ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2009, том 424, № 5, с. 604–606

ИНФОРМАТИКА

УДК 519.85

ВЫБОР НЕСКОЛЬКИХ ЛУЧШИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ ЧАСТИЧНОМ ОТНОШЕНИИ ПРЕДПОЧТЕНИЯ

© 2009 г. В. В. Подиновский

Представлено академиком П.С. Краснощековым 17.04.2008 г.

Поступило 11.07.2008 г.

Научная литература по принятию решений посвящена в основном задачам выбора одного наилучшего объекта, в значительно меньшей степени – задачам упорядочения объектов по предпочтению. Однако на практике часто встречаются и задачи выбора нескольких (заданного числа $l > 1$) лучших объектов. Пример: выбрать несколько лучших инвестиционных проектов из всех поданных на конкурс заявок. При этом не все объекты могут быть сравнимыми по предпочтению, что типично, например, для задач многокритериального выбора. Обзор современного состояния математической теории выбора l лучших объектов дан в [1]. Там показано, что хотя еще в [2] были введены базовые определения l-оптимального (l-наибольшего) и l-недоминируемого (l-максимального) объектов, а в [3] были приведены некоторые их важные свойства, уровень развития указанной теории явно недостаточен и определено направление ее дальнейшей разработки. В данном сообщении приводятся основные результаты, полученные при выполнении работ в этом актуальном направлении.

1. ОПТИМАЛЬНЫЕ И НЕДОМИНИРУЕМЫЕ НАБОРЫ ОБЪЕКТОВ

Будем рассматривать задачу выбора l лучших объектов из конечного множества объектов X, $|X| = n > l > 1$. На множестве X задано отношение нестрогого предпочтения R лица, принимающего решение (ЛПР): xRy означает, что объект x не менее предпочтителен, чем y. Отношение R порождает отношения (строгого) предпочтения P, безразличия I и несравнимости N: xIy верно, когда справедливо xRy и yRx; xPy выполняется тогда, когда xRy верно, но yRx неверно; xNy имеет место, когда неверно ни xRy, ни yRx. Полагаем, что отношение R есть квазипорядок (т.е. оно рефлексивно и транзитивно), но лишь частичный, или несвязный: отношение N непусто.

Государственный университет – Высшая школа экономики, Москва

Введем в рассмотрение множество L наборов из l объектов. Это множество также конечно: таких наборов всего C_n^l. Для наборов из L будем использовать обозначения типа $A = \{a^1, a^2, \ldots, a^l\}$. Пусть Π множество перестановок множества $\{1, 2, \ldots, l\}$. Под перестановкой набора $A = \{a^1, a^2, \ldots, a^l\}$, соответствующей $\pi \in \Pi$, понимается кортеж $\pi(A) = \langle a^{\pi(1)}, a^{\pi(2)}, \ldots, a^{\pi(l)}\rangle$. Например, если $l = 3$ и $\pi = (3, 1, 2)$, то $\pi(A) = \langle a^3, a^1, a^2\rangle$.

Поскольку порядок объектов в выделенном наборе никакой роли не играет, то в соответствии с сутью рассматриваемой задачи выбора зададим на множестве L бинарное отношение R^l, показывающее, когда при попарном сравнении наборов один из них можно полагать не менее предпочтительным, чем другой.

О п р е д е л е н и е 1. Соотношение AR^lB выполнено тогда и только тогда, когда существуют перестановки $\pi, \rho \in \Pi$, такие, что справедливо

$$a^{\pi(i)}Rb^{\rho(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{1}$$

Определение 1 равносильно каждому из следующих определений:

$$AR^lB \Leftrightarrow \exists\pi \in \Pi\colon a^iRb^{\pi(i)}, \quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{1'}$$

$$AR^lB \Leftrightarrow \exists\pi \in \Pi\colon a^{\pi(i)}Rb^i, \quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{1''}$$

Отношение нестрогого предпочтения R^l является квазипорядком и порождает на L отношение (строгого) предпочтения – (частичный) порядок P^l и отношение безразличия – эквивалентность I^l. Заметим, что AI^lB выполняется, когда в (1) [или в (1'), (1'')] при каждом i вместо R можно подставить I, и AP^lB верно, когда в (1) [или в (1'), (1'')] хотя бы при одном i вместо R можно подставить P.

О п р е д е л е н и е 2. Набор A называется с т р о г о о п т и м а л ь н ы м, если для любого набора B, отличного от A, верно AP^lB.

Определение 3. Набор A называется **оптимальным**, если для любого набора B верно AR^lB.

Определение 4. Набор A называется **недоминируемым**, если для любого набора B неверно BP^lA.

Пусть $P^l(L)$, $R^l(L)$, $Q^l(L)$ – множества строго оптимальных, оптимальных и недоминируемых наборов соответственно. Справедливы соотношения

$$P^l(L) \subseteq R^l(L) \subseteq Q^l(L). \qquad (2)$$

Если строго оптимальный набор существует, то он единствен – исчерпывает множество $P^l(L)$ (при этом оба $\subseteq$ в (2) выполняются как =) и искомые l лучших объектов определяются однозначно – это все объекты из такого набора. Пусть такого набора нет, но существует оптимальный набор (при этом второе (правое) $\subseteq$ в (2) выполняется как =). Даже если он неединствен, то все оптимальные наборы эквивалентны (по I^l). Поэтому любой из них можно рассматривать как наилучший, а образующие его объекты считать лучшими.

Наконец, если и оптимальных наборов нет, то в силу конечности множества L обязательно будут существовать недоминируемые наборы. Более того, множество всех таких наборов будет внешне устойчивым: для любого $B \in L \backslash Q^l(L)$ найдется $A \in Q^l(L)$, такой, что верно AP^lB. Следовательно, претендентами на оптимальный набор могут быть лишь недоминируемые наборы, а на роль лучших могут претендовать лишь объекты из таких наборов.

2. l-ОПТИМАЛЬНЫЕ И l-НЕДОМИНИРУЕМЫЕ ОБЪЕКТЫ

Поскольку формировать оптимальные или недоминируемые наборы непосредственно на основании их определений 2–4 весьма обременительно даже при не очень широком множестве объектов X, то встает вопрос о поиске конструктивных способов решения возникающей проблемы. Для этого оказываются полезными следующие понятия.

Определение 5. Объект x называется **строго l-оптимальным**, если xPy верно для всех объектов y, отличных от x, кроме, быть может, некоторого их числа, меньшего, чем l.

Определение 6. Объект x называется **l-оптимальным**, если xRy верно для всех объектов y, кроме, быть может, некоторого их числа, меньшего, чем l.

Определение 7. Объект x называется **l-недоминируемым**, если число объектов y, для которых верно yPx, меньше, чем l.

Если эквивалентность I есть отношение равенства, то понятия строго l-оптимального и l-оптимального объектов совпадают.

Пусть $P_l(X)$, $R_l(X)$, $Q_l(X)$ – множества строго l-оптимальных, l-оптимальных и l-недоминируемых объектов соответственно. Непосредственно из определений 5–7 вытекает, что

$$P_l(X) \subseteq R_l(X) \subseteq Q_l(X);$$

$$\text{если } k < l, \text{ то } P_k(X) \subseteq P_l(X), \quad R_k(X) \subseteq R_l(X),$$

$$Q_k(X) \subseteq Q_l(X).$$

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения*:

1.1. *Число строго l-оптимальных объектов не может превосходить l.*

1.2. *Число классов эквивалентности I в $R_l(X)$ не больше чем l.*

1.3. *Множество l-недоминируемых объектов непусто и внешне l-устойчиво*:

(1.3.1) *если $x \notin Q_l(X)$, то в $Q_l(X)$ найдется не менее l объектов y, таких, что yPx*;

(1.3.2) *если $x^1, x^2, \ldots, x^s \notin Q_l(X)$, $x^{s+1}, \ldots, x^l \in Q_l(X)$, где $s \le l$, то в $Q_l(X)$ найдется s попарно различных объектов $x^{01}, x^{02}, \ldots, x^{0s}$, отличных от $x^{s+1}, x^{s+2}, \ldots, x^l$ и таких, что $x^{01}Px^1, \ldots, x^{0s}Px^s$.*

1.4. *Множества $P_l(X)$, $R_l(X)$ и $Q_l(X)$ замкнуты сверху по R*:

(1.4.1) *если $x \in P_l(X)$ и yRx, то $y \in P_l(X)$*;

(1.4.2) *если $x \in R_l(X)$ и yRx, то $y \in R_l(X)$*;

(1.4.3) *если $x \in Q_l(X)$ и yRx, то $y \in Q_l(X)$.*

1.5. *Объекты из разных множеств соотносятся следующим образом*:

(1.5.1) *если $x \in Q_l(X)$ и $y \notin Q_l(X)$, то xNy или xPy*;

(1.5.2) *если $x \in R_l(X)$ и $y \notin Q_l(X)$, то xPy*;

(1.5.3) *если $x \in R_l(X)$ и $y \notin Q_l(X) \backslash R_l(X)$, то xNy или xPy*;

(1.5.4) *если $x \in P_l(X)$ и $y \in R_l(X) \backslash P_l(X)$, то xNy или xPy.*

1.6. *Равенства $|Q_l(X)| = l$, $|P_l(X)| = l$ и $Q_l(X) = P_l(X)$ равносильны.*

1.7. *Пусть эквивалентность I есть отношение равенства. Тогда*:

(1.7.1) *справедливо равенство $R_l(X) = P_l(X)$*;

(1.7.2) *число вариантов в $R_l(X)$ не больше l*;

(1.7.3) *если $|R_l(X)| = l$, то верно равенство $R_l(X) = Q_l(X)$.*

1.8. *Если квазипорядок R связный (полный, т.е. $N = \varnothing$), то верно равенство $R_l(X) = Q_l(X)$.*

1.9. *При $k < l$ справедливы утверждения:*

(1.9.1) *если $P_k(X) \subset P_l(X)$, то $|P_k(X)| \le l - 1$;*

(1.9.2) *если $R_k(X) \subset R_l(X)$, то $|P_l(X) \cup R_k(X)| \le l - 1$.*

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ l-ОПТИМАЛЬНЫХ И l-НЕДОМИНИРУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ ДЛЯ ФОРМИРОВАНИЯ НАБОРОВ l-ЛУЧШИХ ОБЪЕКТОВ

Теорема 2. *Справедливы следующие утверждения:*

2.1. *Существование и свойства строго оптимального набора:*

(2.1.1) *строго оптимальный набор может состоять только из строго l-оптимальных объектов;*

(2.1.2) *строго оптимальный набор существует тогда и только тогда, когда $|P_l(X)| = l$;*

2.2. *Существование и свойства оптимальных наборов:*

(2.2.1) *в оптимальный набор могут входить только l-оптимальные объекты;*

(2.2.2) *оптимальный набор включает все строго l-оптимальные объекты;*

(2.2.3) *если $|R_l(X)| = l$, то оптимальный набор существует тогда и только тогда, когда выполнено равенство $R_l(X) = Q_l(X)$; при этом все l-оптимальные объекты составляют оптимальный набор и $R^l(L) = P^l(L)$;*

(2.2.4) *если $|R_l(X)| > l$, то оптимальный набор существует тогда и только тогда, когда выполнено равенство $R_l(X) = Q_l(X)$ и в $R_l(X)$ существует наименьший по R объект (т.е. такой объект x_*, что для любого $x \in R_l(X)$ верно xRx_*);*

(2.2.5) *если эквивалентность I является отношением равенства, то выполнение равенства $|R_l(X)| = l$ есть необходимое и достаточное условие существования оптимального набора, причем его составляют все l-оптимальные объекты и $R^l(L) = P^l(L)$;*

(2.2.6) *если $k < l$, $R_k(X) \subset R_l(X)$ и объект $x \in R_k(X)$ не включен в набор $A \in L$, то этот набор не является оптимальным;*

2.3. *Существование и свойства недоминируемых наборов:*

(2.3.1) *множество недоминируемых наборов непусто и внешне устойчиво;*

(2.3.2) *каждый недоминируемый набор состоит только из l-недоминируемых объектов;*

(2.3.3) *каждый недоминируемый набор включает все строго l-оптимальные объекты;*

(2.3.4) *если $x \notin A$, $y \in A$ и верно xPy, то набор A не является недоминируемым.*

Приведем вытекающие из теорем 1 и 2 рекомендации по выбору l лучших объектов. Прежде всего из рассмотрения должны быть исключены все l-доминируемые (т.е. не являющиеся l-недоминируемыми) объекты.

Если строго l-наилучших объектов ровно l, то они составляют строго оптимальный набор и только они должны считаться l-лучшими объектами.

Если объектов в $R_l(X)$ больше l и выполнены условия из (2.2.4), то вначале нужно взять из $R_l(X)$ все объекты, не являющиеся наименьшими (их не более $l - 1$), а затем добавить недостающее до l число любых наименьших объектов (все они безразличны между собой). Если же указанные условия не выполнены, то оптимальный набор не существует и нужно выделить объекты, которые заведомо должны быть отнесены к числу l лучших. Это все объекты из множества $P_l(X) \cup R_k(X)$, где k – наибольшее число $k < l$, такое, что $R_k(X) \subset R_l(X)$. Таких объектов не более $l - 1$. Остальные объекты являются лишь претендентами на роль l лучших.

Работа выполнена при финансовой поддержке Научного фонда ГУ-ВШЭ (индивидуальный исследовательский грант 2008 г. № 08–01–0032).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Подиновский В.В.* // Информ. технологии моделирования и управления. 2008. В. 1 (44). С. 61–66.
2. *Подиновский В.В.* В сб.: Многокритериальные задачи принятия решений. М.: Машиностроение, 1978. С. 48–82.
3. *Подиновский В.В.* // Изв. АН СССР. ТК. 1987. № 1. С. 3–9.