000 | 6 000 | 15 | 18 | 75 000 | 90 000 |
| Б | 2 000 | 3 000 | 10 | 9 | 20 000 | 30 000 |
| В | 6 000 | 7 000 | 5 | 4,5 | 30 000 | 35 000 |
| Итого | — | — | — | — | 125 000 | 155 000 |

Чтобы рассчитать агрегатный индекс физического объема, определяем стоимость продукции базисного и отчетного периодов по одним и тем же базисным ценам (см. гр. 6 и 7) и делим вторую на первую:

$$I_q = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} = \frac{155\,000}{125\,000} = 1{,}24, \text{ или } 124\%,$$

т. е. общий выпуск продукции увеличился в отчетном периоде по сравнению с базисным в 1, 24 раза, или на 24%.

Вычитая из числителя знаменатель (155000—125000=30000), находим, что стоимость продукции в абсолютном выражении увеличилась в отчетном периоде на 30000 руб. за счет увеличения объема выпускаемой продукции.

***Агрегатный способ исчисления общих индексов является основным в социально-экономической статистике, но не единственным.***

**Средний арифметический и средний гармонический индексы физического объема.** Суть второго способа состоит в том, что по отдельным видам продукции рассчитываются индивидуальные индексы объема ($i=\frac{q_1}{q_0}$), а затем из них рассчитывается средний индекс.

При использовании второго метода возникает, прежде всего, вопрос о форме средней и о весах.

В практике современной статистики средние индексы рассчитываются в форме средней арифметической и гармонической, причем каждая из этих форм должна приниматься как взвешенная, т. е.

$$\overline{I}=\frac{\Sigma if}{\Sigma f} \text{ и } \overline{I}=\frac{\Sigma M}{\Sigma \frac{M}{i}},$$

где $i=\frac{q_1}{q_0}$ - индивидуальные индексы объема, а $f$ и $M$ — веса соответственно в среднем арифметическом и гармоническом индексах.

При определении весов и одного и второго индексов исходят из тождества их агрегатному индексу, который, как указывалось выше, является основной формой индекса.

Следовательно, веса среднеарифметического и среднегармонического индексов должны определяться, исходя из соблюдения условия этого тождества, т. е. при исчислении среднего арифметического индекса объема должно выполняться следующее условие:

$$\frac{\Sigma if}{\Sigma f}=\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0}$$

Это будет иметь место при $f=q_0p_0$ Действительно,

$$I_q=\frac{\Sigma i q_0 p_0}{\Sigma q_0 p_0}=\frac{\Sigma \frac{q_1}{q_0} q_0 p_0}{\Sigma q_0 p_0}=\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0}$$

Таким образом, общий индекс объема в форме среднего арифметического будет иметь вид

$$\overline{I}_q=\frac{\Sigma i q_0 p_0}{\Sigma q_0 p_0}.$$

Аналогично, определяя веса среднегармонического индекса объема, следует помнить о необходимости соблюдения условия:

$$\frac{\Sigma M}{\Sigma \frac{M}{i}} = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0}.$$

Это равенство будет соблюдено, если $M = q_1 p_0$ Тогда

$$I_q = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma \frac{q_1 p_0}{i}} = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma \frac{q_1 p_0}{q_1} q_0} = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0},$$

т е среднегармонический индекс объема можно записать как

$$\bar{I}_q = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma \frac{q_1 p_0}{i}}.$$

Преобразование агрегатного индекса физического объема в средний арифметический и средний гармонический можно наглядно произвести и путем следующих простых подстановок.

Исходя из индивидуального индекса объема $(i = \frac{q_1}{q_0})$, выражаем продукцию отчетного периода как $q_1 = i * q_0$.

Подставляя данное выражение в числитель агрегатной формулы, получаем общий индекс физического объема в форме среднего арифметического индекса (тождественного агрегатному индексу Ласпейреса):

$$I = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} = \frac{\Sigma i q_0 q_0}{\Sigma q_0 q_0}$$

Аналогично, выражая продукцию базисного периода как $q_0 = \frac{q_1}{i}$, производим замену в знаменателе агрегатного индекса физического объема. В результате получаем общий индекс физического объема в форме среднего гармонического индекса (тождественного агрегатному индексу Пааше):

$$I = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma \frac{q_1 p_0}{i}}$$

Такое преобразование наглядно показывает тождество между агрегатным индексом и средним арифметическим и гармоническим индексами физического объема.

Как видно из приведенных формул, весами индивидуальных индексов объема в среднем арифметическом индексе служит стоимость продукции базисного периода в базисных (или сопоставимых) ценах, а в гармоническом индексе — стоимость продукции отчетного периода в базисных (или сопоставимых) ценах.

При решении конкретных задач выбор той или иной формы среднего индекса определяется, прежде всего, наличием в распоряжении исследователя исходных данных наряду с индивидуальными индексами.

Так, например, при наличии данных о стоимости продукции в сопоставимых ценах **в базисном периоде**, общий индекс на основе индивидуальных должен рассчитываться как средний арифметический.

**Пример 1**

| Продукты | Индивидуальные индексы объема $i=q_1 q_0$ | Стоимость продукции в базисном периоде в базисных ценах, тыс руб $q_0 p_0$ |
|---|---|---|
| А | 1,08 | 2400 |
| Б | 1,10 | 600 |
| В | 1,12 | 1000 |

$$\bar{I}_p=\frac{\Sigma i q_0 p_0}{\Sigma q_0 p_0}=\frac{1{,}08\ 2400+1{,}1\ 600+1{,}12\ 1000}{2400+600+1000}=\frac{4372}{4000}=1{,}093,\ \text{или}\ 109{,}3\%.$$

Индекс показывает, что общий выпуск продукции в натуральном выражении увеличился в отчетном периоде по сравнению с базисным на 9,3%.

Если же имеются в наличии данные о стоимости продукции отчетного периода в базисных ценах, то расчет общего индекса должен осуществляться по формуле гармонической средней.

**Пример 2**

| Продукты | Индивидуальные индексы объема $i=q_1\ q_0$ | Стоимость продукции в отчетном периоде в сопоставимых ценах базисного периода тыс руб. $q_1 p_0$ |
|---|---|---|
| А | 1,03 | 515 |
| Б | 1,06 | 848 |
| В | 1,04 | 728 |

$$\bar{I}_q=\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma \frac{q_1 p_0}{i}}=\frac{515+848+728}{\frac{515}{1{,}03}+\frac{848}{1{,}06}+\frac{728}{1{,}04}}=\frac{2091}{2000}=1{,}0455,\ \text{или}\ 104{,}55\%$$

Индекс показывает, что общий выпуск продукции в натуральном выражении увеличился в отчетном периоде по сравнению с базисным на 4,55%.

Изучение различий **за счёт качественных показателей** также связано с необходимостью расчета и индивидуальные и общих индексов. При этом исчисление индивидуальных индексов не вызывает трудностей, оно так же элементарно, как и для количественных показателей.

При расчете же общих индексов возможны различные подходы к решению в зависимости от того, рассматривается ли индексируемый показатель для однородной или разнородной совокупности единиц.

Общий индекс качественного показателя, рассчитываемый по совокупности, состоящей из разнородных единиц, определяет средний размер изменения индексируемого показателя по совокупности в целом. Например, средний размер изменения цен определенного набора товаров (например, молока, мяса, овощей и др.), или средний размер изменения заработной платы рабочих разных профессий, или изменения их производительности труда и т. п.

*Задача подобного рода методически ничем не отличается от постановки вопроса при исчислении индексов количественных показателей и решается аналогично путем построения агрегатных или средних из индивидуальных индексов.*

**Агрегатный индекс цен.** Рассмотрим построение агрегатного индекса качественного показателя на примере индекса цен. Допустим, мы располагаем следующими данными о ценах на три вида продукции, произведенной в отчетном и базисном периодах (табл. 2).

Таблица 2

| Продукты | Базисный период | | Отчетный период | |
|---|---|---|---|---|
| | произведено единиц $q_0$ | цена за единицу руб $p_0$ | произведено единиц, $q_1$ | цена за единицу, руб. $p_1$ |
| А | 580 | 5,0 | 600 | 4,5 |
| Б | 1200 | 3,8 | 1300 | 3,0 |
| В | 700 | 9,0 | 750 | 8,0 |

Легко определить изменение цен в отчетном периоде по сравнению с базисным на каждый продукт в отдельности

Так, $i_A = \frac{4,5}{5} = 0,9;\ i_Б = \frac{3}{3,8} = 0,79;\ i_B = \frac{8}{9} = 0,888.$

Чтобы показать, как *в целом* изменились цены на все продукты, надо рассчитать общий индекс либо по агрегатной формуле, либо как средний из индивидуальных.

При построении агрегатного индекса цен рассуждаем так же, как при построении индекса объема если нельзя суммировать цены на различные продукты, то можно суммировать и сопоставлять стоимость этих продуктов.

Однако, сопоставляя стоимости, мы должны показать изменение цен, следовательно, надо устранить влияние изменения количества производимой (или реализуемой) в разные периоды продукции на стоимостной показатель. Для этого в ценах отчетного и базисного периодов нужно оценить один и тот же количественный набор продукции.

В практике социально-экономической статистики агрегатный индекс цен(индекс-дефлятор ВВП, индекс цен производителей) должен быть построен по формуле, в которой в качестве весов («соизмерителей») принимается продукция отчетного периода ($q_1$), то есть по формуле Пааше:

$$I_p = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_1 p_0},$$

где $p_1$ и $p_o$ — цены на продукты соответственно в отчетном и базисном периодах, $q_1$ — количество продукции отчетного периода.

Рассчитанный по данной формуле общий индекс цен показывает, как изменилась стоимость продукции отчетного периода по сравнению с базисным за счет изменения цен.

В нашем примере общий индекс цен, построенный по агрегатной формуле, будет следующим:

$$I_p = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_1 p_0} = \frac{600\ \ 4,5 + 1300\ \ 3 + 750\ \ 8}{600\ \ 5 + 1300\ \ 3,8 + 750\ \ 9} = \frac{12\,600}{14\,690} = 0,8577,$$

т. е. в среднем по всем продуктам цены снизились на 14,23% (85,77% — 100%).

Строя агрегатный индекс цен по продукции отчетного периода ($q_1$), во-первых, мы получаем возможность, вычитая из числителя формулы знаменатель, определить ту сумму прибыли (или убытка), которую получает продавец (в широком смысле слова) от реализации продукции отчетного периода за счет повышения (снижения) цен. Или, другими словами, $\Sigma q_1 p_1$ — $\Sigma q_1 p_o$ представляет собой ту сумму экономии, которую получает покупатель (в широком смысле слова), покупая продукцию в отчетном периоде ($q_1$) по сниженным ценам (или сумму убытка при повышении цен).

Во-вторых, строя агрегатный индекс цен по продукции отчетного периода *($q_1$)*, мы сохраняем взаимосвязь между такими тремя взаимосвязанными индексами, как индекс объема, индекс цен и индекс стоимости. При правильном построении общих индексов взаимосвязанных показателей, взаимосвязь, существующая между показателями, изменение которых индексируется, должна тождественно сохраниться и в индексной модели.

Так, если стоимость можно представить как произведение цены на количество, то и произведение индекса цен на индекс объема должно давать индекс стоимости, т.е.:

$$I_{pq} = I_p * I_q \text{, или}$$

$$\frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_0} = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_1 p_0} \cdot \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0}$$

Если бы мы построили индекс цен по продукции базисного периода *(qo),* то эта зависимость не была бы достигнута.

Однако надо отметить, что указанный выбор весов при построении агрегатного индекса цен нельзя считать обязательным во всех случаях. С учётом приоритета нормативного анализа в статистике, некоторые задачи могут решаться и решаются на практике по-разному в зависимости от конкретной цели и особенностей исследования. Проиллюстрируем это следующими рассуждениями. Предположим, мы изучаем изменение цен на потребительские товары и отмечаем, что цены резко возросли, в результате чего некоторые товары вообще выпали из потребительской корзины. Например, в базисном периоде в состав потребляемых продуктов *(qo)* входило 20 наименований, а в отчетном периоде *(q1)* — только 15. Очевидно, что при такой ситуации индекс цен, рассчитанный по *q1,* неправильно отразит изменение цен, так как он вообще не затронет изменения цен на те продукты, которые выпали из потребления из-за наибольшего повышения цен.

Поэтому в данном конкретном случае более правильно отразит изменение цен индекс Ласпейреса, построенный по продукции базисного периода, т. е.

$$I_p = \frac{\Sigma q_0 p_1}{\Sigma q_0 p_0}.$$

Но выбор этой формулы для расчёта индекса потребительских цен продиктован особыми условиями исследования, которые определяются свойствами наблюдаемой совокупности.

**Средний арифметический и средний гармонический индексы цен.** Как мы уже указывали, наряду с агрегатным индексом общие индексы могут быть построены как средние из индивидуальных, тождественные агрегатным.

Применительно к индексам цен среднеарифметический индекс будет выглядеть следующим образом:

$$\bar{I}_p = \frac{\Sigma i q_1 p_0}{\Sigma q_1 p_0}, \text{ где } i = \frac{p_1}{p_0},$$

а среднегармонический как

$$\bar{I}_p = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma \frac{q_1 p_1}{i}}.$$

Преобразование агрегатного индекса цен в средний арифметический и средний гармонический индексы можно произвести тем же способом, который упоминался выше для индексов физического объема.

Так, если из индивидуального индекса цен $\left(i = \frac{p_1}{p_0}\right)$ выразить цену отчетного периода как $p_1 = i * p_o$ и подставить это выражение в числитель агрегатного индекса цен, то получим средний *арифметический* индекс цен, тождественный агрегатному индексу Ласпейреса:

$$I_p^{Л} = \frac{\Sigma p1q0}{\Sigma p0q0} = \frac{\Sigma i^* p0q0}{\Sigma p0q0}.$$

Выражая цену базисного периода как $p_0 = \frac{p_1}{i}$ и подставляя это выражение в знаменатель агрегатного индекса, получим общий индекс цен в форме среднего *гармонического* индекса, тождественного агрегатному индексу Пааше:

$$I_p = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma \frac{p_1 q_1}{i}}.$$

Таким образом, весами индивидуальных индексов в среднеарифметическом индексе цен служит стоимость продукции базисного периода в базисных ценах $(q_0 p_o)$. В среднем гармоническом индексе цен весами индивидуальных индексов служит стоимость продукции отчетного периода в ценах этого же периода, т е. $q_1 p_1$.

Нетрудно видеть, что средний гармонический индекс цен удобно применять в тех случаях, когда, например, известны изменения цен на отдельные продукты и выручка от продажи в отчетном периоде $(q_1 p_1)$ по отдельным группам товарооборота, а само количество проданных товаров неизвестно или вообще не может быть определено в натуральном выражении, как при анализе производства и реализации услуг.

***Аналогично индексу цен могут быть исчислены индексы всех качественных показателей для неоднородных совокупностей единиц.***

Познакомимся еще с одним индексом качественного показателя - с индексом производительности труда. Предварительно сделаем некоторые пояснения

Производительность труда может измеряться либо количеством продукции, вырабатываемой в единицу рабочего времени *(w),* либо затратами рабочего времени на единицу продукции *(t).* Причем эти показатели находятся в соотношении $w == \frac{1}{t}$ (если рабочий тратит 3 ч на деталь ($t$=3), то в 1 ч он вырабатывает 1/3 детали ($w$=1/3). Поэтому индивидуальные индексы производительности труда можно записать как:

$$i == \frac{w_1}{w_0}\ , \text{ или } i = \frac{t_0}{t_1}\ .$$

Пользуясь показателями затрат рабочего времени на единицу различной продукции в базисном и отчетном периодах ($t_0$ и $t_1$), можно взять в качестве весов продукцию отчетного периода ($q_1$) и, определив общие затраты времени на выпуск этой продукции при двух уровнях производительности труда, сопоставить их между собой, т. е. в агрегатной форме индекс производительности труда выразится как:

$$I_w = \frac{\Sigma\, q_1 t_0}{\Sigma\, q_1 t_1}.$$

Этому индексу соответствует среднеарифметический индекс:

$$I_w = \frac{\Sigma\, i\,(q_1 t_1)}{\Sigma\, q_1 t_1}.$$

Если общие затраты рабочего времени на продукцию отчетного периода ($q_1 t_1$) обозначить символом $T_1$, то приведенная выше формула среднеарифметического индекса производительности труда получит следующий вид:

$$I_w = \frac{\Sigma\, i T_1}{\Sigma\, T_1},$$

где $i$ — индивидуальные индексы часовой, дневной или месячной производительности труда, а $T_1$ — общие затраты рабочего времени в отчетном периоде соответственно в человеко-часах, человеко-днях или человеко-месяцах. В последнем случае $T_1$ выступает в виде числа рабочих. Покажем расчет индекса производительности труда на примере.

Допустим, мы располагаем следующими данными по предприятию, выпускающему разнородную продукцию (табл. 3).

Таблица 3

**Расчет индекса производительности труда**

| Виды продукции | Произведено в отчетном периоде, тыс единиц $q_1$ | Затраты времени на единицу продукции человеко ч | |
|---|---|---|---|
| | | в отчетном периоде $t_1$ | в базисном периоде $t_0$ |
| *A* | 8 | 2,0 | 2,3 |
| *B* | 18 | 1,5 | 1,8 |
| *C* | 26 | 0,5 | 0,55 |

Индивидуальные индексы производительности труда:

$$i_A = \frac{2,3}{2,0} = 1,15;\ i_B = \frac{1,8}{1,5} = 1,2;\ i_C = \frac{0,55}{0,5} = 1,1.$$

**Общий индекс производительности труда удобнее всего рассчитать в данном примере по агрегатной формуле**

$$I_w = \frac{\Sigma t_0 q_1}{\Sigma t_1 q_1} = \frac{8 \times 2,3 + 18 \times 1,8 + 26 \times 0,55}{8 \times 2 + 18 \times 1,5 + 26 \times 0,5} =$$

$$= \frac{65,1}{56,0} = 1,162, \text{ или } 116,2\%,$$

т. е. в целом по предприятию производительность труда выросла в отчетном периоде на 16,2% по сравнению с базисным периодом.

**При изучении вариации качественных показателей часто приходится определять *изменение средней величины* индексируемого показателя для какой-либо *однородной совокупности.*** Критериальное свойство однородности совокупности, с точки зрения использования индексного метода, характеризуется возможностью суммирования (агрегирования) информации о количестве явления на основе показателей, измеренных в натуральном выражении, без содержательных потерь информации. Вопрос об однородности наблюдаемой совокупности должен решаться отдельно в каждом исследовании, относительно его цели.

Так, например, совокупность нефтепродуктов однородна с точки зрения производителя, так как в производстве различных ассортиментных групп нефтепродуктов используется однородное сырьё, технологии, оборудование и привлекается однородная по профессиональной и квалификационной структуре рабочая сила. Поэтому при анализе производства нефтепродуктов мы можем оценить их суммарный выпуск в натуральном выражении и, следовательно, среднюю себестоимость и цену товарной группы, среднюю производительность труда по технологическим процессам и т.п.

Однако та же самая совокупность нефтепродуктов абсолютно неоднородна с точки зрения потребителя, по свойству полезности (основному критерию экономической деятельности в соответствии с концепцией расширенного производства): не являются взаимозаменяемыми не только, например, бензин, дизельное топливо и мазут, но даже и различные по октановому числу вида автомобильного бензина. Поэтому при анализе потребления нефтепродуктов (объём внутренних продаж, экспорт и проч.) недопустимо оценивать их суммарный выпуск в натуральном выражении и, следовательно, бессмысленным становится расчёт средней цены товарной группы. Соответственно, оценка изменения показателей по совокупности в целом может быть произведена только с использованием соизмерителей.

При возможности суммирования объёмных характеристик совокупности в натуральном выражении (то есть для однородной совокупности) расчёт индексов для них фактически сводится к методике оценки индивидуального индекса.

$$Iq = \Sigma q_1 / \Sigma q_0$$

При этом для всей совокупности в целом имеет содержательный смысл расчёт средней величины самых различных качественных показателей. Например, по совокупности банков с разным уровнем рентабельности, можно показать изменение *средней* рентабельности, или при анализе скорости документооборота банков в различных регионах — региональные различия средней скорости документооборота и т. п.

В общем виде динамику, пространственное сравнение или сопоставление фактического и ожидаемого значения таких средних показателей можно выразить в виде отношения $(x_1 : x_0)$, которое является относительным показателем и может быть названо **индексом средней величины**. Для решения всех указанных типов аналитических задач используется один и тот же метод, поэтому ниже мы для удобства изложения в качестве примера будем рассматривать построение динамических индексов. Территориальные индексы и индексы прогнозных значений строятся аналогичным образом.

Относительную величину, характеризующую динамику двух средних показателей для однородной совокупности, в статистике называют *индексом переменного состава.* Поскольку средние величины при этом рассчитываются как взвешенные, то индекс переменного состава для любых качественных показателей можно записать в общем виде следующим образом:

$$I_{\text{пер сост.}} = \frac{\Sigma x_1 f_1}{\Sigma f_1} : \frac{\Sigma x_0 f_0}{\Sigma f_0}.$$

Свое название (индексы переменного состава) эти показатели получили потому, что средние величины, динамику которых эти индексы отражают, могут меняться не только за счет изменения индексируемого показателя у отдельных объектов (частей целого), но и за счет изменения удельного веса этих частей в общей совокупности (изменение состава).

Так, например, средняя рентабельность банков зависит не только от уровня рентабельности отдельных единиц сектора, но и количества банков с различным уровнем рентабельности или от объёма активов, сосредоточенных в каждом из этих банков. Поэтому индекс рентабельности переменного состава отражает изменение средней рентабельности финансового предприятия как за счет изменения рентабельности каждого банка, так и за счет изменения удельного веса отдельных финансовых предприятий или их активов в общей сумме активов банковской системы.

Обозначив себестоимость производства однородной продукции группы предприятий через *c*, а количество продукции отдельных предприятий через *q*, можно следующим образом записать формулу индекса себестоимости переменного состава:

$$I_{\bar{c}} = \bar{c}_1 : \bar{c}_0 = \frac{\Sigma c_1 q_1}{\Sigma q_1} \cdot \frac{\Sigma c_0 q_0}{\Sigma q_0}.$$

Аналогично индекс цен переменного состава запишется как

$$I_{\bar{p}} = \bar{p}_1 \cdot \bar{p}_0 = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma q_1} : \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma q_0}.$$

В общеэкономическом случае этот индекс покажет, как изменилась средняя цена отдельного вида продукта, реализованного по разным ценам на равных рынках, за счет изменения цен и за счет изменения количества (доли) продукта, проданного на разных рынках (например, эти соображения актуальны для анализа процентной ставки как цены кредита). По этой же схеме можно записать индексы переменного состава и для других средних величин.

Все индексы переменного состава, наряду с изменением индексируемого показателя, отражают на себе влияние изменения состава (структуры) совокупности, для которой рассчитаны средние.

**Индексы фиксированного состава.** Чтобы исключить влияние изменения структуры совокупности на динамику средних величин, средние показатели для двух периодов рассчитывают по одной и той же фиксированной структуре. Структура совокупности, как относительная характеристика степени распространения заданного варианта в наблюдаемой совокупности, то есть объёмный по отношению к осредняемой величине показатель, фиксируется обычно на уровне отчетного периода. Индекс, характеризующий динамику средних величин при одной и той же фиксированной структуре совокупности, носит название *индекса фиксированного состава*.

Для индекса себестоимости это фиксирование одной и той же структуры (*q1*) найдет отражение в следующей записи:

$$I_{\text{фикс.сост.}} = \frac{\Sigma c_1 q_1}{\Sigma q_1} : \frac{\Sigma c_0 q_1}{\Sigma q_1}.$$

После сокращения на $\Sigma q_1$ этот индекс принимает вид известной формулы агрегатного индекса:

$$I_{\text{фикс.сост.}} = \frac{\Sigma c_1 q_1}{\Sigma c_0 q_1}.$$

В этом индексе влияние структурного фактора устранено, поэтому он определяет средний размер изменения средней рентабельности за счёт рентабельности отдельных банков. Индекс фиксированного состава не может выходить за пределы значений частных (групповых) индексов, ибо он является средним из них.

**Индекс структурных сдвигов.** Так как индекс переменного состава отражает на себе влияние двух факторов, а индекс фиксированного состава только осредняет изменение индексируемого показателя без учета изменения структуры совокупности, то статистически можно выявить влияние структурного фактора на динамику среднего показателя, если разделить индекс переменного состава на индекс фиксированного состава. Относительную величину, получающуюся в результате деления этих двух индексов, условно можно назвать индексом структуры (структурных сдвигов).

$$J_{\text{структ}} = J_{\text{пер сост}} \; J_{\text{фикс сост}}$$

Индекс структуры можно записать и как отношение средних величин, рассчитанных для разной структуры совокупности, по постоянной величине качественного показателя, которая обычно принимается на уровне базисного периода.

Так, для показателя рентабельности индекс структурных сдвигов выразится следующим образом:

$$I_{\text{структ}} = \left(\frac{\Sigma c_1 q_1}{\Sigma q_1} : \frac{\Sigma c_0 q_0}{\Sigma q_0}\right) : \frac{\Sigma c_1 q_1}{\Sigma c_0 q_1} \text{ или } I_{\text{структ.}} = \frac{\Sigma c_0 q_1}{\Sigma q_1} : \frac{\Sigma c_0 q_0}{\Sigma q_0}.$$

Аналогично рассчитываются индексы переменного и фиксированного составов, а также структурных сдвигов для других качественных показателей в однородных совокупностях единиц.

В приводимых выше формулах индексов переменного и фиксированного составов в качестве весов при исчислении средних принимались абсолютные показатели. Однако, как известно, при исчислении средних величин в качестве весов могут использоваться и относительные показатели (частости), характеризующие долю единиц с определенным значением признака в общей совокупности.

Если воспользоваться обозначениями вариантов через $x$, а их долей через $d$, то в этой символике (учитывая при этом, что $\Sigma d$=l) для любых качественных показателей $x$ упомянутые индексы можно выразить следующими формулами:

$$I_{\text{пер сост}} = \Sigma x_1 d_1 : \Sigma x_0 d_0$$
$$I_{\text{фик сост}} = \Sigma x_1 d_1 : \Sigma x_0 d_1,$$
$$I_{\text{структ}} = \Sigma x_0 d_1 : \Sigma x_0 d_0$$

Представляется, что в такой записи упомянутые индексы более наглядно отражают свое содержание и название, напоминая по своей внешней форме агрегатные индексы.

Во всех трех случаях идет речь о динамике средней величины $x$. Но индекс переменного состава отражает динамику средней величины за счет изменения и $x$ и $d$. Индекс фиксированного состава характеризует изменение средней величины лишь за счет изменения $x$, т. е. самих вариантов при неизменных весах (структуре) И, наконец, индексы структурных сдвигов характеризуют изменение средней величины лишь за счет изменения $d$, т. е. долей (частостей) отдельных вариантов.

Нетрудно видеть, что и в этой записи индекс структуры может быть получен путем деления индекса переменного состава на индекс фиксированного состава. Индекс переменного состава равен произведению частных факторных индексов: фиксированного состава и структурных сдвигов.

Рассмотрим **пример** использования в анализе индексов средней величины.

В 1 квартале 2004 года рентабельность банковских активов в РФ составила 19,8 %, или 120,6% к ожидаемой величине показателя. При неизменной структуре банковского сектора уровень средней рентабельности оказался бы на 41,4 % выше прогнозной оценки.

В какой мере различие в уровне рентабельности банков было вызвано экономическими факторами, в какой - различием структуры совокупности (в абсолютном и относительном выражении)?

*Решение*

*Разберём статистическую структуру приведённых данных. Характеристика различия в уровне рентабельности различных групп банков в экономике представляет собой разновидность территориального индекса. Индексируемой величиной является коэффициент рентабельности банков. В денежно-кредитной статистике коэффициенты рентабельности рассчитываются как средние из индивидуальных коэффициентов, взвешенные по численности соответствующих групп. Совокупность банков следует рассматривать как однородную. Таким образом, приведённые индексы являются индексами средней величины, причём в стандартной, то есть неизменной структуре мы имеем индекс фиксированного состава. На основе взаимосвязи индексов* *однородной совокупности можем оценить индекс структурных сдвигов, который охарактеризует различие между двумя уровнями индексируемой величины за счёт различий в структуре совокупности банков.*

*I(стр)= 1,206 / 1,414 = 0,853*

*Перейдём к оценке различий в абсолютном выражении. Для этого воспользуемся формулами индексов однородной совокупности.*

*1,206 = 19,8 / k (пр)*

*1,414 = 19,8 / k (пр-усл)*

*0,853 = k (факт-усл) / k (пр)*

*Здесь k (факт-усл) = k (пр-усл) =* $\frac{\sum k_{i\ddot{i}\eth} f_{i\hat{a}\eth}}{\sum f_{i\hat{a}\eth}}$

*Таким образом:*

$\Delta$ *(экон) = +5,8%* $\Delta$ *(стр) = -2,41 %*

***В неизменной структуре совокупности банков уровень рентабельности (при прочих равных условиях) оказался бы на 5,8% (т.е. на 41,4 п.п.) выше прогнозной оценки показателя. Структурные изменения в совокупности (по сравнению с ожидаемыми параметрами) снизили среднюю рентабельность на 2,41% (т.е. на 14,7 п.п.). Прогнозное значение рентабельности составляло 16,4%.***

**Цепные и базисные индексы.** Как известно, в зависимости от выбора базы сравнения темпы роста в рядах динамики могут рассчитываться либо с одной и той же (постоянной для всех) базой сравнения, либо с переменной. Аналогично ряд индексов с постоянной базой сравнения именуют *базисными индексами.* Ряд индексов, каждый из которых рассчитан по отношению к предыдущему периоду, именуют *цепными* индексами. Между цепными и базисными индексами существует определенная зависимость, позволяющая переходить от одних индексов к другим. А именно для индивидуальных индексов произведение цепных показателей всегда дает базисный индекс. В свою очередь, отношение двух базисных индивидуальных индексов дает цепной показатель.

*Для общих индексов эта зависимость будет иметь место только при условии, что ряд общих индексов рассчитан с одними и теми же весами, т. е. для так называемых индексов* с *постоянными весами.* Рассмотрим это несколько подробнее.

Если имеются, например, данные по предприятию о выпуске нескольких видов (А, Б, В) продукции и о ценах на нее за четыре периода:

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{I} & \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} \\ q_1/p_1 & q_2/p_2 & q_3/p_3 & q_4/p_4, \end{array}$$

то при исчислении цепных и базисных общих индексов объема и цен можно по-разному решать вопрос о весах-соизмерителях. Так, например, при исчислении цепных индексов физического объема продукцию всех периодов можно оценить в одних и тех же ценах (предположим, ценах I периода $p_1$). Тогда такие цепные индексы будут выглядеть следующим образом:

$$I_{q_{2/1}} = \frac{\Sigma q_2 p_1}{\Sigma q_1 p_1};\ I_{q_{3/2}} = \frac{\Sigma q_3 p_1}{\Sigma q_2 p_1};\ I_{q_{4/3}} - \frac{\Sigma q_4 p_1}{\Sigma q_3 p_1}.$$

Так как все они имеют одни и те же веса (соизмерители—$p_1$), то они представляют собой ряд индексов с постоянными весами. И в этом случае можно перейти от цепных индексов к базисному и наоборот.

Действительно,

$$\frac{\Sigma q_2 p_1}{\Sigma q_1 p_1}\ \frac{\Sigma q_3 p_1}{\Sigma q_2 p_1} \cdot \frac{\Sigma q_4 p_1}{\Sigma q_3 p_1} = \frac{\Sigma q_4 p_1}{\Sigma q_1 p_1}.$$

Но при построении ряда цепных индексов можно было поступить и по-другому: для каждого периода строить индекс объема по ценам предыдущего периода, например:

$$I_{q_{2/1}} - \frac{\Sigma q_2 p_1}{\Sigma q_1 p_1};\ I_{q_{3/2}} = \frac{\Sigma q_3 p_2}{\Sigma q_2 p_2};\ I_{q_{4/3}} = \frac{\Sigma q_4 p_3}{\Sigma q_3 p_3}.$$

Эти индексы построены с использованием различных соизмерителей, т. е. они являются *индексами* с *переменными весами.* Для таких индексов, переход цепных индексов к базисным и наоборот невозможен:

$$\frac{\Sigma q_2 p_1}{\Sigma q_1 p_1}\ \frac{\Sigma q_3 p_2}{\Sigma q_2 p_2} \cdot \frac{\Sigma q_4 p_3}{\Sigma q_3 p_3} \neq \frac{\Sigma q_4 p_1}{\Sigma q_1 p_1}.$$

Аналогично и индексы цен для двух, трех и четырех периодов можно записать в двух вариантах. Цепные индексы цен:

а) с постоянными весами (примем в качестве постоянных весов $q_1$)

$$I_{p_{2/1}} = \frac{\Sigma p_2 q_1}{\Sigma p_1 q_1};\ I_{p_{3/2}} = \frac{\Sigma p_3 q_1}{\Sigma p_2 q_1};\ I_{p_{4/3}} - \frac{\Sigma p_4 q_1}{\Sigma p_3 q_1},$$

б) с переменными весами:

$$I_{p_{2/1}} = \frac{\Sigma p_2 q_2}{\Sigma p_1 q_2};\ I_{p_{3/2}} = \frac{\Sigma p_3 q_3}{\Sigma p_2 q_3};\ I_{p_{4/3}} = \frac{\Sigma p_4 q_4}{\Sigma p_3 q_4}.$$

В первом случае (для индексов с постоянными весами) перемножение цепных индексов дает базисный, во втором случае (для индексов с переменными весами) не дает.

Отмечая «положительную» особенность индексов с постоянными весами, позволяющую переходить от цепных индексов к базисным и наоборот, вместе с тем нужно указать на ограниченное применение таких индексов. В частности, для индексов цен построение их с постоянными весами малоинтересно. Какой, например, интерес может представлять расчет индекса цен в четвертом периоде по сравнению с третьим по весам (продукции) первого периода? С практической стороны для цен гораздо больший интерес представляют индексы с переменными весами, хотя для них и не присущи указанные выше взаимосвязи между цепными и базисными индексами. С постоянными весами рассчитываются главным образом индексы физического объема продукции.

**Взаимосвязанные индексы и изучение роли отдельных факторов в вариации сложных показателей (в динамическом и территориальном разрезе).** Рассматривая общие индексы, мы говорили в основном об их возможности характеризовать динамику сложных совокупностей. Однако этим не исчерпывается роль индексов в статистике. Не менее важной и нужной в анализе является вторая особенность индексов — измерять роль отдельных факторов в динамике сложных показателей. По существу, возможности решения этой задачи заложены в самом построении общих индексов в агрегатной форме.

Многие статистические показатели взаимосвязаны, и эта взаимосвязь, в частности, проявляется в том, что некоторые из них представляют собой произведение других. Например, товарооборот является произведением количества реализованной продукции на цену, валовой сбор той или иной культуры — произведением урожайности на площадь, объем произведенной продукции — произведением численности работающих на их производительность труда и т. д.

Все сомножители в таких произведениях могут рассматриваться как факторы, определяющие величину сложного (результативного) показателя. Следовательно, когда идет речь о динамике сложного показателя, то его изменение может происходить за счет изменения всех определяющих факторов. Так, товарооборот может измениться за счет изменения количества (объема) реализованных товаров и за счет изменения цен. На изменение валового сбора может оказывать влияние изменения посевных площадей и изменение урожайности. Объем выпущенной продукции на любом предприятии может меняться как за счет изменения численности рабочих, так и за счет изменения их производительности труда и т. д.

Одна из задач статистики при анализе изменения такого рода сложных показателей состоит в определении роли отдельных факторов в этом процессе.

Чтобы выявить влияние отдельного фактора, необходимо в результативном показателе, представленном в виде произведения нескольких факторов, исследуемый фактор рассматривать как переменный, а остальные — постоянными. Так, если некоторый показатель *(k)* можно представить в виде произведения двух факторов (*a, b*), то отношение $\frac{a_1 b_0}{a_0 b_0}$ должно показать изменение *k* за счет фактора *a* и отношение $\frac{a_0 b_1}{a_0 b_0}$ изменение *k* за счет фактора *b*. В свою очередь, отношение $\frac{a_1 b_1}{a_0 b_0}$ покажет изменение результативного показателя за счет обоих факторов.

Это общее указание требует дополнительных конкретных уточнений в каждом отдельном случае. В частности, при обособлении каждого фактора и абстрагировании от влияния прочих факторов важно решить вопрос, на уровне какого периода (базисного или отчетного) следует рассматривать факторы, принимаемые за постоянные.

Теоретически здесь возможны следующие решения. Во-первых, когда независимо от последовательности изучения влияния индексируемых факторов постоянные факторы рассматриваются на уровне базисного периода, т е. как было показано выше. Во-вторых, когда постоянные факторы рассматриваются на уровне отчетного периода, т. е. $\frac{a_1 b_1}{a_0 b_1}$ (влияние фактора *a)* и $\frac{a_1 b_1}{a_1 b_0}$ (влияние фактора *b)*. В-третьих, когда каждый из уже исследованных факторов при определении влияния других (последующих) факторов рассматривается на уровне отчетного периода, т. е. если влияние первого фактора *a* определять отношением $\frac{a_1 b_0}{a_0 b_0}$, то влияние второго фактора в этом случае должно определяться отношением $\frac{a_1 b_1}{a_1 b_1}$.

Число возможных вариантов подобного отношения будет увеличиваться по мере увеличения числа факторов-сомножителей в результативном показателе. Следовательно, прежде чем рассматривать обособленное влияние каждого из факторов, необходимо обосновать констатацию «прочих» факторов на том или ином уровне.

Изменение сложного показателя за счет отдельных факторов находит отражение в факторных индексах.

В статистике принята следующая практика построения факторных индексов. Если результативный показатель можно представить как произведение объемного и качественного факторов, то, определяя влияние объемного фактора на изменение результативного показателя, качественный показатель (фактор) фиксируют на уровне базисного периода. Если же определяется влияние качественного показателя, то объемный (рассматриваемый как постоянный) фиксируется на уровне отчетного периода.

Любой агрегатный индекс, по существу, построен по указанному выше принципу обособленного рассмотрения влияния отдельных факторов на изменение сложного показателя. Действительно, индекс физического объема в агрегатном виде:

$$I_q == \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}$$

показывает, как изменяется стоимость определенного круга продукции (сложный показатель) за счет изменения количества продукции при фиксировании уровня цен по базисному периоду.

Агрегатный индекс цен $1p = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_1 p_0}$ отражает изменение стоимости за счет влияния изменения цен при фиксировании объема продукции на уровне отчетного периода.

В любом случае, в соответствии с основным определением индекса, в числителе показателя стоит стоимость продукции сравниваемого уровня, в знаменателе – стоимость продукции на уровне базы сравнения. Но в числителе приведённого индекса физического объёма Ласпейреса зафиксировано гипотетическое (в запаздывающей гипотезе) значение стоимости сравниваемого уровня $\boldsymbol{Q_1*}$, в знаменателе – реальное значение $\boldsymbol{Q_0}$. А в числителе увязанного с ним индекса цен Пааше зафиксировано реальное значение стоимости сравниваемого уровня $\boldsymbol{Q_1}$, в то время как в знаменателе – гипотетическое значение $\boldsymbol{Q_0*}$ (в опережающей гипотезе). Индексный метод увязывает при построении факторной модели общие индексы, использующие разнонаправленные гипотезы, которые при взаимодействии взаимно погашают смещение оценок (по построению общих индексов, $\boldsymbol{Q_0* = Q_1* = Q*}$). Поэтому произведение частных факторных индексов тождественно равно общему индексу результирующего показателя, то есть выполняется рассмотренное выше основное требование к построению индексов.

Например, индексы физического объема и цен являются факторными по отношению к индексу стоимости, т. е.

$$I_{qp} = I_q I_p$$

или

$$\frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_0} = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \cdot \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_1 p_0}.$$

К числу взаимосвязанных индексов относятся и индексы переменного состава (отражающие изменение средних уровней качественных показателей), индексы структурных сдвигов и индексы фиксированного состава:

$$\underset{\substack{\text{(отношение средних}\\ \text{уровней)}}}{I_{\text{пер.сост.}}} = I_{\text{структ.сдвигов}}\,\underset{\substack{\text{(отношение средних уровней}\\ \text{при структуре совокупности}\\ \text{в отчетном периоде)}}}{I_{\text{фик. сост.}}}$$

На основе взаимосвязи между этими индексами всегда можно проанализировать и определить влияние изменений структуры совокупности и самой индексируемой величины на вариацию средних уровней изучаемого показателя.

В статистике можно встретить результирующих показателей, зависящих от трех и более факторов. Так, например, стоимость материальных затрат, связанных с производством определенной продукция, зависит от количества выпущенной продукции, удельного расхода того или иного материала и цен на него. Изменение любого из названных факторов повлечет за собой изменение результативного показателя. Следовательно, изучая динамику такого сложного результативного показателя, важно правильно построить систему взаимосвязанных индексов.

Эта задача сложнее, нежели при изучении взаимодействия двух факторов, так как, определяя влияние одного из трех факторов на изменение результативного показателя, приходится фиксировать в качестве неизменных два фактора, каждый из которых может фиксироваться на разных уровнях. Здесь решение вопроса для различных показателей зависит от объекта. Если обозначить количество выработанной продукции через *q*, удельные расходы материалов на единицу продукции через *m*, а цены, на материалы через *p*, то результативный показатель *z* — общая стоимость материальных затрат — выразится как $\Sigma qmp$, а ее изменение составит:

$$I_z = \frac{\Sigma\, q_1 m_1 p_1}{\Sigma\, q_0 m_0 p_0}.$$

Факторные индексы при этом должны быть построены так, чтобы они были взаимосвязанными, составляли систему, а не существовали изолированно друг от друга. Эта взаимосвязь будет иметь место, в частности, при таком построении факторных индексов:

$$\frac{\Sigma\, q_1 m_1 p_1}{\Sigma\, q_0 m_0 p_0} = \frac{\Sigma\, q_1 m_0 p_0}{\Sigma\, q_0 m_0 p_0} \cdot \frac{\Sigma\, q_1 m_1 p_0}{\Sigma\, q_1 m_0 p_0} \cdot \frac{\Sigma\, q_1 m_1 p_1}{\Sigma\, q_1 m_1 p_0}.$$

Три множителя справа — это индекс объема (q), построенный при фиксировании расхода и цен на уровне базисного периода, индекс удельных расходов (m), построенный при фиксировании объема продукции на уровне отчетного периода, а цен на уровне базисного периода, индекс цен (p), построенный при фиксировании и объема продукции и удельного расхода на уровне отчетного периода. Вычитая из числителя каждой формулы ее знаменатель, можно получить сумму абсолютного прироста за счет соответствующего фактора.

При такой системе взаимосвязанных индексов в первом факторном индексе (объема) фиксированные показатели приняты на базисном уровне, поскольку оба они (и расход и цены) являются качественными. Во втором факторном индексе (расходов) влияние изменения норм на общие затраты указано уже с учетом изменившегося объема, т. е. на отчетный выпуск продукции (цены по-прежнему неизменны). И наконец, факторный индекс цен построен с фиксированием на уровне отчетного периода как объема продукции, так и удельных расходов. Но очевидно, что чем больше взаимосвязанных факторов определяют результативный показатель, тем более сложным является процесс разложения по факторам и тем большего обоснования требует построение каждого из факторных индексов.

Если P — вектор-столбец цен, Q — вектор-столбец продукции, а M — матрица удельных затрат i-го материала на единицу j-го продукта mij (i — номер строки, j— столбца), то Σpmq=P´MQ.

Приведенное выше разложение в матричной форме имеет вид

$$\frac{P_1' M_1 Q_1}{P_0' M_0 Q_0} = \frac{P_0' M_0 Q_1}{P_0' M_0 Q_0} \cdot \frac{P_0' M_1 Q_1}{P_0' M_0 Q_1} \cdot \frac{P_1' M_1 Q_1}{P_0' M_1 Q_1}.$$

Заметим, что при этом

$$P'M = \left(\sum_i p_i m_{i1}, \sum_i p_i m_{i2}, \ldots\right) = (c_1, c_2, \ldots) = C',$$

где $c_j$ — стоимость затрат всех материалов на единицу $j$-го продукта. Поэтому

$$\frac{P_1' M_1 Q_1}{P_0' M_0 Q_1} = \frac{(P_1' M_1) Q_1}{(P_0' M_0) Q_1} = \frac{C_1' Q_1}{C_0' Q_0},$$

т. е. равно индексу себестоимости (здесь — без зарплаты и амортизации). С другой стороны, $MQ = \left(\sum_j m_{1j} q_j \sum_j m_{2j} q_j \ldots\right)$ или равно вектору-столбцу $R$ количеств материалов $r_i$, вообще израсходованных в производстве Поэтому

$$\frac{P_1' M_1 Q_1}{P_0' M_1 Q_1} = \frac{P_1' (M_1 Q_1)}{P_0' (M_1 Q_1)} = \frac{P_1' R_1}{P_0' R_1},$$

т. е. равно индексу цен материалов.

В анализе индексов важную роль играет и другое направление — анализ зависимости общего индекса от субиндексов отдельных групп его элементов. Выше мы видели, что индекс может быть представлен как взвешенная средняя (арифметическая или гармоническая) из индивидуальных индексов. Вычисление этой средней можно представить разбитым на этапы: сначала вычисляются по аналогичным формулам средние по группам элементов (субиндексы), а затем из этих средних вычисляется общий индекс, в котором весом каждого субиндекса служит сумма весов его элементов. Так можно численно выразить, в какой мере общий индекс оказался определенным под воздействием отдельных субиндексов. Например, индекс объема продукции всей промышленности окажется представленным как средняя из индексов ее объема по отраслям, а далее – по подотраслям и т. д. — вплоть до индивидуальных индексов отдельных продуктов.

В практике социальной и политической статистики нередко отсутствует возможность действительно фиксировать изменение каждого индивидуального элемента. В таких случаях прибегают к методу «типопредставителей» групп: в каждой группе наблюдается индивидуальный индекс одного характерного для нее элемента, который принимается равным субиндексу всей группы, т. е. он вводится в общий индекс с весом своей группы (иногда в группе выделяется не один, а два-три представителя).

Таким образом, для раскрытия различных сторон вариации сложных показателей используется не один, а целый ряд индексов, различных по построению и содержанию, но вместе с тем связанных между собой и дополняющих друг друга. Поэтому мы вправе говорить о системе индексов, используемых в анализе факторов, определивших вариацию различных показателей.

Значение относительных величин в любом исследовании намного возрастает, если они дополняются абсолютными показателями. Возможность определения влияния отдельных факторов на вариацию сложных (результативных) показателей через построение взаимосвязанных индексов позволяет в индексном методе дополнить анализ динамики сложных явлений абсолютными показателями, в частности, определить в абсолютном выражении изменение сложного показателя за счет влияния отдельных факторов. Расчеты, связанные с определением в абсолютном выражении изменения сложного (результативного) показателя за счет отдельных факторов, называют *разложением абсолютного прироста по факторам*. Рассмотрим конкретный ***пример***.

Пусть имеются следующие данные по трем шахтам (табл. 4). Общая добыча угля по трем шахтам возросла за год на 130 тыс. т (на 13%), что, очевидно, связано с увеличением общей численности рабочих на шахтах и ростом среднегодовой добычи одного рабочего. Разложим абсолютный прирост добычи угля по факторам, т. е. выразим его как алгебраическую сумму двух слагаемых, определяющих изменение добычи угля за счет каждого фактора в отдельности.

Таблица 4

| Шахта | Добыча угля т | | Среднегодовая численность рабочих | | Среднегодовая добыча угля на одного рабочего т/чел. | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2003 | 2004 | 2003 | 2004 | 2003 | 2004 |
| | $q_0=w_0T_0$ | $q_1=w_1T_1$ | $T_0$ | $T_1$ | $w_0$ | $w_1$ |
| № 1 | 200 000 | 243 600 | 400 | 420 | 500 | 580 |
| № 2 | 360 000 | 390 400 | 600 | 610 | 600 | 640 |
| № 3 | 440 000 | 495 000 | 500 | 550 | 880 | 900 |
| Итого | 1 000 000 | 1 130 000 | 1 500 | 1 580 | 667 | 715 |

Рассматривая объем добытого угля как сложный показатель, представляющий собой произведение численности рабочих (Т) на их производительность труда (w), запишем в общем виде и рассчитаем (пользуясь обозначенной в таблице символикой) следующие три взаимосвязанных индекса:

1) индекс общего объема добытого угля

$$I_q=\frac{\Sigma w_1T_1}{\Sigma w_0T_0}=\frac{1\,130\,000}{1\,000\,000}=1{,}13,\ \text{или}\ 113\%;$$

2) факторный индекс, отражающий изменение добычи угля за счет изменения числа рабочих:

$$I_T=\frac{\Sigma w_0T_1}{\Sigma w_0T_0}=\frac{500\ 420+600\cdot 610+880\ 550}{1\,000\,000}=\frac{1\,060\,000}{1\,000\,000}=$$
$$=1{,}06,\ \text{или}\ 106\%;$$

3) индекс, отражающий изменение добычи угля за счет изменения производительности труда (среднегодовой добычи одного рабочего):

$$I_w=\frac{\Sigma w_1T_1}{\Sigma w_0T_1}=\frac{1\,130\,000}{1\,060\,000}=1{,}066,\ \text{или}\ 106{,}6\%.$$

Нетрудно заметить, что в самих показателях числителя и знаменателя, на основе которых рассчитаны эти индексы, содержится ответ на поставленный вопрос о разложении абсолютного прироста по факторам.

В первом (общем результирующем) индексе объема в числителе показана фактическая добыча угля в 2004 г., а в знаменателе — добыча 2003 г. Вычитая из числителя знаменатель, получаем абсолютный прирост, распределяемый по факторам, т. е.

$$\Sigma w_1T_1 - \Sigma w_0T_0 = 1\ 130\ 000 - 1\ 000\ 000 = 130\ 000 \text{ т.}$$

Рассмотрим факторные индексы. В индексе *I*т знаменатель представляет собой показатель фактической добычи угля в 2003 г. Числитель же является расчетной гипотетической величиной, показывающей, какой была бы добыча в отчетном периоде (в 2004 г.), если бы производительность труда оставалась без изменения на базисном уровне, а менялось лишь число рабочих.

Следовательно, вычитая из числителя этой формулы знаменатель, мы определяем, какая часть общего прироста добычи угля достигнута за счет изменения числа рабочих, т. е.

$$\Sigma w_0T_1 - \Sigma w_0T_0 = \Sigma (T_1 - T_0)\, w_0 = 1\ 060\ 000 - 1\ 000\ 000 = 60\ 000 \text{ т.}$$

(Следует иметь в виду, что в данном показателе нашло отражение и влияние структурного фактора, т. е. распределение рабочих по шахтам.)

Во втором факторном индексе, отражающем влияние изменения производительности труда, числитель представляет собой фактическую добычу угля в отчетном периоде, а знаменатель показывает, каким был бы этот объем, если бы рабочие в 2004 г. работали с производительностью 2003 г.

Так как число рабочих принимается неизменным и в числителе и в знаменателе, то, вычитая из первого второй, получаем ответ на вопрос о том, какая часть абсолютного прироста обусловлена изменением производительности труда на отдельных шахтах, т. е.

$$\Sigma w_1T_1 - \Sigma w_0T_1 = \Sigma (w_1 - w_0)\, T_1 = 1\ 130\ 000 - 1\ 060\ 000 = 70\ 000 \text{ т.}$$

Как видно, 60 тыс.+ 70 тыс. == 130 тыс., т. е. сумма приростов за счёт отдельных факторов тождественно дает общий прирост. Это подтверждается и алгебраически:

$$\Sigma w_1T_1 - \Sigma w_0T_0 = (\Sigma w_0T_1 - \Sigma w_0T_0) + (\Sigma w_1T_1 - w\Sigma_0T_1)\,.$$

Таким образом, при данном способе разложения абсолютного прироста мы исходим из общего принципа построения факторных индексов, при котором в случае индексирования качественных показателей объемный показатель фиксируется на уровне отчетного периода, а если индексируется объемный показатель, то качественный показатель фиксируется на уровне базисного периода.

При других способах построения факторных индексов слагаемые, на которые, распределяется абсолютный прирост, будут не идентичными полученным выше, т. е.

изменится и разложение по факторам. Например, если во всех факторных индексах постоянная величина, от влияния которой абстрагируются, принимается на уровне базисного периода, то при разложении абсолютного прироста по факторам остается неразложенный остаток. Этот неразложенный прирост является результатом взаимодействия обоих факторов и подлежит, в свою очередь, распределению между ними.

Поэтому изложенный выше первый принцип разложения абсолютного прироста по факторам, принятый в практике социальной и политической статистики, является наиболее удобным для аналитических целей. При таком построении достигается возможность оценить влияние изменения качественного фактора на сложный показатель в реально существующем в нем соотношении объемных показателей.

Аналогичные формулы разложения абсолютного прироста по факторам могут быть записаны для самых различных результативных показателей, которые можно представить как произведение объемного фактора на качественный. Во всех таких случаях прирост результативного показателя за счет качественного фактора можно рассчитать как произведение прироста данного фактора на величину объемного фактора в отчетном периоде или, наоборот, прирост результативного признака за счет объемного фактора можно определить как произведение прироста данного фактора на уровень качественного фактора в базисном периоде.

Разложение абсолютного прироста по двум факторам — это наиболее простой случай распределения абсолютного прироста по факторам вообще. В действительности можно встретить сколько угодно результативных показателей, зависящих от трех и более факторов. Так, например, стоимость материальных затрат, связанных с производством определенной продукции на предприятии, зависит от количества выпущенной продукции, норм расхода того или иного сырья и цен на это сырье. Изменение любого из названных факторов повлечет за собой изменение сложного результативного показателя. Следовательно, изучая динамику такого сложного показателя, важно правильно построить система взаимосвязанных индексов и разложить абсолютный прирост по трем факторам.

Эта задача сложнее, нежели при изучении взаимодействия двух факторов, так как, определяя влияние одного из трех факторов на величину результативного показателя, приходится фиксировать в качестве неизменных два фактора, каждый из которых может фиксироваться на разном уровне. Здесь решение вопроса для различных показателей чаще зависит от логических рассуждений.

Если обозначить количество выработанной продукции через q, нормы расхода материалов на единицу продукции—через $m$, а цены на материалы — через p, то результативный показатель z — общая стоимость материальных затрат — выразится как Σz=Σqmp, а индекс общих затрат составит:

$$I_z = \frac{\Sigma q_1 m_1 p_1}{\Sigma q_0 m_0 p_0}.$$

Факторные индексы при этом должны быть построены так, чтобы они были взаимосвязаны и составляли систему, а не существовали изолированно друг от друга. Такая взаимосвязь будет иметь место, в частности, при следующем построении факторных индексов:

$$\frac{\Sigma q_1 m_1 p_1}{\Sigma q_0 m_0 p_0} = \frac{\Sigma q_1 m_0 p_0}{\Sigma q_0 m_0 p_0} \; \frac{\Sigma q_1 m_1 p_0}{\Sigma q_1 m_0 p_0} \; \frac{\Sigma q_1 m_1 p_1}{\Sigma q_1 m_1 p_0},$$

где индекс объема ( $\frac{\sum q_1 m_0 p_0}{\sum q_0 m_0 p_0}$ ) построен при фиксировании расхода материалов и цен на уровне базисного периода, индекс удельных расходов $(\frac{\sum q_1 m_1 p_0}{\sum q_1 m_0 p_0})$ —при фиксировании объема продукции на уровне отчетного периода, а цен на уровне базисного периода и индекс цен $(\frac{\sum q_1 m_1 p_1}{\sum q_1 m_1 p_0})$ —при фиксировании и объема продукции, и норм расхода на уровне отчетного периода. Вычитая из числителя каждой формулы ее знаменатель, можно получить сумму абсолютного изменения стоимости материальных затрат за счет соответствующего фактора.

Чем больше взаимосвязанных факторов определяют результативный показатель, тем более сложным является процесс разложения по факторам и тем большего обоснования требует построение каждого из факторных индексов. В целом же этот прием разложения абсолютных приростов результативного показателя по факторам является очень важным в статистическом анализе.

Это так называемые территориальные индексы, которые имеют особенное значение для пространственных сопоставлений.

Статистические справочники содержат значительное количество данных по важнейшим экономическим показателям в территориальном разрезе. Они могут быть использованы для построения территориальных индексов.

При этом, если объектом пространственного сравнения является единичный, простой показатель, то территориальные сопоставления не вызывают особых затруднений, так как этот индекс, по существу, является индивидуальным.

Построение территориальных индексов усложняется, когда возникает необходимость пространственных сравнений по сложным совокупностям, содержащим определенный набор компонентов. В частности, при построении территориальных индексов в агрегатной форме возникает вопрос о том, какие данные следует в этих индексах принимать в качестве весов или соизмерителей.

В территориальных индексах индексируемой величиной может быть объемный показатель и качественный. Для качественных показателей территориальные индексы могут рассчитываться как индексы переменного и фиксированного состава.

Вместе с тем при всей формальной схожести с индексами динамики территориальные индексы отличаются по существу и имеют свои особенности в построении. И решающую роль в выборе весов того или иного общего индекса должны играть задачи и цели исследования.

Сравнительно просто могут быть построены территориальные индексы количественных показателей, в частности индексы физического объема продукции в агрегатной форме. Весами (соизмерителями) в таких индексах могут быть использованы сопоставимые цены. Так, при сравнении продукции района «А» с районом «В» территориальный агрегатный индекс физического объема можно записать как:

$$I_q = \frac{\sum q_A p}{\sum q_B p} \ ,$$

где $q_A$ и $q_B$ —соответственно, продукция районов «А» и «В»; р — сопоставимые цены для двух районов. Однако если пространственное сравнение двух районов производится с целью определения различий трудоемкости произведенной там продукции, то в качестве весов следует принять трудоемкость единицы каждого вида продукции (затраты времени на изготовление единицы продукции). Эта трудоемкость (t), как любой качественный показатель, используемый в роли соизмерителей при индексировании объемных показателей, должна фиксироваться на одном и том же уровне для обоих районов. Но здесь возникает проблема, *какую же трудоемкость принимать в качестве фиксированной*: ею может быть трудоемкость того района, данные которого сопоставляются; трудоемкость базисного; средняя трудоемкость для сравниваемых районов или трудоемкость, осредненная для более широкой территории.

Различное решение вопроса о весах даст, очевидно, и различные ответы на вопрос о пространственном различии объема продукции ряда районов.

Не меньше проблем возникает и при построении территориальных индексов качественных показателей. Так, например, при сравнении уровня цен на определенную продукцию, реализуемую в двух районах, возможно несколько вариантов взвешивания.

В качестве фиксированного веса можно принимать объем продукции сравниваемого района:

$$I_p = \frac{\Sigma q_A p_A}{\Sigma q_A p_B}.$$

В качестве фиксированного веса можно принять объем продукции того района, который является базой сравнения, т. е.

$$I_p = \frac{\Sigma q_B p_A}{\Sigma q_B p_B}.$$

Не исключен и такой вариант, когда в качестве весов может быть зафиксирован суммарный объем продукции по двум районам или какой-то другой постоянный состав ее.

Ясно, что и в этом случае, т, е. при построении территориальных индексов качественных показателей, различное решение вопроса о взвешивании даст не равнозначные ответы.

Рассмотрим это на примере. Предположим, по двум районам имеются следующие данные о реализации нескольких видов промышленной продукции (табл. 5).

Таблица 5

| Виды продукции | Район «A» | | Район «B» | |
|---|---|---|---|---|
| | количество реализованной продукции, $q_A$ | цена за единицу руб. $p_A$ | количество реализованной продукции $q_B$ | цена за единицу руб. $p_B$ |
| *a* | 500 | 30 | 2000 | 25 |
| *b* | 1200 | 5 | 600 | 7 |
| *c* | 800 | 10 | 3000 | 8 |

Пусть по приведенным данным необходимо сравнить цены на указанную продукцию по двум районам. При этом выбор базы сравнения должен строго определяться задачами и объектом исследования. Если объектом исследования является район «А», то, естественно, данные этого района и должны сопоставляться с показателями другого района. Территориальное сопоставление цены отдельных видов продукции не представляет трудности. Достаточно, например, 30 разделить на 25, чтобы сказать, что в районе «А» по сравнению с районом «В» цена продукта *a* выше в 1,2 раза (или на 20%), по продукту *b* —ниже на 29%, по продукту *c*—выше на 25%. При сопоставлении же уровня цен в целом по всем видам продукции территориальный индекс цен в агрегатной форме, как указывалось выше, может быть построен по-разному:

$$а)\ I_p = \frac{\Sigma q_A p_A}{\Sigma q_A p_B} = \frac{500\cdot 30 + 1200\cdot 5 + 800\cdot 10}{500\cdot 25 + 1200\cdot 7 + 800\cdot 8} = 1{,}062;$$

$$б)\ I_p = \frac{\Sigma q_B p_A}{\Sigma q_B p_B} = \frac{2000\cdot 30 + 600\cdot 5 + 3000\cdot 10}{2000\cdot 25 + 660\cdot 7 + 3000\cdot 8} = 1{,}202;$$

$$в)\ I_p = \frac{\Sigma q_{A+B} p_A}{\Sigma q_{A+B} p_B} = \frac{2500\cdot 30 + 1800\cdot 5 + 3800\cdot 10}{2500\cdot 25 + 1800\cdot 7 + 3800\cdot 8} = 1{,}156.$$

Таким образом, получено три ответа. При взвешивании по продукции района «*А*» индекс показывает, что цены на данный вид продукции в районе «*А*» на 6,2% выше, чем в районе «5». Второй индекс, построенный по весам объема продукции района «В», показывает превышение цен в районе «*А*» по сравнению с районом «В» на 20,2%. Третий индекс, где весами взята сумма продукции по двум районам, показывает превышение цен в районе «А» на 15,6%.

На наш взгляд, наибольший практический интерес может представлять первый индекс, т. е. рассчитанный по продукции района «*А*». В числителе этого индекса показана реальная выручка от продажи в районе «*А*». Знаменатель же, являясь расчетной величиной, характеризует, какой была бы эта выручка, если бы продукция района продавалась по ценам района «В». Следовательно, разность между числителем и знаменателем в этой формуле определяет потери (если разность положительная) покупателей района «А» или выигрыш (если разность отрицательная) за счет различий в ценах по сравнению с районом «В».

Ряд серьёзных проблем возникает при использовании индексов в международных сопоставлениях в связи с необходимостью конструирования сопоставимых соизмерителей по неоднородным совокупностям единиц, входящих в макроагрегаты системы национальных счетов. Проведение международных сопоставлений в динамике на основе макроэкономических агрегатов и их компонентов затрудняется несопоставимостью единиц измерения входящих переменных из-за нелинейного характера диспропорций национальных валют в сфере измерения результатов (в числителе) и расходов (в знаменателе). Как известно, дефляторы ВДС и государственных расходов могут весьма существенно различаться. Поэтому для получения несмещённых оценок целесообразно проводить пересчёт в сопоставимые цены на основе принятых в международной практике методов, используемых для переоценки ВВП (см. хрестоматию).

Результаты сопоставлений, получаемые, как правило, в индексной форме должны отвечать ряду требований аналитического характера:

1) **Характерность** - применяемые для расчета ППС системы весов должны в достаточной степени отражать особенности структур показателей и структур цен всех

изучаемых стран; часто под характерностью понимают независимость результатов сопоставлений показателей двух стран от данных третьих стран.

2) **Инвариантность** - результаты расчетов ППС не должны зависеть от выбранной базы сравнения (базовой страны, базовых весов и т.д.). В случае невыполнения требования инвариантности результаты сопоставления будут во многом определяться выбором весов и т.д., что приведет к некоторой произвольности получаемых результатов.

В международных сопоставлениях это имеет большее значение по сравнению с динамическими сравнениями. Ни одна страна в группе стран не имеет такого естественного статуса, как первый или базовый период во временном ряду. Обычно нет экономически обоснованных причин для выделения конкретной страны на роль базисной. Кроме того, в международном контексте выбор базы оказывает большее влияние на конечные результаты, так как структуры относительных цен и количеств по странам могут различаться гораздо сильнее, чем между последовательными периодами времени в одной и той же стране.

3) **Транзитивность** (аналог требованию циркулярности в динамических сравнениях) - прямые парные сравнения ППС должны давать те же результаты, что и косвенные сопоставления через третьи страны. Математически это можно выразить так - набор индексов (ППС) считается транзитивным, если для каждой триады индексов выполняется следующее условие:

$I(A/B) = I(A/C) * I(C/B)$.

Если ППС не отвечают требованию транзитивности, то это может приводить к логическим несоответствиям. Например, пересчитанный с помощью ППС показатель страны А больше показателя страны В, страны В - больше показателя страны С, но показатель страны С больше показателя страны А: $A > B$; $B > C$; но $C > A$. Индекс, исчисленный косвенным путем, является по сути цепным индексом, связующим страны А и В, при этом страна С используется в качестве связующей страны.

4) **Аддитивность** - ППС для показателя в целом и для его составных элементов должны быть рассчитаны таким образом, что результаты пересчета для показателя в целом должны складываться из результатов пересчета его компонентов. Это требование в литературе часто упоминается как требование внутренней согласованности. Если требование аддитивности не выполняется, то это может приводить к внутренней логической несогласованности. Например, в сопоставимой валюте все компоненты показателя страны А больше компонентов показателя страны В, но в целом показатель страны В больше показателя страны А.

Ряд из вышеуказанных требований находится между собой в определенном логическом противоречии. Например, транзитивность и характерность: для обеспечения первого требования необходимо применять единые веса, для обеспечения второго требования в идеальном случае для каждой пары стран предполагается применение собственных весов. Поэтому при любом многостороннем сопоставлении можно добиться лишь некоторого компромисса между выполнением этих требований.

ППС между валютами каких-либо двух стран рассчитывают, используя те же виды индексов, что и при динамических сопоставлениях цен.

На уровне первичных товарных групп используется формула среднегеометрического невзвешенного индекса из индивидуальных соотношений цен:

$$\overline{i_{grr}}(A/B) = \sqrt[m]{\prod_{j=1}^{m} i_j(A/B)}$$

где

$i_j$ (A/B) - индивидуальные индексы цен "страна A к стране B",

$\overline{i_{grr}}$ (A/B) - среднегрупповой индекс цен "страна A к стране B",

m - число товаров-представителей в группе.

Применение формулы невзвешенного индекса объясняется отсутствием надежной сопоставимой в международном плане информации о весах индивидуальных репрезентантов. Выбор формулы геометрического индекса объясняется формально-аналитическими соображениями (геометрический индекс обеспечивает инвариантность, то есть обратимость индексов).

ППС на агрегированном уровне можно получить с помощью агрегатных индексов Пааше и Ласпейреса, используя исчисленные по вышеприведенной формуле среднегрупповые ППС и веса товарных групп в национальной валюте.

Пусть мы имеем: Pa, Qa, Pb, Qb - цены и количества товаров в странах A и B (обозначения отдельных товаров для простоты опущены), Wa, Wb - стоимостные объемы товарных групп в странах A и B в национальных валютах. Тогда ППС по формуле Пааше имеет следующий вид:

$$P^{A//B} = \frac{\sum P_A * Q_A}{\sum P_B * Q_B} = \frac{\sum W_A}{\sum W_A / (P_A / P_B} = \frac{\sum W_A}{\sum W_A / \overline{i_{grr}(A/B)}}$$

ППС по формуле Ласпейреса имеет следующий вид:

$$L^{A//B} = \frac{\sum P_A * Q_B}{\sum P_B * Q_B} = \frac{\sum W_B * (P_A / P_B)}{\sum W_B} = \frac{\sum W_B * \overline{i_{grr}(A/B)}}{\sum W_B}$$

ППС по формуле Пааше корреспондируется с соответствующим индексом физического объема Ласпейреса, и наоборот. Обычно имеются довольно значительные (около 5 %) расхождения между численными значениями индексов Пааше и Ласпейреса. Как правило, индекс Ласпейреса больше индекса Пааше по числовой величине. Это объясняется тем, что относительные цены и количества между странами имеют тенденцию к отрицательной корреляции - так называемый эффект Гершенкрона: институциональные единицы в стране обычно покупают относительно больше продуктов и услуг, которые относительно более дешевы в стране по сравнению с другими странами.

Учитывая существование таких значительных расхождений между индексами Пааше и Ласпейреса, **в международных двусторонних или бинарных сопоставлениях в качестве официального результата применяется обычно индекс Фишера** – средняя геометрическая величина из двух вышеуказанных индексов:

$$I = \sqrt{P * L}$$

Индекс Фишера обеспечивает инвариантность результатов в двусторонних сопоставлениях и именно этим объясняется его широкое использование в международных сопоставлениях. Кроме того, индекс Фишера является частным случаем многих более сложных методов исчисления ППС - методов расчетов результатов многосторонних сопоставлений, например, методов Ван Изерена, метода Элтете – Кевеша – Шульца (ЭКШ), метод Гири-Камиса (модифицированный метод ЭКШ).

Средние международные цены определяются как средневзвешенные величины из национальных цен (в качестве весов выступают физические объемы продуктов произведенных или потребленных в странах), переведенных с помощью ППС в условную международную валюту. ППС каждой валюты определяется как отношение стоимостных объемов показателя в международных ценах и в национальной валюте.

Математически задача сводится к решению системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \overline{p_{(i)}} = \sum_{j=1}^{N} p(i,j) * f(j) * q(i,j) / Q(i) \\ f(j) = \sum_{i=1}^{N} \overline{p(i)} * q(i,j) / W(j) \end{cases}$$

i = 1,2,3, ..., N;

j = 1,2,3, ..., N;

где

p(i,j), q(i,j) - цена и количество i-ого товара в j-ой стране,

Q(i) - общее количество i-ого товара во всех странах, W(j) - стоимостной объем показателя j-ой страны в национальной валюте,

p(i) - средневзвешенная международная цена на i-ый товар,

f(j) - ППС валюты j-ой страны по отношению к международной валюте,

f(N) = 1.

Заданием f(N) = 1 мы приводим международные цены к масштабу цен N -ой страны. Метод инвариантен к выбору масштаба, т.е. валюта каждой страны может быть выбрана в качестве точки отсчета (результаты от этого не меняются).

Рассмотренные в самых общих чертах основные принципы построения территориальных индексов далеко не исчерпывают всех проблем, которые могут возникнуть при территориальных сопоставлениях различных конкретных показателей. Решить многие из возникающих проблем помогают исследователю практической опыт исследовательской работы и знание конкретного объекта исследования.