В.В. Подиновский

Формирование набора лучших объектов при частичной информации о предпочтениях[1]

Аннотация. Дается строгая постановка задачи формирования набора, включающего в свой состав установленное число наиболее предпочтительных элементов заданного конечного множества объектов, на котором определен частичный квазипорядок. Исследуются свойства оптимальных и недоминируемых наборов и входящих в них объектов.

Ключевые слова: выбор подмножества лучших объектов, частичное отношение предпочтения, оптимальные наборы, недоминируемые наборы, l-оптимальные объекты, l-недоминируемые объекты.

Введение

В настоящее время активно развивается и приобретает все большее прикладное значение математическая теория принятия решений. В указанной теории внимание сосредоточено в основном на *задачах единичного выбора*, т.е. задачах выделения из заданного множества объектов (вариантов, планов, стратегий, альтернатив) одного наилучшего, или оптимального объекта (например, [1, 2]). Если предпочтения моделируются несвязным бинарным отношением – строгим частичным порядком, то претендентами на оптимальный объект являются недоминируемые объекты. Это типично, например, для многокритериальных задач, когда предпочтения лица, принимающего решение (ЛПР), выявлены не полностью [3].

Однако на практике часто встречаются и иные постановки задач принятия решений. К таковым относятся задачи выбора нескольких (указанного числа $l > 1$) лучших объектов из заданного конечного множества. Такие задачи можно разбить на две группы. К одной из групп относятся задачи, в которых вначале нужно выделить несколько лучших объектов, а затем уже из выделенных объектов выбрать один наилучший. Примером служат задачи создания сложных систем: на раннем этапе проектирования: из нескольких альтернативных вариантов системы выделяются два (или три) лучших, а затем после более тщательной проработки из них выбирается один наилучший вариант, который в дальнейшем и проектируется с требуемой степенью полноты. Такого рода задачи можно назвать *задачами двухэтапного единичного выбора*. В них на роль лучших также могут претендовать только недоминируемые объекты.

К другой группе относятся *задачи множественного выбора*, или *задачи выбора подмножества*, в которых предполагается использование всех l отобранных лучших объектов без отсева каких-либо из них. Примерами такого типа задач являются различного рода конкурсы, тендеры, формирование групп представителей и т.п.

Если на множестве всех объектов задано отношение предпочтения, то для решения задачи выбора l лучших из них необходимо расширить это отношение на множество всех наборов, содержащих l объектов. Проблеме расширения отношения предпочтения, заданного на конечном множестве, до отношения на множестве его подмножеств, и построению функции ценности на нем посвящен целый ряд работ [4–6]. Однако в них предполагалось, что расширению должно подвергаться полное упорядочение, и притом на множество всех подмножеств данного множества, а также принимался ряд допол-

[1] Работа выполнена при поддержке Научного фонда ГУ-ВШЭ, грант № 08-01-0032

нительных достаточно сильных допущений, формулируемых в форме аксиом о свойствах искомого связного отношения на множестве подмножеств. Наша цель – расширение частичного упорядочения и только на множество наборов из l объектов, причем без принятия каких-либо дополнительных допущений.

В литературе рассматривались два подхода к выделению кандидатов на лучшие объекты в таких задачах (например, [7]). Согласно первому из них, следует взять все недоминируемые объекты, которые составляют «первый слой». Если таких объектов меньше l, то к ним нужно добавить второй «слой», образуемый недоминируемыми объектами во множестве, оставшемся после удаления из исходного множестве объектов первого «слоя». Если всех этих объектов вместе взятых будет меньше l, то к ним нужно добавить объекты третьего «слоя», и т.д. до тех пор, пока впервые число всех выделенных объектов будет не менее l. Второй подход предполагает, что нужно сразу взять все l таких «слоев». Но еще в [8] было показано, что первый подход необоснованно сужает число претендентов на лучшие объекты, а второй, напротив, необоснованно расширяет его. Соответствующий пример будет дан и в этой статье.

В [8] применительно к задачам множественного выбора были введено обобщение понятия недоминируемого объекта: объект называется *l-недоминируемым*, если существует не более чем $l - 1$ объектов, более предпочтительных, чем он, согласно отношению строгого порядка. Там же было показано, что на роль l лучших могут претендовать лишь *l-недоминируемые* объекты. В [9] были приведен ряд основных свойств l-недоминируемых объектов, даны формулы для расчета оценок эффективности решающих правил в задачах множественного выбора и оценена эффективность решающего правила Парето. В [10] были получены оценки эффективности решающих правил, использующих информацию о важности однородных критериев [11]. В [12, 13] дана сводка как полученных ранее, так и новых результатов по оценке эффективности ряда решающих правил применительно к различным постановкам задач принятия решений, включая задачи множественного выбора, и в том числе для правила, использующего сведения об относительной важности неоднородных критериев [8, 14]. В [15] было показано, что уровень развития обсуждаемой теории явно недостаточен для обеспечения запросов практики и определено направление ее дальнейшей разработки.

В данной статье задача выбора нескольких лучших объектов изучается в рамках общей методологии выбора при частичных отношениях предпочтения, формулируется и обосновывается порядок формирования набора l лучших объектов. Основные результаты статьи ранее были представлены в [16].

1.Оптимальные и недоминируемые наборы объектов

Рассматриваем задачу выбора (окончательного отбора) $l > 1$ лучших объектов из конечного множества объектов X. Будем считать, что $|X| = n$, т.е. всего объектов n, причем $n > l$. На множестве X задано отношение нестрогого предпочтения ЛПР R: xRy означает, что объект x не менее предпочтителен, чем y. Отношение R порождает отношения строгого предпочтения P, безразличия I и несравнимости N: xIy верно, когда справедливо xRy и yRx; xPy выполняется тогда, когда xRy верно, но yRx неверно; xNy имеет место, когда неверно ни xRy, ни yRx.

Отношение R есть квазипорядок, оно рефлексивно и транзитивно; при этом отношение предпочтения P оказывается строгим частичным порядком (оно иррефлексивно и транзитивно), а отношение безразличия I – эквивалентностью (оно рефлексивно, симметрично и транзитивно). Кроме того, P транзитивно по I: из xPy и yIz, а также из xIy и yPz следует xPz [17].

Введем в рассмотрение множество L наборов (комплектов), состоящих из l объектов. Это множество также конечно: таких наборов всего $C_n^l = {}^{n!}\!/_{l!\,(n-l)!}$. Для наборов из множества L будем использовать обозначения типа $A = \{a^1, \dots, a^l\}$ и $B = \{b^1, \dots, b^l\}$. Пусть $\prod$ – множество перестановок множества $\{1, \dots, l\}$. Под перестановкой набора (множества) $A = \{a^1, \dots, a^l\}$, соответствующей перестановке $\pi \in \prod$, понимается кортеж (упорядоченное множество) $\pi(A) = \langle a^{\pi(1)}, \dots, a^{\pi(l)} \rangle$. Например, если $l = 3$ и $\pi = (2, 1, 3)$, то $\pi(A) = \langle a^2, a^1, a^3 \rangle$.

Поскольку, согласно смыслу рассматриваемой задачи выбора l лучших объектов, порядок объектов в выделенном наборе никакой роли не играет, то зададим на множестве L отношение нестрогого предпочтения R^l следующим образом.

Определение 1. Соотношение AR^lB выполнено тогда и только тогда, когда существуют такие перестановки $\pi, \rho \in \Pi$, что справедливо

$$a^{\pi(i)}Rb^{\rho(i)},\ i = 1, \ldots, l. \qquad (1)$$

Легко понять, что определение 1 равносильно каждому из следующих двух определений:

$$\begin{array}{l} AR^lB \iff \exists\rho\in\prod:\ a^iRb^{\rho(i)},\ i = 1, \ldots, l; \\ AR^lB \iff \exists\pi\in\prod:\ a^{\pi(i)}Rb^i,\ i = 1, \ldots, l. \end{array} \qquad (2)$$

Заметим, что по своей идее определение 1 родственно определению отношения нестрогого предпочтения в многокритериальных задачах с однородными равноважными критериями [18].

Отношение R^l, как нетрудно убедиться, является квазипорядком. Оно порождает на L отношение строгого предпочтения – строгий частичный порядок P^l и отношение безразличия – эквивалентность I^l. Понятно, что AI^lB выполняется, когда в (1) или в (2) для каждого i вместо R можно подставить I, и AP^lB верно, когда в (1) или в (2) хотя бы для одного i вместо R можно подставить P.

Определение 2. Набор объектов A из множества L называется *строго оптимальным* (соответственно *оптимальным, недоминируемым*), если для любого набора $B\in L,$ отличного от A, верно AP^lB (соответственно, если для любого набора $B\in L$ верно AR^lB, неверно BP^lA).

Набор, не являющийся оптимальным (недоминируемым), называют *неоптимальным* (соответственно, *доминируемым*).

Пусть $P^l(L)$, $R^l(L)$, $\overline{P}^l(L)$ – множества строго оптимальных, оптимальных и недоминируемых наборов соответственно. Согласно определениям 1 и 2, справедливы соотношения:

$$P^l(L) \subseteq R^l(L) \subseteq \overline{P}^l(L). \qquad (3)$$

Если строго оптимальный набор существует, то он, очевидно, исчерпывает множество $P^l(L)$ [причем $R^l(L)=P^l(L)$] и искомые l лучших объектов определяются однозначно – это все объекты из такого набора. При этом в (3) оба включения $\subseteq$ выполняются как равенства =. Пусть такого набора нет, но существует оптимальный набор. Даже если он не единствен, то все оптимальные наборы эквивалентны по отношению I^l. Поэтому любой их них может с «равным правом» претендовать быть наилучшим, а образующие его объекты – считаться l лучшими. При этом второе (правое) $\subseteq$ в (3) выполняется как =. Наконец, если и оптимальных наборов нет, то в силу конечности множества L обязательно будут существовать недоминируемые наборы. Более того, множество всех таких наборов будет внешне устойчивым: для любого набора $B\in L\setminus\overline{P}^l(L)$ найдется набор $A\in\overline{P}^l(L)$ такой, что верно AP^lB (см. приведенную ниже теорему 2). Следовательно, претендентами на оптимальный набор могут быть лишь недоминируемые наборы, а на роль l лучших могут претендовать лишь объекты из таких наборов.

К сожалению, в последнем случае множество $\overline{P}^l(L)$ будет содержать не сравнимые по R^l наборы. Именно такие случаи чаще всего могут встретиться на практике, если информация о предпочтениях ЛПР и/или неопределенных факторах неполна, так что отношение R лишь частичное и существует «много» объектов, не сравнимых по R для осмысленного и обоснованного выбора одного набора из множества всех недоминируемых необходимо расширить отношение R^l. А это можно осуществить лишь за счет расширения отношения R, для чего необходимо привлечь дополнительную информацию о предпочтениях ЛПР (если это, конечно, возможно) и/или принять дополнительные допущения о свойствах его предпочтений и проверить их выполнение.

Пример 1. Пусть на множестве X, состоящем их четырех объектов, определено отношение предпочтения P – строгий частичный порядок, граф которого представлен на Рис. 1. Отношением безразличия I является отношение равенства. Всего пар объектов $C_4^2 = 6$. Их частичное упорядочение согласно отношению P^2 представлено на Рис. 2. Здесь оптимального (и, тем более, строго оптимального) набора нет. Недоминируемых наборов два – это $\{x^1, x^2\}$ и $\{x^2, x^4\}$. Отметим, что первый верхний слой $X^1 = \{x^1, x^2\}$ и в нем отсутствует объект x^4. А второй верхний слой $X^2 = \{x^3, x^4\}$, так что объединение этих двух слоев $X^1 \cup X^2 = X$ содержит «лишний» объект x^3.

Говорят [17, 19], что квазипорядок $\hat{R}$ *непротиворечиво продолжает* квазипорядок $R,$ или что R является *подотношением* отношения $\hat{R}$, и пишут $\hat{R} \rhd R$, если верны соотношения

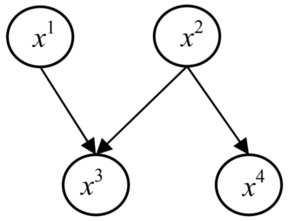


Рис. 1. Граф отношения предпочтения P на множестве объектов

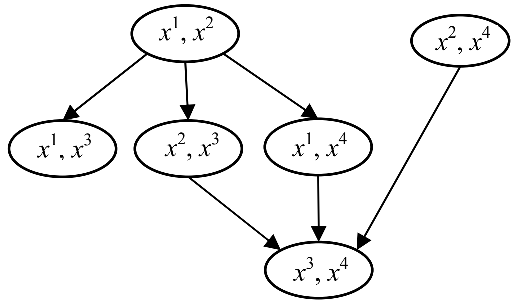


Рис. 2. Граф (транзитивный остов) отношения предпочтения P^2 на множестве наборов из двух объектов

$$\hat{R} \supset R, \;\; \hat{I} \supseteq I, \;\; \hat{P} \supseteq P$$

(второе из них есть следствие первого). Из этих соотношений следует, что

$$P^l(L) \subseteq \hat{P}^l(L), \; R^l(L) \subseteq \hat{R}^l(L), \quad \bar{\hat{P}}^l(L) \subseteq \bar{P}^l(L). \tag{4}$$

Соотношения (4) показывают, что при непротиворечивом расширении отношения нестрогого предпочтения R множества $P^l(L)$ и $R^l(L)$, вообще говоря, расширяются, а множество $\bar{P}^l(L)$ сужается. Если $\hat{R}$ будет связным квазипорядком (т.е. несравнимых объектов не будет), то множество $\hat{R}^l(L)$ будет не пусто. Следовательно, при «достаточно связном» отношении нестрогого предпочтения $\hat{R}$ окажется выполненным равенство $\hat{R}^l(L) = \bar{\hat{P}}^l(L)$, и любой набор из $\hat{R}^l(L)$ можно будет считать решением рассматриваемой задачи выбора l лучших объектов (пример 4 ниже).

2. Строго l-оптимальные, l-оптимальные и l-недоминируемые объекты

Поскольку выделять наилучшие и недоминируемые наборы непосредственно на основании их определения 1, используя (1) или (2), весьма обременительно даже при «не очень широком» множестве объектов X, то встает вопрос о поиске конструктивных способов решения возникающей проблемы. Для этого оказываются полезными следующие понятия.

Определение 3. Объект x называется *строго l-оптимальным* (соответственно *l-оптимальным*, *l-недоминируемым*), если xPy верно для всех объектов y, отличных от x, кроме, быть может, некоторого их числа, меньшего, чем l (соответственно, если xRy верно для всех объектов y, кроме, некоторого их числа, меньшего, чем l; если число объектов y, для которых верно yPx, меньше, чем l).

Объект, не являющийся l-недоминируемым, называется *l-доминируемым.*

Отметим, что если эквивалентность I есть отношение равенства, то понятия строго l-оптимального и l-оптимального объектов совпадают. А при l = 1 определения l-оптимального и l-недоминируемого объектов оказываются соответственно определениями оптимального и недоминируемого объектов, широко используемыми в задачах оптимизации (выбора одного наилучшего объекта).

Пусть $P_l(X), R_l(X), \bar{P}_l(X)$ − множества строго l-оптимальных, l-оптимальных и l-недоминируемых объектов соответственно. Непосредственно из определения 3 вытекает, что верны утверждения:

$$P_l(X) \subseteq R_l(X) \subseteq \bar{P}_l(X); \tag{5}$$

$$\text{Если } k < l \text{ то } P_k(X) \subseteq P_l(X), \quad R_k(X) \subseteq R_l(X), \; \bar{P}_k(X) \subseteq \bar{P}_l(X). \tag{6}$$

Теорема 1. Справедливы следующие утверждения:

1.1. Множества $P_l(X)$, $R_l(X)$ и $\bar{P}_l(X)$ замкнуты сверху по R: если $x \in P_l(X)$ (соответственно $x \in R_l(X)$, $x \in \bar{P}_l(X)$) и yRx, то $y \in P_l(X)$ (соответственно $y \in R_l(X)$, $y \in \bar{P}_l(X)$).

1.2. Число строго l-оптимальных объектов не может превосходить l; условия $|\overline{P}_l(X)| = l$, $|P_l(X)| = l$ и $\overline{P}_l(X) = P_l(x)$ равносильны.

1.3. Множество l-недоминируемых объектов непусто и внешне l-устойчиво:

– если $x \notin \overline{P}_l(X)$, то в $\overline{P}_l(X)$ найдется не менее l объектов y , таких, что yPx;

– если $x^1, \ldots, x^s \notin \overline{P}_l(X)$, $x^{s+1}, \ldots, x^l \in \overline{P}_l(X)$, где $s \le l$, то в $\overline{P}_l(X)$ найдётся s объектов $x^{01}, \ldots, x^{0s}$, отличных от $x^{s+1}, \ldots, x^l$ и таких, что $x^{01}Px^1, \ldots, x^{0s}Px^s$.

1.4. Пусть эквивалентность I есть отношение равенства; если $|R_l(X)| = l$, то верно равенство

$$R_l(X) = \overline{P}_l(X), \qquad (7)$$

1.5. Если квазипорядок R связный, то верно равенство (7).

Заметим, что если эквивалентность I не является отношением равенства, то выполнение условия $|R_l(X)| \ge l$ не гарантирует справедливости равенства (7).

Доказательство теоремы 1. Утверждения, касающиеся множеств $R_l(X)$ и $\overline{P}_l(X)$, имеются в [9]. Докажем утверждения, касающиеся множества $P_l(X)$.

1.1. Если $x \in P_l(X)$, то, согласно определению 3, число объектов z таких, что xPz верно, больше, чем $n - l$. Но из yRx и xPz следует yPz. Таким образом, оказывается, что существует более чем $n - l$ объектов y таких, что верно yPz. Поэтому $y \in P_l(X)$.

1.2. Допустим, что $|P_l(X)| = s > l$. Тогда, согласно определению 3, для произвольного фиксированного объекта x^1 из множества $P_l(X)$ в этом же множестве найдется объект $x^2 \ne x^1$ такой, что x^1Px^2. Для объекта x^2, в свою очередь, в $P_l(X)$ найдется объект $x^3 \ne x^2$ такой, что x^2Px^3. Более того, x^1Px^3 и $x^3 \ne x^1$ в силу транзитивности и иррефлексивности P. Аналогично рассуждая, убедимся в том, что для каждого $x^i \in P_l(X)$, $i = 3, \ldots, s - 1$ найдется объект $x^{i+1} \in P_l(X)$ такой, что x^iPx^{i+1}, причем все объекты $x^1, \ldots, x^s$ попарно различны. Но тогда будет выполнено x^iPx^1, $i = 2, \ldots, s$, что противоречит допущению $x^1 \in P_l(X)$.

Пусть $|\overline{P}_l(X)| = l$. Для $x \notin \overline{P}_l(X)$ и каждого $y \in \overline{P}_l(X)$, согласно 1.1, верно yPx. Это означает, что yPz может быть не выполнено не более чем для $l - 1$ объектов z (все они из множества $P_l(x)$), отличных от y. Следовательно, согласно определению 3, $y \in P_l(X)$, так что $\overline{P}_l(X) \subseteq P_l(X)$. С учетом (5) получаем равенство $\overline{P}_l(X) = P_l(X)$.

Пусть теперь $|P_l(X)| = l$, $x \in P_l(X)$ и $y \in X \backslash P_l(X)$. Предположим вначале, что x – минимальный по P объект в $P_l(X)$, т.е. не существует объекта $v \in P_l(X)$ такого, что xPv. Поскольку в составе $P_l(X)$ всего l объектов, то, согласно определению 3, должно выполняться xPy. Предположим теперь, что x не является минимальным по P объектом. Тогда во множестве $P_l(X)$ найдется минимальный по P объект $v \in P_l(X)$ такой, что xPv. Как только что было выяснено, для этого объекта верно vPy. В силу транзитивности отношения P оказывается выполненным и xPy. Таким образом, для каждого из l объектов $x \in P_l(X)$ и любого объекта $y \in X \backslash P_l(X)$ верно xPy. Следовательно, $y \notin \overline{P}_l(X)$. Поэтому $\overline{P}_l(X) = P_l(X)$.

Предположим, наконец, что справедливо равенство $\overline{P}_l(X) = P_l(X)$. Как уже было установлено, $|P_l(X)| \le l$. Для любого $x \notin \overline{P}_l(X)$, в силу 1.3, в $\overline{P}_l(X)$ найдется не менее l объектов y , таких, что yPx, так что $|\overline{P}_l(X)| \ge l$. Следовательно, $|\overline{P}_l(X)| = |P_l(X)| = l$.

1.3. Утверждение было доказано в [9].

1.4. Это утверждение – простое следствие утверждения 1.2, так как в данном случае понятия строго l-оптимального и l-оптимального объектов совпадают.

1.5. С учетом (5) достаточно показать, что верно $R_l(X) \supseteq \overline{P}_l(X)$. Пусть $x \in \overline{P}_l(X)$. Тогда, согласно определению 3, число объектов y, для которых неверно yPx, больше, чем $n - l$. А это означает, в силу связности R, что число объектов y, для которых верно xRy, больше, чем $n - l$. Поэтому, согласно определению 3, $x \in R_l(X)$.

Доказательство теоремы 1 завершено.

Пример 2. В условиях примера 1 имеем $P_2(X) = R_2(X) = \{x^2\} \subset \overline{P}_2(X) = \{x^1, x^2, x^4\} \subset X$.

3. Использование l-оптимальных и l-недоминируемых объектов для формирования оптимальных и недоминируемых наборов

Сформулируем условия, определяющие существование и характеризующие свойства оптимальных и недоминируемых объектов.

Теорема 2. Справедливы следующие утверждения:

2.1. Существование и свойства строго оптимального набора:

– строго оптимальный набор может состоять только из строго l-оптимальных объектов;

– строго оптимальный набор существует тогда и только тогда, когда $|P_l(X)| = l$, причем $P^l(L) = \{P_l(X)\}$ (т.е. строго оптимальный набор единствен).

2.2. Существование и свойства оптимальных наборов:

– в оптимальный набор могут входить только l-оптимальные объекты; оптимальный набор включает все строго l-оптимальные объекты;

– если $|R_l(X)| = l$, то оптимальный набор существует, причем $R^l(L) = = \{R_l(X)\} = P^l(L)$, тогда и только тогда, когда выполнено равенство (7); если $|R_l(X)| > l$, то оптимальный набор существует тогда и только тогда, когда выполнено равенство (7) и в $R_l(X)$ существует наименьший по R объект;

– если $k < l$, $R_k(X) \subset R_l(X)$ и объект $x \in R_k(X)$ не включен в набор $A \in L$, то этот набор не является оптимальным.

2.3. Существование и свойства недоминируемых наборов:

– каждый недоминируемый набор состоит только из l-недоминируемых объектов и включает все строго l-оптимальные объекты;

– множество недоминируемых наборов не пусто и внешне устойчиво при любых n, l и R;

– если $x \notin A$, $y \in A$ и верно xPy, то набор A является доминируемым.

Доказательство теоремы 2.

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. Пусть набор B получен из набора A заменой a^j на $x \notin A$. Тогда:

$$xRa^j \Leftrightarrow AR^lB,\ xPa^j \Leftrightarrow AP^lB,\ xIa^j \Leftrightarrow AI^lB,$$
$$xNa^j \Leftrightarrow AN^lB.$$

Лемма почти очевидна. Однако доказательство ее относительно громоздко, и мы его опускаем.

2.1. Пусть набор $A \in P^l(L)$ и объект $x \in A$. Согласно определению 1, для набора B, полученного в результате замены объекта x любым объектом $y \notin A$, верно AP^lB, откуда следует, что верно xPy. Таким образом, xPy может быть не выполнено только для $y \in A$, т.е. не более чем для $l - 1$ объектов, отличных от x. Поэтому, согласно определению 2, $x \in P_l(X)$.

Согласно 1.2, $|P_l(X)| \leq l$. Если это неравенство строгое, то строго оптимального набора не существует. Пусть $|P_l(X)| = l$. Покажем, что набор $A = P_l(X)$ строго оптимален. Несложно убедиться в том, что для любых $x \in P_l(X)$ и $y \notin P_l(X)$ верно xPy. Поэтому для любого $B \neq A$ справедливо AP^lB.

2.2. Пусть набор $A \in L$. Согласно определению 1, для набора B, полученного в результате замены объекта $x \in A$ объектом $y \notin A$, верно AR^lB, откуда следует, что верно xRy. Таким образом, xRy может быть не выполнено только для $y \in A$, т.е. не более чем для $l - 1$ объектов. Поэтому $x \in R^l(X)$. Так как оптимальный набор является и недоминируемым, то он включает все строго l-оптимальные объекты согласно утверждению из 2.3, которое будет доказано ниже (и его доказательство не опирается на 2.2).

Пусть $|R_l(X)| = l$. Предположим, что (7) выполняется. Тогда, согласно 1.2, $R_l(X) = P_l(X)$ и $R_l(X)$ – строго оптимальный набор (см. 2.1.). Предположим теперь, что существует оптимальный набор A. Согласно (5), $R_l(X) \subseteq \overline{P}_l(X)$. Остается доказать, что верно и $R_l(X) \supseteq \overline{P}_l(X)$

Допустим, что последнее неверно, так что существует $x \in \overline{P}_l(X) \setminus R_l(X)$. Как показывает утверждение 1.1, для любого $y \in R_l(X)$ соотношение xRy выполняться не может. Пусть B – набор, полученный из A заменой произвольного объекта y на x. Поскольку A оптимален, то, согласно лемме, верно AR^lB, откуда следует, что должно выполняться xRy. Получено противоречие, так что (7) необходимо должно выполняться.

Для случая $|R_l(X)| > l$ доказательство соответствующего утверждения довольно громоздко, и поэтому мы его опускаем. Отметим лишь, что оно использует следующее вспомогательное утверждение. Пусть $|R_l(X)| = m$, где m – число классов эквивалентности I минимальных по R объектов в $R_l(X)$, q − число объектов в наименьшем по численности таком классе; тогда $q \geq m - l + 1$.

Пусть $k < l$, $R_k(X) \subset R_l(X)$ и объект $x \in R_k(X)$ не включен в набор $A \in L$, Так как $|A| = l$ и $|R_k(X)| \leq l - 1$, то в наборе A найдется объект $a \notin R_k(X)$. Пусть B − набор, полученный из A заменой объекта a на объект x. Поскольку верно xNa или xPa, так что aRx неверно, то, согласно лемме, AR^lB неверно. Поэтому набор A не оптимален.

2.3. Пусть A − недоминируемый набор, так что для набора B, полученного в результате замены объекта $x \in A$ на объект $y \notin A$, неверно BP^lA, откуда следует, согласно лемме, что yPx неверно. Таким образом, yPx может быть выполнено только для объекта $y \in A$, т.е. не более чем для $l - 1$ объектов. Поэтому объект x является l-недоминируемым.

Предположим, что недоминируемый набор A не содержит объект $x \in P_l(X)$, так что в наборе A найдется объект y такой, что верно xPy. Но тогда для набора B, полученного из A заменой объекта y на объект x, должно выполняться BP^lA, что невозможно.

Утверждение о внешней устойчивости следует из общего результата о внешней устойчивости множества максимальных элементов для конечного множества, на котором задан строгий частичный порядок [17].

Пусть объекты $x \notin A$, $y \in A$ и верно xPy. Для набора B, полученного из набора A заменой y на x, верно BP^lA. Следовательно, набор A доминируемый.

Доказательство теоремы 2 закончено.

Пример 3. В условиях примера 1 имеется всего два недоминируемых набора – это $\{x^1, x^2\}$ и $\{x^2, x^4\}$. Каждый из указанных наборов состоит из 2-недоминируемых объектов и содержит единственный строго 2-оптимальный объект x^2.

При формировании оптимальных или же недоминируемых наборов следует опираться на теорему 2 и учитывать свойства l-оптимальных и l-недоминируемых объектов. Прежде всего, согласно 2.3, из претендентов на роль l лучших объектов должны быть исключены все l-доминируемые объекты.

Если строго l-оптимальных объектов ровно l, то именно они составляют строго оптимальный набор, и только они должны считаться l лучшими объектами (утверждение 2.1). Условия существования строго оптимального набора указывает также соответствующее утверждение из 2.2.

Если объектов в $R_l(X)$ больше, чем l и выполнены условия, указанные в утверждении 2.2 (справедливо равенство (7) и в множестве $R_l(X)$ существует наименьший по R объект), то оптимальный набор следует составить так. Вначале нужно взять из множества $R_l(X)$ все объекты, не являющиеся наименьшими (их не более l–1), а затем добавить недостающее до l число любых наименьших объектов (все наименьшие объекты безразличны между собой). Если же условия, указанные в утверждении 2.2, не выполнены, то оптимальный набор не существует.

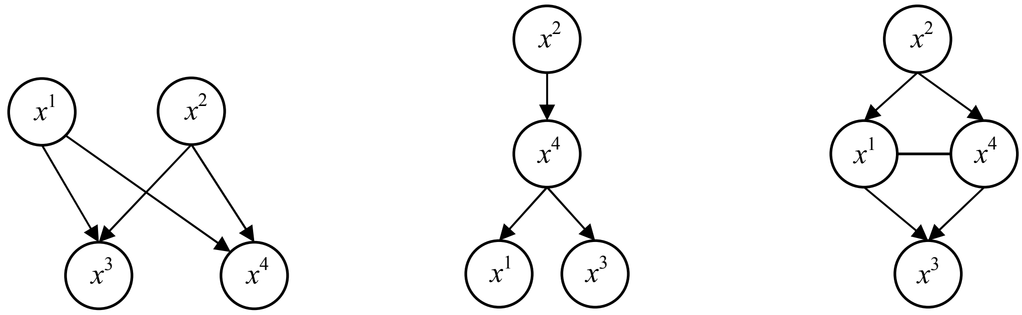
Если оптимального набора нет, то из множества всех l-недоминируемых объектов можно выделить объекты, которые заведомо должны быть отнесены к числу l лучших, т.е. включены в состав строго оптимального или оптимального набора. Это − все объекты из множества $P_l(X) \cup R_k(X)$, где k − наибольшее число $k < l$ такое, что $R_k(X) \subset R_l(X)$. Таких объектов не более $l - 1$. Оставшиеся l-недоминируемые объекты являются лишь претендентами на роль l лучших.

Для обоснованного формирования (строго) оптимального набора необходимо, как уже указывалось выше, непротиворечиво расширить отношение R, получив дополнительную информацию и проверив ее непротиворечивость, и/или приняв дополнительные допущения о предпочтениях ЛПР и убедившись в их выполнении.

Пример 4. Пусть в условиях примера 1 получена дополнительная информация о соотношении по предпочтению объектов x^1 и x^4. Если выяснилось, что x^1Px^4, то объект x^1 становится строго 2-оптимальным, и единственным строго оптимальным набором будет $\{x^1, x^2\}$ (Рис. 3а). Если же оказалось, что, наоборот, x^4Px^1, то объект x^4 становится строго 2-оптимальным, и единственным строго оптимальным набором будет $\{x^2, x^4\}$ (Рис. 3б). Наконец, если стало известно, что x^1Ix^4, то оба объекта x^1 и x^4 становятся 2-оптимальными, оба набора $\{x^1, x^2\}$ и $\{x^2, x^4\}$ будут оптимальными, и в качестве решения задачи выбора двух лучших объектов можно взять любой из этих наборов (Рис. 3в).

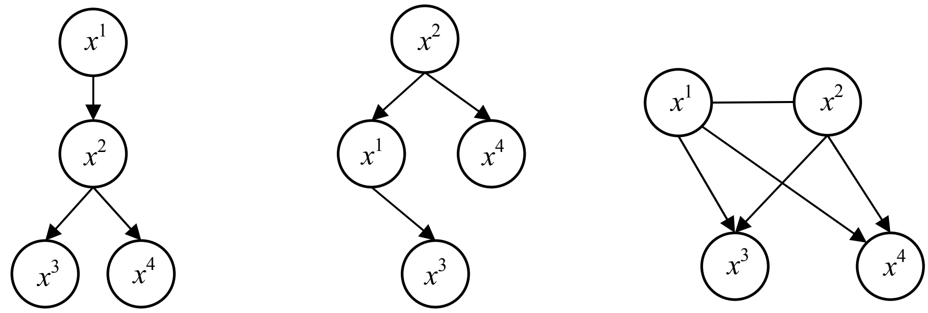
Пусть теперь дополнительная информация касается объектов x^1 и x^2. Если x^1Px^2, то объект x^1 становится строго 2-оптимальным, и единственным строго оптимальным набором будет $\{x^1, x^2\}$ (Рис. 4а). Если же x^2Px^1, то неопределенность выбора не уменьшается: оба набора $\{x^1, x^2\}$ и $\{x^2, x^4\}$ остаются недоминируемыми и несравнимыми (Рис. 4б). Наконец, если стало известно, что x^1Ix^2, то объект x^1 становится строго 2-оптимальным, и единственным строго оптимальным набором будет $\{x^1, x^2\}$ (Рис. 4в).

Пусть дополнительная информация касается 2-недомимнируемого объекта x^3 и 2-доминируемого объекта x^4. Если x^3Px^4, то объект x^1 становится строго 2-оптимальным, и единственным строго оптимальным набором будет $\{x^1, x^2\}$ (Рис.5а), Если же x^4Px^3, то неопределенность выбора не уменьшается: оба набора $\{x^1, x^2\}$ и $\{x^2, x^4\}$ остаются недоминируемыми и несравнимыми (Рис. 4б). Наконец, если x^3Ix^4, то объект x^1 становится строго 2-оптимальным, и единственным строго оптимальным набором будет $\{x^1, x^2\}$ (Рис.5в),



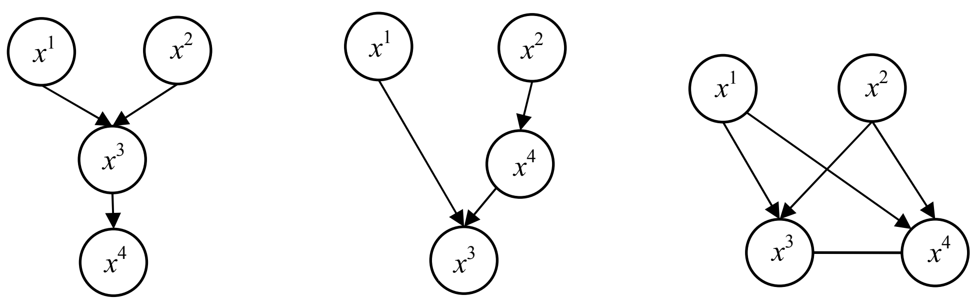
а) x^1Px^4 б) x^4Px^1 в) x^4Ix^1

Рис. 3. Графы (транзитивные основы без петель) квазипорядков, полученных путем непротиворечивого расширения исходного отношения R за счет дополнительной информации – результатов сравнения по предпочтению пары объектов x^1 и x^4.



а) x^1Px^2 б) x^2Px^1 в) x^1Ix^2

Рис. 4. Графы (транзитивные основы без петель) квазипорядков, полученных путем непротиворечивого расширения исходного отношения R за счет дополнительной информации – результатов сравнения по предпочтению пары объектов x^1 и x^2.



а) x^3Px^4 б) x^4Px^3 в) x^3Ix^4

Рис. 5. Графы (транзитивные основы без петель) квазипорядков, полученных путем непротиворечивого расширения исходного отношения R за счет дополнительной информации – результатов сравнения по предпочтению пары объектов x^3 и x^4

Заключение

В статье дано развитие теории множественного выбора для задач, в которых требуется сформировать набор из заданного числа лучших объектов, причем не требуется упорядочивать их по предпочтительности, а отношение предпочтения на множестве всех объектов является частичным квазипорядком. Полученные результаты необходимо учитывать и при создании компьютерных систем поддержки принятия решений о выборе нескольких лучших объектов.

Актуальным направлением дальнейшего развития теории представляется исследование *задач множественного выбора и упорядочения* при неполной информации о предпочтениях, когда требуется сформировать набор из заданного числа лучших объектов и все эти объекты (или же только установленное число наилучших из них) ранжировать по предпочтительности.

Литература

1. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения / Пер. с англ. – М.: Радио и связь. 1981.
2. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения / Пер. с англ. – М.: Радио и связь. 1992.
3. Ларичев О.И. Вербальный анализ решений / Отв. ред. А.Б. Петровский – М.: Наука, 2006.
4. Heiner R.A., Packard D.J. A uniqueness result for extending orders; with application to collective choice as inconsistency resolution // Journal of economic theory. 1984. V. 32. P. 180 – 184.
5. Bossert W. On the extension of preferences over a set to the power set; an axiomatic characterization of a quasi-ordering // Journal of economic theory. 1989. V. 49. P. 84 – 92.
6. Fishburn P.C., LaValle I.H. Binary interaction and subset choice // European journal of operational research. 1996. V. 92. P. 182 – 192.
7. Юрлов Ф.Ф., Лапаев Д.Н., Плеханова А.Ф. Многокритериальная оценка и выбор решений в экономике: Учебное пособие. – Н. Новгород, НГТУ, 2006.
8. Подиновский В.В. Об относительной важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Многокритериальные задачи принятия решений / Под ред. Д.М. Гвишиани и С.В. Емельянова. – М.: Машиностроение, 1978. С. 48 – 82.
9. Подиновский В.В. Об оценке эффективности решающих правил в многокритериальных задачах // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1987. № 1. С. 3 – 9.
10. Барышников Ю.А., Подиновский В.В., Поляшук М.В. Эффективность решающих правил в многокритериальных задачах выбора нескольких объектов // Автоматика и телемеханика. 1990. № 12. С. 136 – 142.
11. Подиновский В.В. Аксиоматическое решение проблемы оценки важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // Современное состояние теории исследования операций / Под ред. Н.Н. Моисеева. – М.: Наука, 1979. – С.117 – 145.
12. Подиновский В.В. Оценка эффективности решающих правил в дискретных многокритериальных задачах // Методы оптимизации в экономико-математическом моделировании / Под ред. Е.Г. Гольштейна. – М.: Наука, 1991. С. 324 – 336.
13. Podinovski V.V. Efficiency estimation of decision rules in discrete multiobjective problems // Modern mathematical methods of optimization / K.-H. Elster (Ed.). – Berlin: Akademie, 1993. P. 267 – 277.
14. Меньшикова О.Р., Подиновский В.В. Построение отношения предпочтения и ядра в многокритериальных задачах с упорядоченными по важности неоднородными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1988. № 5. С. 647 – 659.
15. Подиновский В.В. О задаче выбора нескольких лучших объектов при неполной информации о предпочтениях // Информационные технологии моделирования и управления. 2008. № 1 (44). С. 61 – 66.
16. Подиновский В.В. Развитие теории и разработка методов множественного выбора при неполной информации о предпочтениях // Материалы XXXV Международной конференции “Информационные технологии в науке, образовании, телекоммуникации и бизнесе” (1 – 9 октября 2008 г., Гурзуф, Украина). Приложение к журналу “Открытое образование”. 2008. С. 37 – 39.
17. Sen A.K. Collective choice and social welfare. – San Francisco: Holden Day, 1970.
18. Подиновский В.В. Многокритериальные задачи с однородными равноценными критериями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. № 2. С. 330 – 344.
19. Озерной В.М., Гафт М.Г. Методология решения дискретных многокритериальных задач // Многокритериальные задачи принятия решений / Под ред. Д.М. Гвишиани и С.В. Емельянова. – М.: Машиностроение. 1978. С. 14 – 47.

Подиновский Владислав Владимирович. Профессор кафедры высшей математики на факультете экономики Высшей школы экономики (ГУ-ВШЭ), доктор технических наук. Печатных работ более 150, в том числе 7 монографий. Область научных интересов: теория принятия решений и ее приложения.