XIV всероссийская олимпиада школьников по экономике
Заключительный этап
9—11 классы

Решения задач (вторая часть)

Дата написания	**15 апреля 2009 г.**
Количество задач	*7*
Сумма баллов	**100**
Время написания	**180 минут**

Задача № 8 (10 баллов)

Кривая предельной выручки фирмы-монополиста имеет вид $\mathrm{MR}(Q) = 400 - 4Q$. Средние издержки постоянны. В точке оптимума эластичность спроса равна -3.

Чему равно максимальное значение прибыли?

Решение:

Линейный спрос вдвое более пологий, чем MR, значит, обратная функция спроса имеет вид: $P_d = 400 - 2Q$. Эластичность равна -3 в точке, где $Q = 50$, а $P = 300$. В этой (оптимальной) точке $\mathrm{MR}(50) = \mathrm{MC}(50) = 200 = \mathrm{AC}(50)$ ($\mathrm{MC} = \mathrm{AC}$, так как $\mathrm{AC} = const$). Отсюда $\pi = TR(50) - TC(50) = 50 \cdot 300 - 50 \cdot 200 = 15\,000 - 10\,000 = 5\,000$.

Ответ: 5 000.

Задача № 9 (14 баллов)

Робинзон собирает кокосы и ловит крокодилов и готовит из них особое блюдо — *крококосбургер*. Для приготовления одного крококосбургера нужен один крокодил и три кокоса. Занимаясь только ловлей крокодилов, Робинзон может поймать 76 крокодилов в месяц; занимаясь только сбором кокосов, он может собрать 114 кокосов в месяц, а если бы кто-нибудь поставлял ему ингредиенты и он мог заниматься только готовкой, то приготовил бы за месяц 95 крококосбургеров. Альтернативные издержки занятия любым видом деятельности постоянны.

Какое максимальное количество крококосбургеров в месяц может фактически приготовить и съесть Робинзон?

Решение:

Пусть X — количество часов в месяце, которым располагает Робинзон. Тогда $76Cr = 114Co = 95Bur = X$, где Cr, Co и Bur — время, затраченное соответственно на ловлю одного крокодила, сбор одного кокоса и приготовление одного крококосбургера соответственно.

Ловя одного крокодила, Робинзон тратит $X/76$ часов; собирая кокос — $X/114$ часов; занимаясь приготовлением крококосбургера — $X/95$ часов. Итого затраты времени на сбор ингредиентов и производство одного крококосбургера составят:

$$\frac{X}{76} + \frac{3X}{114} + \frac{X}{95} = \frac{57X}{1140} = \frac{X}{20} \text{ часов.}$$

Следовательно, за X часов максимально возможно изготовить 20 крококосбургеров.

Ответ: 20 крококосбургеров.

Задача № 10 (12 баллов)

Спрос и предложение на совершенно конкурентных рынках подержанных автомобилей в странах А и Б заданы следующими функциями:

	Страна А	Страна Б
Спрос	$Q^d_{\text{А}} = 40000 - P$	$Q^d_{\text{Б}} = 50000 - P$
Предложение	$Q^s_{\text{А}} = 2P - 20000$	$Q^s_{\text{Б}} = P - 10000$

1. Определите общий объем продаж подержанных автомобилей, направление и объем экспорта, а также цены на подержанные автомобили в каждой из стран в условиях свободной торговли.

2. Страна, импортирующая подержанные автомобили, с целью защиты своих производителей ввела на каждую единицу импортируемого товара *запретительную пошлину* (в размере t руб. за единицу товара), которая делает торговлю между двумя странами невыгодной. *Определите минимальное значение такой пошлины.*

Решение:

1. Определим функции общего спроса и предложения, сложив горизонтально функции в странах А и Б:

$$Q^d_{\text{общ}} = \begin{cases} 90000 - 2P, \text{ если } P \leqslant 40000, \\ 50000 - P, \text{ если } 40000 \leqslant P \leqslant 50000 \end{cases}$$

$$Q^s_{\text{общ}} = 3P - 30000, \text{ если } P \geqslant 10000$$

Найдем точку равновесия на пересечении функций суммарного спроса и предложения. Поскольку функция спроса задается по-разному на разных интервалах цен, необходимо выяснить, на каком интервале находится равновесие. Получаем решение:

$$P^* = 24000, Q^* = 42000.$$

В условиях свободной торговли цена в странах А и Б одинакова и равна 24000. Объем внутреннего предложения в стране А: $Q^s_{\text{А}} = 2P - 20000 = 2 \cdot 24000 - 20000 = 28000$. Объем внутреннего спроса в стране А: $Q^d_{\text{А}} = 40000 - P = 40000 - 24000 = 16000$. Следовательно, страна А экспортирует машины в количестве $Ex = 28000 - 16000 = 12000$, а импортирует страна Б в том же количестве 12000.

2. Обозначим минимальную запретительную пошлину через t, тогда в стране Б цены будут на t выше, чем в стране А: $P_{\text{Б}} = P_{\text{А}} + t$.

При такой пошлине избыточный спрос в стране Б будет равен нулю:

$$50000 - P_{\text{Б}} - (P_{\text{Б}} - 10000) = 0.$$

Поэтому $P_{\text{Б}} = 30000 = P_{\text{А}} + t$. При этом $P_{\text{А}}$ не зависит от избыточного спроса в стране Б (он равен нулю) и определяется спросом и предложением внутреннего рынка в стране А:

$$Q^d = 40000 - P = Q^s = 2P - 20000 \Rightarrow 3P_{\text{А}} = 60000 \Rightarrow P_{\text{А}} = 20000.$$

Следовательно, $t = 30000 - 20000 = 10000$.

Задача № 11 (20 баллов)

Фирма «В два касания» является монополистическим конкурентом на рынке волейбольных мячей. В последнее время владельцу фирмы Н. Е. Удачнику можно только посочувствовать: его бизнес переживает не лучшие времена[1]. Спрос на продукцию фирмы линеен, однако в последнее время он стал настолько низким, что фирме неважно, уходить с рынка или производить 40 единиц продукции, — и это при наиболее продуманном, рациональном поведении! Средние переменные издержки при данном объеме выпуска аж втрое больше предельных, а единственным для фирмы шансом покрыть выручкой постоянные издержки было бы установление цены, равной 20.

Представьте, что вы являетесь сотрудником государственной службы, оказывающей поддержку малому бизнесу.

1. Проанализируйте ситуацию, в которой оказалась фирма «В два касания», графически, изобразив на одном рисунке примерные графики спроса, MR, MC, AVC, AFC.

2. Определите уравнение кривой спроса на продукцию фирмы.

3. Определите величину аккордной субсидии, необходимой для выведения фирмы Н. Е. Удачника на уровень безубыточности.

Решение:

В оптимуме фирме неважно, производить 40 единиц продукции или уходить с рынка, значит,

$$\begin{gathered}\mathrm{MR}(40)=\mathrm{MC}(40),\\ \pi(40)=\pi(0)=-\,\mathrm{FC}\\ \Downarrow\\ P(40)=\mathrm{AVC}(40)\end{gathered}$$

Более того, раз фирма не может получить прибыль большую, чем $(-\,\mathrm{FC})$, то в других точках $P < AVC$, и значит, график AVC должен *касаться* графика спроса в точке, где $Q = 40$.

Если существует лишь единственная цена ($P = 20$), при которой выручка равна постоянным издержкам, то это цена, при которой выручка максимальна. Это также и единственная цена, при которой средняя выручка (цена) равна средним постоянным издержкам. Отсюда следует, что график спроса должен *касаться* графика AFC в точке $P = 20$ и при таком объеме выпуска, где функция MR пересекает ось Q.

Пусть обратная функция спроса задается уравнением $P = a - bQ$. Тогда

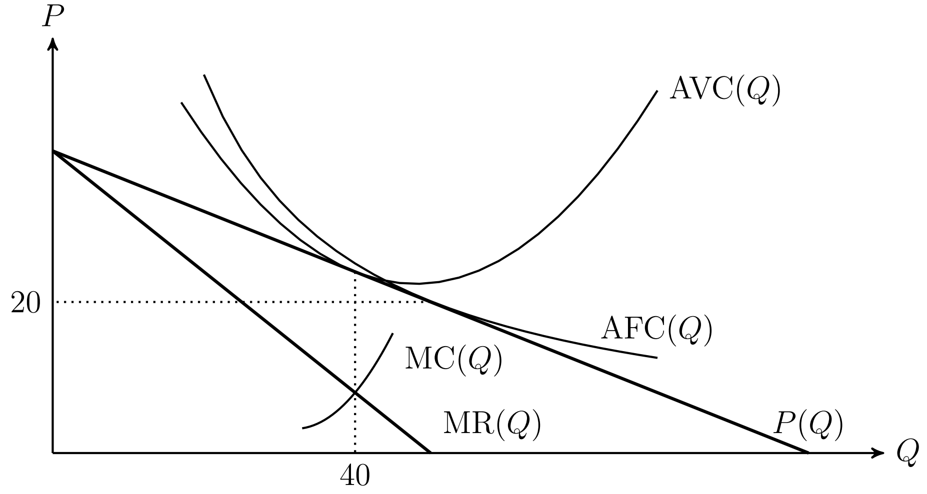
$$3=\frac{\mathrm{AVC}(40)}{\mathrm{MC}(40)}=\frac{P(40)}{\mathrm{MR}(40)}=\frac{a-b\cdot 40}{a-2b\cdot 40}\Rightarrow a=100b.$$

Как мы выяснили, максимальную выручку фирма может получить при $P = 20$. Для линейной функции спроса цена, максимизирующая выручку, равна $a/2$, значит, $a = 40$. Функция спроса, таким образом, имеет вид $P = 40 - 0{,}4Q$.

Понятно, что величина аккордной субсидии, выводящей фирму на уровень безубыточности, должна быть в точности равна текущим убыткам фирмы (ведь после получения аккордной субсидии фирма не изменит выпуск). Значит, $S = -\pi(40) = \mathrm{FC} = \mathrm{TR}_{\max} = 20 \cdot 100/2 = 1\ 000$.

[1] *Кризис!*

Графически ситуация сводится к следующему:



Вот такие «Два касания»!

Задача № 12 (12 баллов)

Фирма «Акерлоф Ltd.» является монополистом на рынке лимонов. В краткосрочном периоде данная фирма использует единственный переменный фактор производства — труд, и закупает его на совершенно конкурентном рынке. Известно, что в точке оптимума коэффициент эластичности выручки данной фирмы по выпуску составил 0,37, а средняя производительность труда достигла максимального значения и составила 500.

Сколько лимонов может купить рабочий этой фирмы на одну зарплату?

Решение:

Запишем условие оптимума фирмы-монополиста: $\mathrm{MRP}_L = w$, или, что то же самое, $\mathrm{MR} \cdot \mathrm{MP}_L = w$. Разделим обе части уравнения на рыночную цену лимона (p):

$$\frac{\mathrm{MR}}{p} \cdot \mathrm{MP}_L = \frac{w}{p}.$$

Но эластичность выручки по выпуску как раз равна:

$$\mathrm{TR}' \cdot \frac{Q}{\mathrm{TR}} = \frac{\mathrm{MR}}{p}.$$

Кроме того, в точке оптимума $\mathrm{AP}_L = \mathrm{MP}_L$, так как $\mathrm{AP}_L = \max \mathrm{AP}_L$. Значит,

$$E^Q_{\mathrm{TR}} \cdot \mathrm{AP}_L = \frac{w}{p} \Rightarrow \frac{w}{p} = 500 \cdot 0{,}37 = 185.$$

Это и есть ответ на вопрос задачи: величина w/p как раз показывает реальную зарплату рабочего, выраженную в лимонах.

Ответ: 185.

Задача № 13 (14 баллов)

Заботясь о сохранении редких видов рыб, государство собирается ввести на рынке черной икры потоварный налог. С помощью этой меры оно надеется не только ограничить потребление икры, но и получить средства для финансирования дорогостоящей экологической программы. *Таким образом, убивая двух зайцев, можно будет спасти тысячи рыб!*

С помощью налога нужно собрать не менее 48 216 тыс. руб. — именно столько стоит программа. Экономисты правительства оценили для данного рынка кривую Лаффера при введении потоварного налога:

$$T = \frac{200900t}{(1+t)^2},$$

где t — ставка налога (в тыс. руб.), а T — общая сумма налоговых поступлений (также в тыс. руб.).

На сколько процентов государству удастся максимально сократить объем потребления икры?

Решение:

Найдем, какие ставки налога обеспечат как минимум нужную сумму:

$$T = \frac{200900t}{(1+t)^2} \geqslant 48216 \Rightarrow \frac{2}{3} \leqslant t \leqslant \frac{3}{2}.$$

Государство стремится минимизировать объем продаж черной икры, значит, оно установит максимальную налоговую ставку из всех подходящих: $t = 3/2$.

Для того чтобы найти изменение рыночного объема, вспомним, что сумма налоговых поступлений при введении потоварного налога равна $t \cdot Q(t)$, где $Q(t)$ — равновесный объем, который установится на рынке при введении налога по ставке t.

$$T = \frac{200900t}{(1+t)^2} = t \cdot Q(t) \Rightarrow Q(t) = \frac{200900}{(1+t)^2}.$$

До налогообложения рыночный объем равнялся $Q(0)$, то есть 200 900. После введения налога рыночный объем составит:

$$Q\left(\frac{3}{2}\right) = 200900 \cdot \frac{4}{25}.$$

Объем продаж изменится в $4/25$ раза, то есть сократится на 84 %.

Ответ: на 84 %.

Задача № 14 (18 баллов)

В программном документе правящей партии страны Тугриндии (национальная валюта — *тугр*) должно было быть написано: *«поддерживать ежегодный темп прироста реального ВВП страны на уровне 10 % и за 20 лет обеспечить утроение его отношения к размеру государственного долга»*. Однако по невнимательности секретарши напечатано оказалось иное: *«обеспечивать ежегодный прирост реального ВВП страны на 10 млн тугров и за 20 лет обеспечить его утроение»*.

Как ни странно, задание, записанное секретаршей, удалось реализовать.

1. Рассчитайте темп прироста реального ВВП страны за 13-й год.

2. Рассчитайте среднегодовой темп роста реального ВВП страны за 20 лет.

3. Нарисуйте график изменения реального ВВП страны во времени.

4. Нарисуйте график изменения реального ВВП страны во времени для первоначально предполагавшейся программы.

5. Во сколько раз изменилось отношение ВВП к размеру государственного долга в ходе реализации «ошибочной» программы? Предполагаем, что долг при «ошибочной» программе изменялся так же, как должен был бы изменяться при правильной.

6. Удалось ли правительству обеспечить устойчивые долгосрочные темпы прироста реального ВВП?

Решение:

Поскольку ошибочный план удалось реализовать, то

$$Y_0 + 20 \cdot 10 = 3Y_0,$$
$$Y_0 = 100, Y_{20} = 3Y_0 = 300.$$

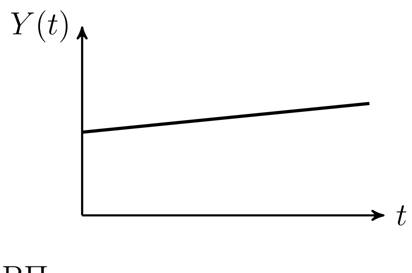
1. Темп прироста реального ВВП страны за 13-й год.

$$Y_{12} = 100 + 12 \cdot 10 = 220, Y_{13} = 100 + 13 \cdot 10 = 230,$$
$$g_{13} = \frac{Y_{13} - Y_{12}}{Y_{12}} \cdot 100~\% \approx 4{,}545~\%.$$

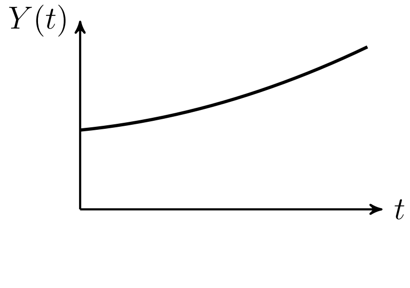
2. Среднегодовой темп роста реального ВВП страны за 20 лет:

$$(1 + g) = \sqrt[20]{3} \approx 1{,}056.$$

3. Изменение реального ВВП страны во времени представляет собой линейную возрастающую функцию. График изменения реального ВВП страны во времени:



4. Изменение реального ВВП страны во времени для предполагавшейся программы представляет собой показательную выпуклую вниз функцию:



5. Планировалось:

$$\frac{1{,}1^{20} \cdot Y_0}{D_{20}} = \frac{3 \cdot Y_0}{D_0} \Rightarrow \frac{6{,}7275}{D_{20}} = \frac{3}{D_0} \Rightarrow D_{20} = \frac{6{,}7275}{3} \cdot D_0 = 2{,}2425 D_0$$

Получилось:

$$\frac{3Y_0}{2{,}242 D_0} = 1{,}3378 \cdot \frac{Y_0}{D_0}$$

Отношение ВВП к размеру государственного долга в ходе реализации ошибочной программы выросло в 1,3378 раза.

6. Нет, темп роста падает. Докажем это:

$$\frac{Y_n}{Y_{n-1}} = \frac{Y_n - Y_{n-1}}{Y_{n-1}} + 1 = \frac{10}{Y_{n-1}} + 1.$$

Очевидно, эта функция убывает при росте Y.