Применение теории нечёткких множеств к задаче формирования портфеля проектов[1]

В.М. Аньшин

ГУ ВШЭ, Москва

И.В. Демкин

"*МАТИ"-Российский государственный технологический университет им. К.Э. Циолковского, ГУ ВШЭ, Москва*

И.Н. Царьков

ГУ ВШЭ, Москва

И.М. Никонов

МГУ им. Ломоносова, ГУ ВШЭ, Москва

Аннотация

Статья посвящена вопросам применения теории нечётких множеств в задаче формирования портфеля проекта. Рассматриваются различные способы оценивания стоимости и других показателей проекта, как численных, так и качественных, при помощи нечётких чисел. Представлена модель формирования оптимального портфеля проектов на основе нечётких оценок в условиях ограниченных ресурсов. Разобран пример решения задачи формирования портфеля проектов на основе рассматриваемой модели.

Ключевые слова

Нечёткие множества, оценивание проекта, портфель проектов, ранжирование проектов, нечёткая оптимизационная модель

[1] Статья выполнена в рамках мероприятия 5.2.5 инновационно-образовательной программы ГУ ВШЭ «Формирование системы аналитических компетенций для инноваций в бизнесе и государственном управлении»

On application of fuzzy set theory to the problem of project portfolio selection.

V.M. Anshin
HSE, Moscow
I.V. Dyomkin
"MATI" – Russian State Technology University named by K. E. Tsiolkovsky, HSE, Moscow
I.N. Tsarkov
HSE, Moscow
I.M. Nikonov
MSU, Moscow, HSE, Moscow

Abstract

The article is devoted to problems of application of fuzzy set theory to project portfolio management. We consider several approaches to estimate project value and other project characteristics (both quantitative and qualitative) by means of fuzzy numbers. We present a fuzzy model for project portfolio selection under resource constraints. An example of portfolio section using this model is given.

Key words

Fuzzy sets, project estimation, project portfolio, ranking of projects, fuzzy optimization model

Содержание

Введение

Проблема формирования портфеля проектов относится к задачам оптимизации в условиях неопределённости. Как правило, для решения подобных задач привлекается аппарат теории вероятности. Однако в ряде ситуаций, применение теории вероятностей представляется недостаточно корректным и обоснованным. Причиной этому является недостаток имеющихся данных, не позволяющий с достаточной степенью уверенности установить адекватность выбранной для описания ситуации вероятностной модели. Если в задаче формирования портфеля инвестиций в ценные бумаги к услугам аналитика предоставляются массивы котировок финансовых инструментов, охватывающие месяцы и годы и позволяющие использовать всю мощь статистического анализа, то при рассмотрении реальных инвестиций основным, но весьма ограниченным источником информации о риске являются экспертные оценки. В таких условиях появляется потребность в других, отличных от вероятностного, подходах к оценке имеющейся неопределённости. Один из таких подходов основан на применении теории нечётких множеств.

Нечёткие множества были определены Л. Заде в 1965 году, как формальный аппарат для обработки высказываний естественного языка. Эта теория позволяет фразам «риск проекта довольно велик» или «доход проекта намного превысит 150000 руб.», которые могут возникнуть в результате экспертной оценки, придать конкретный математический смысл. Таким образом, появляется возможность свести качественные экспертные оценки к количественным, числовым (правда, нечётким). С другой стороны, нечёткие множества предоставляют эксперту большую гибкость при оценивании численных показателей. Например, при ответе на вопрос, каким будет ожидаемый доход от проекта, эксперт может указать пессимистическую $d_{песс}$, оптимистическую $d_{опт}$ и наиболее вероятную $d_{вер}$ оценки, и полученную информацию можно объединить в виде нечёткого треугольного числа $D = (d_{песс}, d_{вер}, d_{опт})$. Далее остаётся только воспользоваться найденными нечёткими численными показателями в задачах сравнения объектов и оптимизации.

Применительно к проблеме формирования портфеля проектов с привлечением теории нечётких множеств мы сталкиваемся с двумя задачами:

- получение оценок показателей проекта в виде нечётких чисел;
- формирование оптимального портфеля на основе полученных нечётких оценок.

Обеим упомянутым задачам посвящена обширная литература. Так, в работах [1,2,3,4] строятся нечёткие финансовые показатели проекта (NPV и IRR). Ряд работ посвящен многокритериальной нечёткой оценке проекта [5,6,7,8] , большое внимание уделяется формированию оценки из многих критериев при помощи нечёткого аналога аналитического иерархического процесса [9,10,11,12]. В серии статей Карлссона и Фуллера, а также их коллег развивается подход к оцениванию проекта посредством реальных опционов [13,14,15] Оптимизация портфеля проектов в условиях нечёткости разбирается в статьях [16,17,18,19].

1. Основные понятия теории нечётких множеств

Зафиксируем произвольное множество *X*. *Нечёткое множество A* задаётся посредством *функции принадлежности* $\mu_A : X \to [0,1]$. Значение $\mu_A(x)$ есть число, лежащее между 0 и 1, показывающее степень принадлежности элемента x нечёткому множеству *A*. Равенство $\mu_A(x) = 1$ означает, что *x точно принадлежит* множеству *A*; равенство $\mu_A(x) = 0$ говорит о том, что *x точно не принадлежит* множеству *A*. Так, для обычного множества $Y \subset X$ функция принадлежности имеет вид $\mu_Y(x) = \begin{cases} 0, & x \in Y; \\ 1, & x \notin Y \end{cases}$ и принимает в качестве значений только 0 и 1. Нечёткие множества отличаются от обычных множеств тем, что допускают промежуточные степени принадлежности, например, $\mu_A(x) = 0{,}5$.

Далее мы будем предполагать, что нечёткое множество *A нормировано*, т.е. существует такой элемент *x*, что $\mu_A(x) = 1$.

Если A и B – два нечётких множества, тогда функции принадлежности

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \qquad (1)$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \qquad (2)$$

$$\mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \qquad (3)$$

по определению задают результат операций объединения $A \cup B$, пересечения $A \cap B$ и дополнения $\overline{A}$ на нечётких множествах.

Для любого числа $\alpha, 0 < \alpha \le 1$, *α-срезом* нечёткого множества *A* называется подмножество $A^{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_A(x) \ge \alpha \}$. 1-срез называют *ядром* нечёткого множества *A*. Заметим, что нечёткое множество однозначно восстанавливается по своим срезам.

Когда *X*=***R*** – множество вещественных чисел, говорят о *нечётких числах*. Для практических вычислений удобно работать с нечёткими числами специального вида: треугольными и трапециевидными.

Трапециевидное число имеет функцию принадлежности, задаваемую формулой

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a_1 \quad \text{или} \quad x > a_4 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1}, & a_1 \le x < a_2 \\ 1, & a_2 \le x \le a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3}, & a_3 < x \le a_4 \end{cases}, \text{ где } a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4. \quad (4)$$

Оно обычно обозначается, как $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$. В случае $a_2 = a_3$ мы получаем *треугольное число* (см. рис.). Для треугольных чисел будем использовать обозначение $A = (a_1, a_2, a_4)$.

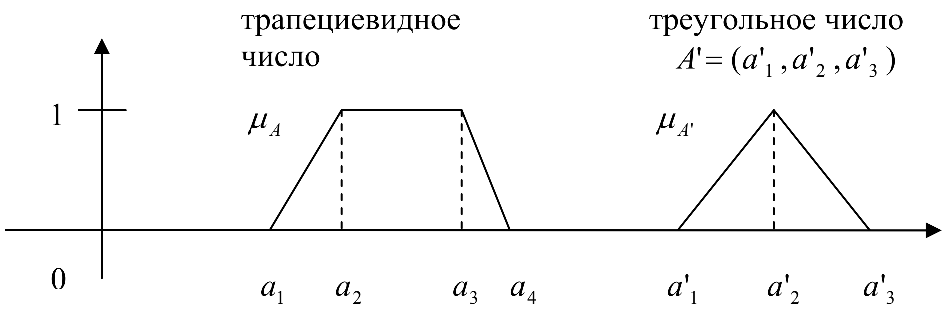

Рис. 1. Трапециевидное и треугольное числа

1.1 Операции над нечёткими числами

Нечёткие числа можно складывать, вычитать, умножать и делить, как и обычные числа. Операции на нечётких числах определяются посредством следующего *принципа расширения*:

Пусть $c = f(a,b)$ – произвольная числовая функция, например, функция сложения, $f(a,b) = a + b$. Тогда значение $C = f(A,B)$ этой функции на нечётких числах А и В имеет функцию принадлежности, вычисляемую по следующей формуле:

$$\mu_C(x) = \sup_{(x,y):z=f(x,y)} \min(\mu_A(x), \mu_B(y)). \quad (5)$$

В этом случае α-срезы нечёткого множества *C* имеют вид:

$$C^\alpha = \left\{ c = f(a,b) \middle| \, a \in A^\alpha, b \in B^\alpha \right\}. \quad (6)$$

Применяя принцип расширения к арифметическим операциям и трапециевидным нечётким числам, мы получим следующие правила сложения и вычитания:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) + (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, a_4 + b_4), \quad (7)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) - (b_1, b_2, b_3, b_4) = (a_1 - b_4, a_2 - b_3, a_3 - b_2, a_4 - b_1). \quad (8)$$

Произведение и частное трапециевидных чисел уже не будут трапециевидными, но будут криволинейно трапециевидными. В данном случае можно написать приближённые равенства:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot (b_1, b_2, b_3, b_4) \approx (a_1 b_1, a_2 b_2, a_3 b_3, a_4 b_4), \quad (9)$$

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) / (b_1, b_2, b_3, b_4) \approx (a_1 / b_4, a_2 / b_3, a_3 / b_2, a_4 / b_1) \quad (10)$$

Здесь предполагается, что нечёткие числа положительны, т.е. $a_1 \geq 0, b_1 > 0$.

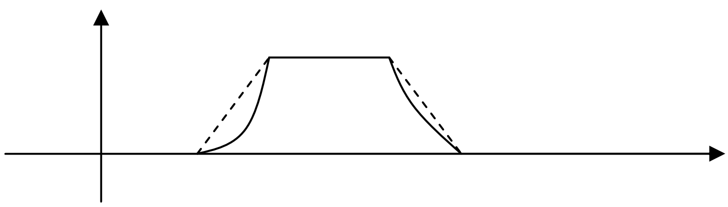

Рис. 2. Криволинейное трапециевидное нечёткое число

С нечётким трапециевидным числом $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ можно связать две числовые характеристики: среднее значение $E(A)$ и дисперсию $Var(A)$,– вычисляемые по формулам

$$E(A) = \frac{a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4}{6}, \quad (11)$$

$$Var(A) = \frac{(a_4 - a_1)^2 + 2(a_4 - a_1)(a_3 - a_2) + 3(a_3 - a_2)^2}{24}. \quad (12)$$

Данные формулы имеют место, если функцию принадлежности интерпретировать как (ненормированную) плотность вероятностного распределения и рассмотреть математическое ожидание и дисперсию соответствующей случайной величины.

1.2 Интерпретация нечётких множеств: теория возможности

Для того чтобы применение теории в приложениях оказалось полезным, необходимо иметь содержательную интерпретацию нечётких множеств и нечётких чисел. Пусть А – нечёткое число и μ_A – её функция принадлежности. Тогда значение $\mu_A(x)$ показывает правдоподобность того, что *действительное* значение величины *A* равно *x*. Л. Заде [20] показал, что такая трактовка неопределённости, связанной с нечётким числом, не является вероятностной. Возникает новая теория, работающая с неопределённостью, которую Заде назвал *теорией возможностей* [21,22]. Таким образом, $\mu_A(x)$ показывает *возможность* того, что нечёткая величина *A* принимает значение *x*.

Чтобы продемонстрировать различия между теорией вероятности и теорией возможности, приведём пример из работы Заде [20]. Некто Ганс на завтрак ест яичницу из нескольких яиц. Обозначим через А количество яиц, которое Ганс ест утром. Мы можем интерпретировать А как нечёткое число и связать с ним функцию принадлежности $\mu_A(x)$. С другой стороны, можно считать А случайной величиной, тогда $p_A(x)$ обозначает вероятность того, что за завтраком будет съедено x яиц. Распределения возможностей и вероятностей образуют следующую таблицу.

Таблица 1.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mu_A(x)$	1	1	1	1	0,8	0,6	0,4	0,2
$p_A(x)$	0,1	0,8	0,1	0	0	0	0	0

Из таблицы видно, что высокий уровень возможности не означает высокую вероятность события, однако, если событие невозможно, то оно невероятно. Пример показывает, что теория возможностей более грубо оценивает ситуацию. Поэтому она более устойчиво работает в тех случаях, когда информации о том, что происходит, немного.

В рамках теории возможностей каждому событию *E* сопоставляется определённое число $Pos(E)$, лежащее между 0 и 1,– *возможность* события. Возможность удовлетворяет следующему свойству [19]: для любых двух событий E_1, E_2

$$Pos(E_1 \cup E_2) = \max(Pos(E_1), Pos(E_2)), \quad (13)$$

$$Pos(E_1 \cap E_2) = \min(Pos(E_1), Pos(E_2)). \quad (14)$$

Рассмотрим в качестве примера нечёткое число *A* и событие $E = \{A \in Y\}$, Y – некоторое множество чисел. Если $Y = \{y\}$ состоит из одной точки, то:

$Pos(A = y) = \mu_A(y)$. В общем случае возможность $Pos(E)$ вычисляется, если представить Y как объединение точек:

$$Pos(A \in Y) = Pos(\bigcup_{y \in Y} \{A = y\}) = \max_{y \in Y} Pos(A = y) = \max_{y \in Y} \mu_A(y). \qquad (15)$$

Таким образом, возможность события определяется возможностью наиболее благоприятного исхода для данного события. Формулу (15) можно обобщить на случай, когда Y – нечёткое множество с функцией принадлежности $\mu_Y(x)$:

$$Pos(A \in Y) = \max_y \min(\mu_A(y), \mu_Y(y)). \qquad (16)$$

Теория возможностей даёт средство для оценки нечётких ограничений. Пусть A – нечёткое число, B – нечёткое число, представляющее некоторое ограничение. Фиксируем некоторый уровень достоверности $\gamma, 0 < \gamma < 1$. Будем говорить, что число A *удовлетворяет ограничению B с уровнем достоверности* γ [22], если выполнено соотношение $Pos(A \in \overline{B}) < 1 - \gamma$. Это условие эквивалентно следующему неравенству:

$$N_A(B) \equiv \min_y \max(1 - \mu_A(y), \mu_B(y)) > \gamma. \qquad (17)$$

Число $N_A(B)$ называется *степенью удовлетворения* условию B.

Рассмотрим два частных случая ограничений, которые используются при решении задач формирования портфеля проектов:

1) $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ – трапециевидное число, а B имеет вид бюджетного ограничения (см. рис.): $B = (0, 0, b_3, b_4)$, то условие $N_A(B) \ge \gamma$ эквивалентно следующему неравенству [15]:

$$(1-\gamma)a_3 + \gamma a_4 \le \gamma b_3 + (1-\gamma)b_4. \qquad (18)$$

Такого рода условие появляется, например, когда нужно сравнить количество потребляемых ресурсов A с имеющимся объёмом ресурсов, выделяемых в рамках бюджета B. При этом b_3 есть наиболее вероятное значение бюджета, а b_4 – его максимально возможное значение.

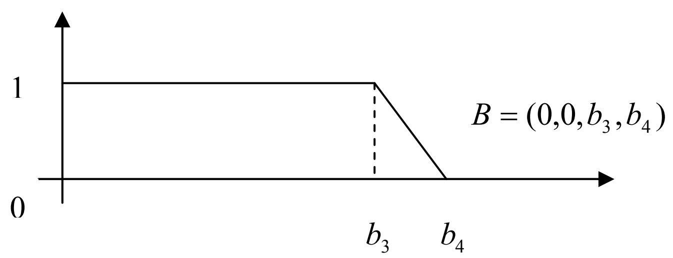

Рис. 3. Бюджетное ограничение

2) $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $B = (b, b, \infty, \infty)$. Тогда $N_A(B) \ge \gamma$ равносильно

$$\gamma a_1 + (1-\gamma)a_2 \geq b \tag{19}$$

Выполнение условия (19) означает, что нечёткое число A оценивается снизу (чётким) числом b. Эта оценка ниже будет использоваться при нахождении максимума в семействе нечётких чисел.

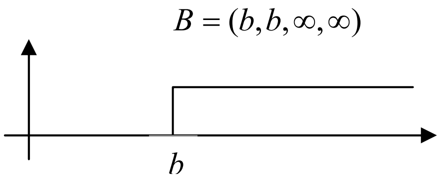

Рис. 4. Нечёткое ограничение при оценке снизу

2. Оценка инновационных проектов на основе теории нечетких множеств

2.1 Оценивание денежного потока проекта

Общепризнанными показателями, характеризующими инвестиционный проект, служат такие величины, как чистый дисконтированный доход NPV, внутренняя норма возврата IRR, срок окупаемости и т.д. При вычислении каждого из этих показателей денежный поток проекта предполагается известным. Однако на практике, как правило, невозможно получить точную оценку потока проекта. В этом случае удобно использовать нечёткие числа, параметры которых могут быть оценены экспертами.

Пусть денежный поток проекта задаётся как набор трапециевидных нечётких чисел $C_t = (c_{t1}, c_{t2}, c_{t3}, c_{t4})$, $t = 0,1,2,3,\ldots,T$. Число c_{t1} интерпретируется как наименьшее возможное значение потока в момент времени t, поток ни при каких обстоятельствах не может опускаться ниже этого значения, c_{t4} – наибольшее возможное значение, а числа c_{t2} и c_{t3} образуют интервал, в пределах которого, скорее всего, будет находиться значение денежного потока. Довольно часто для оценки используют треугольные нечёткие числа $C_t = (c_{t1}, c_{t2} = c_{t3}, c_{t4})$, при этом число c_{t1} есть пессимистическая, c_{t4} – оптимистическая, а c_{t2} – наиболее вероятная оценка денежного потока проекта.

Аналогичным образом, ставка дисконтирования также представляется в виде нечёткого числа $r = (r_1, r_2, r_3, r_4)$.

Чтобы найти выражение для нечёткого NPV, нужно, как и в обычном случае, суммировать (нечёткие) дисконтированные значения для всех компонент денежного потока:

$$NPV = \sum_{t=0}^{T} PV(C_t) \qquad (20)$$

В свою очередь, дисконтированное значение $PV(C_t)$ получается применением принципа расширения к классической формуле $PV(C_t) = \frac{C_t}{(1+r)^t}$. В итоге получаем дисконтированный чистый денежный поток в момент t [2]:

$$PV(C_t) = \left(\frac{\max(c_{t1},0)}{(1+r_4)^t} + \frac{\min(c_{t1},0)}{(1+r_1)^t}, \frac{\max(c_{t2},0)}{(1+r_3)^t} + \frac{\min(c_{t2},0)}{(1+r_2)^t}, \right.$$

$$\left. \frac{\max(c_{t3},0)}{(1+r_2)^t} + \frac{\min(c_{t3},0)}{(1+r_3)^t}, \frac{\max(c_{t4},0)}{(1+r_1)^t} + \frac{\min(c_{t4},0)}{(1+r_4)^t} \right). \qquad (21)$$

Подставляя полученное выражение в предыдущую формулу (20), нетрудно получить формулу для чистой текущей стоимости проекта:

$$NPV = (\sum_{t=0}^{T} d_{t1}, \sum_{t=0}^{T} d_{t2}, \sum_{t=0}^{T} d_{t3}, \sum_{t=0}^{T} d_{t4}), \qquad (22)$$

где $PV(C_t) = (d_{t1}, d_{t2}, d_{t3}, d_{t4})$.

Пример оценки денежного потока проекта

Пусть значения параметров денежного потока проекта заданы таблицей 2.

Таблица 2

Параметры денежного потока проекта

t	0	1	2	3	4
C_t	(-1200,-1000, -900,-800)	(-700,-500, -450,-300)	(150,180,220,250)	(1800,1900, 2100,2200)	(2700, 3000, 3000,3400)

Ставку дисконтирования положим равной $r = (0.1, 0.2, 0.2, 0.3)$.

Тогда: $PV(C_0) = C_0$,

$$PV(C_1) = (\frac{-700}{1.1}, \frac{-500}{1.2}, \frac{-450}{1.2}, \frac{-300}{1.3}) = (-636.4,-416.7,-375,-230.8).$$

Результаты вычислений дисконтированных чистых денежных потоков представлены в таблице 3.

Таблица 3

Дисконтированные чистые денежные потоки проекта

t	0	1	2	3	4
PV	(-1200,-1000,	(-636.4,-416.7,	(88.8,125, 152.8,206.6	(819.3,1099.5,	(945.3,1446.8,

	-900,-800)	-375,-230.8)	)	1215.3,1652.9)	1446.8,2322.2)

Вычисляем NPV, суммируя нечёткие числа таблицы:

$$NPV = PV(C_0) + PV(C_1) + PV(C_2) + PV(C_3) + PV(C_4) = (17, 1254.6, 1539.8, 3151).$$

Внутренняя норма доходности проекта с нечётким денежным потоком вычисляется по формуле:

$$IRR = (irr_1, irr_2, irr_3, irr_4), \tag{23}$$

где irr_k, $k = 1,2,3,4$, – внутренняя норма доходности проекта с (чётким) денежным потоком $c_{0k}, c_{1k}, \ldots, c_{Tk}$, таким образом, irr_k есть корень уравнения

$$\sum_{t=0}^{T} \frac{c_{tk}}{(1+irr_k)^t} = 0 \tag{24}$$

В нашем примере вычисления дают ответ: *IRR* = (32%, 46%, 54%, 68%).

Точно так же срок окупаемости представляется в виде трапециевидного числа

$$PP = (p_1, p_2, p_3, p_4), \tag{25}$$

где p_k – срок окупаемости проекта с потоком $c_{0k}, c_{1k}, \ldots, c_{Tk}$. Таким образом,

$$p_k = \min_p \left\{ p : \sum_{t=0}^{[p]} d_{tk} + (p - [p]) d_{[p]+1,k} \geq 0 \right\}, \tag{26}$$

где $[p]$ - целая часть числа p и $PV(C_t) = (d_{t1}, d_{t2}, d_{t3}, d_{t4})$.

В приведённом выше примере срок окупаемости равен *PP* = (3.35, 3.77, 4.13, 4.98).

2.2. Оценка эффективности инновационных проектов на основе составных опционов и нечетких множеств

Рассмотрим инновационный проект, имеющий 3 фазы (например, НИР, ОКР, запуск в производство и производство продукции). Предполагается, что инвестиционные затраты производятся преимущественно в начале каждой фазы, их дисконтированное значение равно C_1, C_2, C_3 соответственно. Пусть S обозначает дисконтированный доход, приведенный к началу 3-ей фазы проекта. Считается, что C_1, C_2, C_3, S – нечёткие числа, полученные экспертным путем. Пусть T_1, T_2 --- срок завершения первой и второй фазы, r – ставка дисконтирования.

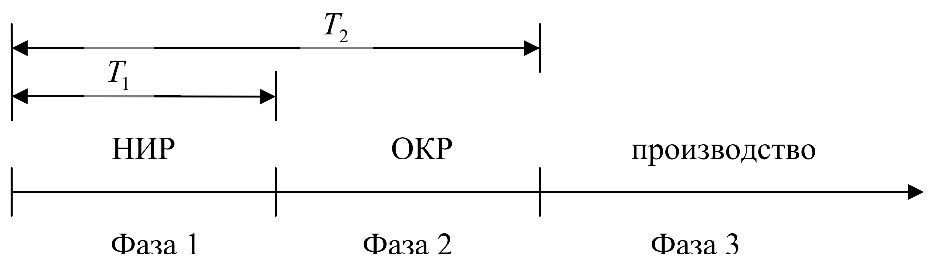

Рис. 5 Фазы инновационного проекта

Оценка эффективности проекта как нечёткого составного опциона основывается на работах Геске [23]. Переход к формулам, пригодным для нечётких множеств, осуществляется с помощью принципа расширения, упомянутого выше. В данном случае применение данного принципа приводит к следующим выражениям. Оценка чистой текущей стоимости проекта NPV может быть получена по формуле:

$$V = Se^{-\delta T_2} M(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - C_3 e^{-rT_2} M(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - C_2 e^{-rT_1} N(a_2), \quad (27)$$

где:

$$a_1 = \frac{\ln[E(S)/S^c] + (r - \delta + \sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \qquad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1}, \quad (28)$$

$$b_1 = \frac{\ln[E(S)/E(C_3)] + (r - \delta + \sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2}, \quad (29)$$

$\sigma = \dfrac{\sqrt{Var(S)}}{E(S)}$ – волатильность доходности проекта, (30)

$\delta = \dfrac{E(C_1)}{E(S)}$ – дивиденд, (31)

$N(a)$ -- функция стандартного нормального распределения, $M(a,b;\rho)$ – кумулятивная функция двойного нормального распределения с коэффициентом корреляции ρ (то есть кумулятивная функция пары стандартных нормально распределенных случайных величин, корреляция между которыми равна ρ), а критическое значение проекта S^c есть корень следующего уравнения:

$$S^c e^{-\delta(T_2 - T_1)} N(c_1) - E(C_3) e^{-r(T_2 - T_1)} N(c_2) - E(C_2) = 0, \quad (32)$$

где:

$$c_1 = \frac{\ln[S^c / E(C_3)] + (r - \delta + \sigma^2/2)(T_2 - T_1)}{\sigma\sqrt{T_2 - T_1}}, \quad (33)$$

$$c_2 = c_1 - \sigma\sqrt{T_2 - T_1}. \quad (34)$$

Значение S^c находится приближённо численными методами (например, методом Ньютона-Рафсона).

Заметим, что в формулах (28), (29), (32), (33) для проведения вычислений нечёткие переменные были заменены на их средние значения. Благодаря этому операции над нечёткими числами сводятся лишь к сложению, вычитанию и умножению.

Геске в [23] предложил формулу для вычисления цены опциона на покупку акции, предполагая, что акция, в свою очередь, является опционом на участие в дележе средств, полученных в момент после продажи имущества фирмы при её ликвидации и выплаты долгов. Выводится формула Геске при тех же предположениях, что и формула Блэка-Шоулза, т.е. считается, что рынок безарбитражный и совершенный и что стоимость фирмы меняется в соответствие с геометрическим броуновским движением. В этих условиях стоимость европейского колл-опциона вычисляется по формуле:

$$V = S \cdot M(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - C_3 e^{-rT_2} M(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - C_2 e^{-rT_1} N(a_2),$$

где:

$$a_1 = \frac{\ln[S/S^c] + (r + \sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \qquad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1},$$

$$b_1 = \frac{\ln[S/C_3] + (r + \sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \qquad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2},$$

а S^c есть корень уравнения $\quad S^c N(c_1) - C_3 e^{-r(T_2 - T_1)} N(c_2) - C_2 = 0,$

где $\quad c_1 = \dfrac{\ln[S^c/C_3] + (r + \sigma^2/2)(T_2 - T_1)}{\sigma\sqrt{T_2 - T_1}}, \qquad c_2 = c_1 - \sigma\sqrt{T_2 - T_1}.$

Здесь V есть стоимость опциона, S интерпретируется как текущая стоимость фирмы, C_2 -- размер долга, выплачиваемого при ликвидации фирмы, C_3 -- цена исполнения опциона, T_1 -- время исполнения опциона, T_2 -- время ликвидации фирмы, r -- безрисковая ставка, σ -- волатильность стоимости фирмы.

Перлиц, Песке и Шранк [24] дали формуле сложных опционов другую интерпретацию, рассмотрев ее в контексте реальных опционов. При этом они получили оценку для стоимости исследовательского проекта, проходящего 3 фазы. Предположим, что мы находимся в условиях, описанных в начале параграфа 2.2 с тем отличием, что оценки для затрат и дохода C_1, C_2, C_3, S представляют собой обычные (чёткие) числа. Тогда оценка проекта производится по формуле

$$V = Se^{-\delta T_2} M(a_1, b_1; \sqrt{T_1/T_2}) - C_3 e^{-rT_2} M(a_2, b_2; \sqrt{T_1/T_2}) - C_2 e^{-rT_1} N(a_2),$$

где:

$$a_1 = \frac{\ln[S/S^c] + (r - \delta + \sigma^2/2)T_1}{\sigma\sqrt{T_1}}, \quad a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{T_1},$$

$$b_1 = \frac{\ln[S/C_3] + (r - \delta + \sigma^2/2)T_2}{\sigma\sqrt{T_2}}, \quad b_2 = b_1 - \sigma\sqrt{T_2},$$

а S^c есть корень уравнения $S^c e^{-\delta(T_2-T_1)} N(c_1) - E(C_3)e^{-r(T_2-T_1)} N(c_2) - E(C_2) = 0$,

причём $c_1 = \dfrac{\ln[S^c/C_3] + (r - \delta + \sigma^2/2)(T_2 - T_1)}{\sigma\sqrt{T_2 - T_1}}, \quad c_2 = c_1 - \sigma\sqrt{T_2 - T_1}$.

Дивиденд δ рассчитывается как $\delta = \dfrac{C_1}{S}$.

Сравнение с формулами (27)-(34) показывает, какие изменения нужно внести при переходе к нечётким оценкам затрат и дохода проекта.

Пример оценки инновационного проекта

Пусть $C_1 = (40{,}50{,}60), C_2 = (280{,}300{,}320), C_3 = (630{,}700{,}770)$, $S = (2000{,}2500{,}3000)$, представляющие собой оценки денежного потока проекта посредством треугольных нечётких чисел. Положим $T_1 = 3, T_2 = 5, r = 5\%$. Тогда:

$E(S) = 2500, \quad Var(S) = 41666{,}7$, $E(C_3) = 700, \quad Var(C_3) = 816{,}7$, $E(C_1) = 50$. Откуда $\sigma = 0{,}082$, $\delta = 0{,}02$. Критическое значение приблизительно равно $S^c = 971{,}47$. Следовательно, имеем $a_1 = 7{,}39, a_2 = 7{,}25, b_1 = 7{,}89, b_2 = 7{,}7$. В итоге получаем следующую оценку проекта $V = (934.57, 1458.72, 1982.87)$.

С другой стороны, чистая текущая стоимость проекта, оцененная традиционным методом дисконтированных денежных потоков, равна $NPV = S - C_1 - C_2 - C_3 = (850, 1450, 2050)$. Вычисленная методом составных опционов оценка оказалась достаточно близкой к оценке, полученной при помощи реальных опционов: нижняя граница соответствующего треугольного числа отличается на 10%, наиболее возможное значение – на 0,5%, верхняя граница – на 3%.

2.3. Оценивание качественных показателей проекта при помощи нечётких множеств

При оценке инвестиционного проекта, наряду с такими его числовыми характеристиками проекта, как NPV, используются качественные показатели. В качестве примера таких показателей можно назвать инновативность проекта, соответствие проекта стратегическим целям компании, экологичность проекта, влияние на репутацию фирмы и т.д. Качественные показатели обычно выражаются в виде балльной оценки, проставляемой одним или несколькими экспертами. В дальнейшем балльная шкала переводится в числовую. Числа, полученные по разным показателям одного проекта, агрегируются в один числовой показатель, и данная общая оценка используется в процессе ранжирования проектов.

Появление нечётких множеств позволило сделать процедуру перехода от балльной шкалы к числовой более гибкой и адекватной мышлению человека-эксперта. Рассмотрим в качестве примера 5-балльную шкалу качественных оценок проекта: «очень плохо», «плохо», «средне», «хорошо», «очень хорошо». Каждому из баллов сопоставим трапециевидное нечёткое число в соответствии с таблицей. Это число будет считаться нечёткой оценкой показателя.

Таблица 4.

Балл	очень плохо	плохо	средне	хорошо	очень хорошо
Оценка	(0, 0, 0.1, 0.3)	(0.1, 0.3, 0.3, 0.5)	(0.3, 0.5, 0.5, 0.7)	(0.5, 0.7, 0.7, 0.9)	(0.7, 0.9, 1, 1)

На графике нарисованы функции принадлежности данных нечётких чисел.

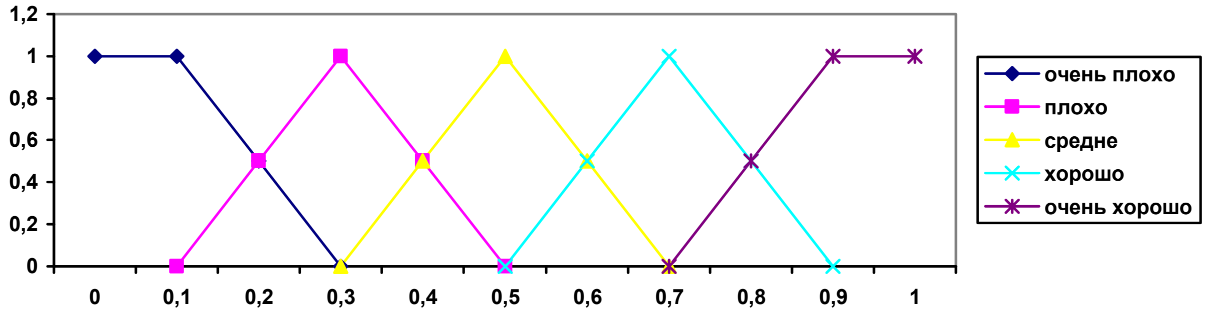

Рис. 6 Функции принадлежности оценок балльной шкалы

Как видно, нечёткие числа зацеплены друг за друга. Это отражает тот факт, что нет резкого разделения между соседними оценками, и переход от одной балльной оценки к другой происходит постепенно. Результатом оценивания качественного показателя проекта является нечёткое число, лежащее на отрезке от 0 до 1.

В случае, когда при оценивании проекта рассматривается несколько показателей, как качественных, так и количественных, появляется необходимость в сведении набора полученных оценок к одной общей (интегральной) оценки. Процесс сведения предполагает выполнение следующих действий:

1) Нахождение относительного веса для каждого показателя;

2) Оценивание каждого показателя проекта нечётким числом;
3) Нормировка количественных показателей;
4) Агрегирование нечётких оценок проекта с заданными весами и получение общей оценки проекта.

Нахождение весов для показателей является наиболее важным и содержательным этапом. На этом шаге исследователь решает, какие показатели являются более приоритетными по сравнению с остальными, что, в конечном итоге, определяет вид решения.

Стандартным методом построения весов является аналитический иерархический процесс, предложенный Саати [25]. Схема метода Саати заключается в следующем. Для каждой пары показателей i и j экспертами оценивается число a_{ij}, которое показывает, насколько первый показатель превосходит второй. Считается, что в идеальной ситуации выполняется равенство $a_{ij} = \frac{\alpha_i}{\alpha_j}$, где α_i, α_j – веса факторов i и j соответственно. На практике, однако, можно добиться лишь приближенного выполнения равенств. Саати в статье [25] предложил алгоритм, как раз позволяющий по коэффициентам a_{ij} приближенно найти набор весов α_i.

В работах [9,10,11,12] конструкция Саати была перенесена на случай нечетких множеств. В данной ситуации коэффициент сравнительного превосходства a_{ij} считается нечетким числом. Как правило, это коэффициент берется из нечеткой балльной шкалы, например, заданной таблицей 4. Веса показателей α_i, получающиеся в результате обобщенного процесса Саати, также будут нечеткими числами.

Целью нормировки является приведение количественного показателя к нечёткому числу, лежащему на интервале от 0 до 1. Если $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ – нечёткое значение количественного показателя для конкретного проекта, а возможные значения показателя для всех проектов ограничены сверху числом N, то после нормировки показатель проекта будет равен

$$\overline{A} = (\frac{a_1}{N}, \frac{a_2}{N}, \frac{a_3}{N}, \frac{a_4}{N}). \qquad (35)$$

Пусть параметры проекта оцениваются нечёткими числами $X_1, X_2, \ldots, X_n$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, $\alpha_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$,– соответствующие веса показателей. Тогда общая оценка проекта будет равна $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$. Если значения показателей являются трапециевидными нечёткими числами: $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}, x_{i4})$, $i = 1,2,\ldots,n$, то

$$X = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{i1}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{i2}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{i3}, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_{i4}, \right). \qquad (36)$$

Пример оценивания качественных показателей проекта

Предположим, что проект оценивается двумя показателями: чистой текущей стоимостью *NPV* и степенью соответствия стратегическим целям компании *S*. Чистая современная стоимость проекта оценивается как $NPV = (150,200,220,250)$ тыс.р., при этом *NPV* типичных проектов, реализуемых компанией, не превосходят 400 тыс.р. Степень соответствия проекта стратегии компании эксперты оценивают как «хорошую». Вес показателя *NPV* равен 0.4, стратегического показателя – 0.6.

В этом случае нормированная оценка первого показателя равна $X_1 = \overline{NPV} = \left(\frac{150}{400}, \frac{200}{400}, \frac{220}{400}, \frac{250}{400} \right) = (0.375,\ 0.5,\ 0.55,\ 0.625)$. Значение второго показателя равно $X_2 = S = (0.5,\ 0.7,\ 0.7,\ 0.9)$.

Общая оценка проекта равна

$$X = \left(0.4 \cdot 0.375 + 0.6 \cdot 0.5,\ 0.4 \cdot 0.5 + 0.6 \cdot 0.7,\ 0.4 \cdot 0.55 + 0.6 \cdot 0.7,\ 0.4 \cdot 0.625 + 0.6 \cdot 0.9\right) =$$
$$= (0.45,\ 0.62,\ 0.64,\ 0.79).$$

2.4. Ранжирование проектов

После того, как каждый проект получил общую оценку в виде трапецевидного нечёткого числа, можно упорядочить проекты в соответствии с приписанным им рейтингом. Для сравнения нечётких чисел имеется несколько различных методов [2]:

1) Метод Чью-Парка. Фиксируется параметр w. Каждому трапецевидному числу $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ ставится в соответствие (чёткое) число

$$cp(A) = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} + w\frac{a_2 + a_3}{2}. \qquad (37)$$

Упорядочение производится по возрастанию величин $cp(A)$.

2) Метод Чанга. Трапецевидные числа $A = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ упорядочиваются по возрастанию величин

$$ch(A) = \frac{a_3^2 + a_3 a_4 + a_4^2 - a_1^2 - a_1 a_2 - a_2^2}{6}. \qquad (38)$$

3) Метод Кауфмана-Гупты. Вычисляются три следующие величины:

$$\mathrm{kg}_1(A) = \frac{a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4}{6},\ \mathrm{kg}_2(A) = \frac{a_3 + a_4}{2},\ \mathrm{kg}_3(A) = a_4 - a_1 \quad (39)$$

Полагаем, что $A \ge B$, если $\mathrm{kg}_1(A) > \mathrm{kg}_1(B)$, или $\mathrm{kg}_1(A) = \mathrm{kg}_1(B)$ и $\mathrm{kg}_2(A) > \mathrm{kg}_2(B)$, или $\mathrm{kg}_1(A) = \mathrm{kg}_1(B)$, $\mathrm{kg}_2(A) = \mathrm{kg}_2(B)$ и $\mathrm{kg}_3(A) > \mathrm{kg}_3(B)$.

4) Метод Джейна. Метод задаёт порядок в наборе нечётких чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Пусть возможные значения чисел из данного набора лежат на промежутке от b_1 до b_2. Тогда нечёткое число $B = (b_1, b_2, \infty, \infty)$ можно рассматривать как нечёткое множество «больших чисел». Для каждого A_i рассматривается степень, в которой число A_i является «большим»:

$$Pos(A_i \in B) = \max_x \min(\mu_{A_i}(x), \mu_B(x)) \quad (40)$$

Набор $A_1, A_2, \ldots, A_n$ упорядочивается по возрастанию величин $Pos(A_i \in B)$.

5) Метод Дюбуа-Прада. Как и в предыдущем методе, рассматривается набор нечётких чисел $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Каждому числу A_i отвечает его степень доминирования над остальными числами:

$$PD(A_i) = Pos(A_i \ge \max_{j \ne i} A_j) = \min_{j \ne i} \max_{x,y} \min(\mu_{A_i}(x), \mu_{A_j}(y)). \quad (41)$$

Числа упорядочиваются по возрастанию величин $PD(A_i)$.

Рассмотренные методы сравнения в общем случае могут давать разные результаты [2].

Пример ранжирования проектов

Пример. Пусть имеется три проекта, оцененные числами $A_1 = (3,5,5,9)$, $A_2 = (3,7,7,8)$, $A_3 = (1,6,6,10)$. По методу Чью-Парка с параметром $w = 1$ имеем:

$cp(A_1) = 10.5 < cp(A_3) = 11.75 < cp(A_2) = 13.25$. Наилучшим является второй проект, далее следуют третий и первый проекты.

Метод Чанга приводит к следующему результату $ch(A_2) = 15 < ch(A_1) = 17 < ch(A_3) = 25.5$, то есть второй проект оказывается наихудшим.

По методу Кауфмана-Гупты получаем:

$kg_1(A_1) = 5.33 < kg_1(A_3) = 5.83 < kg_1(A_2) = 6.5$, что совпадает с результатом метода Чью-Парка.

В методе Джейна определим множество больших чисел как $B = (0,10,\infty,\infty)$. Тогда

$Pos(A_1 \in B) = 6.43 < Pos(A_3 \in B) = 7.14 < Pos(A_2 \in B) = 7.27$. Порядок совпадает с порядком Чью-Парка.

Применение метода Дюбуа-Прада даёт следующие неравенства:

$PD(A_1) = 0.75 < PD(A_3) = 0.875 < PD(A_2) = 1$. Это приводит к следующему ранжируемому списку: « проект 1< проект 3< проект 2».

3. Задача формирования портфеля проектов

Оптимизационные задачи (и в том числе, задачи линейного программирования) естественно возникают при решении проблемы оптимального выбора портфеля проектов в условиях ограниченности ресурсов. Если же проекты оцениваются с использованием нечётких множеств, мы имеем дело с задачей нечёткого линейного программирования, при этом нечёткой является целевая функция. Однако ограничения задачи также могут быть нечёткими, если заранее определить точное количество доступных либо необходимых для реализации проекта ресурсов не представляется возможным. Пример такой модели разобран в работе [15].

Пусть имеется *n* проектов, из которых нужно сформировать портфель. Каждому проекту отвечает булева переменная модели x_i, i – номер проекта, принимающая значения 0 и 1. Полагаем $x_i = 1$, если *i*-ый проект включен в портфель, и $x_i = 0$ в противном случае.

С каждым проектом связывается следующий набор показателей:

V_i -- ценность проекта,

C_{it} -- затраты на *i*-ый проект на стадии *t*,

R_{ikt} -- количество специалистов направления *j*, необходимых *i*-ому проекту на стадии *t*,

$$SI_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{если } i-\textit{ый проект соответствует } j-\textit{ой стратегической цели}, \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}$$

$$PR_{pq} = \begin{cases} 1, & \begin{array}{l} \textit{если } p-\textit{ый проект связан с проектом } q \textit{ отношением импликации}(\textit{т.е.} \\ \textit{если проект } q \textit{ включаем в портфель, то проект } p \textit{ необходимо включить} \\ \textit{в портфель}), \end{array} \\ 0, & \textit{в противном случае} \end{cases}$$

Показатели C_{it}, R_{ikt}, V_i являются нечёткими числами. Предполагается, что проекты, включённые в портфель, синхронно проходят все стадии.

Следующие показатели описывают количество ресурсов, выделенное для данного портфеля, они также задаются в виде нечётких чисел:

B_t -- бюджет портфеля на стадии *t*,

R_{kt} -- количество специалистов направления *j*, доступных на стадии *t*,

S_j^U -- максимальный совокупный бюджет, который можно потратить на достижение стратегической цели *j*,

S_j^L -- минимальный совокупный бюджет, который необходимо потратить на достижение стратегической цели *j*.

Модель формирования портфеля проектов представляется как нечёткая задача целочисленного линейного программирования (42)-(48):

$$\sum_{i=1}^{n} V_i x_i \to \max , \quad (42)$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_{it} x_i \le B_t \quad \forall t , \quad (43)$$

$$\sum_{i=1}^{n} R_{ikt} x_i \le R_{kt} \quad \forall k, t , \quad (44)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} RI_{ij} C_{it} x_i \le S_j^U \quad \forall j , \quad (45)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} RI_{ij} C_{it} x_i \ge S_j^L \quad \forall j , \quad (46)$$

$$PR_{pq}(x_q - x_p) \le 0 \quad \forall p, q , \quad (47)$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i . \quad (48)$$

Таким образом, целевой функцией модели является совокупная ценность портфеля проектов. Модель содержит нечёткие ограничения трёх видов: бюджетные ограничения, ограничения на человеческие ресурсы и стратегические ограничения. Стратегические ограничения показывают, какая пропорция между стратегическими целями должна соблюдаться при распределении финансовых ресурсов портфеля. Единственное чёткое ограничение (47), основанное на использовании логической операции импликации, гарантирует включение в портфель вместе с выбранным проектом всех проектов, от которых он зависит.

Заметим, что модель сформулирована не полностью (или нечётко), поскольку не указано, как можно сравнивать между собой нечёткие числа при проверке ограничений модели и как устанавливать оптимальность портфеля проектов. Одним из возможных путей решения данной проблемы является использование степени удовлетворения условию, введённой в предыдущем параграфе.

Фиксируем уровни достоверности $\lambda_B, \lambda_R, \lambda_S, \gamma$ для ограничений на бюджет, персонал, стратегии и для целевой функции соответственно. Рассмотрим следующую систему соотношений:

$$\max v$$

$$N_{\sum V_i x_i}(v, v, \infty, \infty) \geq \gamma \tag{49}$$

$$N_{\sum C_{it} x_i}(B_t) \geq \lambda_B \quad \forall t \tag{50}$$

$$N_{\sum R_{ikt} x_i}(R_{kt}) \geq \lambda_R \quad \forall k, t \tag{51}$$

$$N_{\sum SI_{ij} C_{it} x_i}(S_j^U) \geq \lambda_S \quad \forall j \tag{52}$$

$$N_{-\sum SI_{ij} C_{it} x_i}(-S_j^L) \geq \lambda_S \quad \forall j \tag{53}$$

$$PR_{pq}(x_q - x_p) \leq 0 \quad \forall p, q \tag{54}$$

$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i \tag{55}$$

Если все нечёткие числа, входящие в модель, являются трапециевидными, то мы приходим к задаче (чёткого) целочисленного линейного программирования, для решения которой можно использовать стандартные методы.

Пример модели формирования портфеля проектов

Пусть необходимо сформировать портфель из 5-ти независимых проектов. Из них проекты 1,2,3 отвечают первой стратегической цели, а проекты 4,5 – второй стратегической цели. Требуемые для реализации ресурсы представлены в следующих таблицах. Данные задаются в виде треугольных и трапециевидных чисел.

Таблица 5

Дисконтированные затраты на проект

Номер проекта	Стадия 1	Стадия 2	Стадия 3
1	(15,20,25)	(60,80,90,110)	(150,200,250,300)
2	(15,30,45)	(100,120,130,150)	(150,300,400,550)
3	(30,40,50)	(170,200,220,250)	(420,500,600,680)
4	(40,50,60)	(80,100,120,160)	(310,400,500,590)
5	(30,60,70,80),	(90,120,150)	(330,400,500,570)

Таблица 6

Требуемое количество специалистов

Номер проекта	Стадия 1	Стадия 2	Стадия 3
1	(7.5,10,12.5)	(8,12,16)	(15,20,25)
2	(7.5,10,12.5)	(15,20,25)	(22.5,30,47.5)
3	(15,20,25)	(22.5,30,47.5)	(45,60,75)

4	(15,20,25)	(42.75, 65, 76.25)	(37.5, 50, 62.5)
5	(15,20,25)	(45,60,75)	(36.25, 55, 63.75)

Таблица 7

Дисконтированный доход от проекта

Номер проекта	Доход
1	(700,800,1000,1100)
2	(900,1000,1200,1300)
3	(1400,1700,2000,2500)
4	(1050,1500,2200,2650)
5	(1500,2000,2500,2600)

Стадии 1 и 2 завершаются в момент $T_1 = 3$ и $T_2 = 6$ соответственно. Ставка дисконтирования равна $r = 5\%$.

Ресурсы, выделяемые портфелю, определяются с использованием трапециевидных чисел, представленных в таблице 8.

Таблица 8

Выделяемые ресурсы

Тип ресурса	Стадия 1	Стадия 2	Стадия 3
Бюджет	(0,0,150,185)	(0,0,400,450)	(0,0,1250,1500)
Специалисты	(0,0,50,70)	(0,0,150,190)	(0,0,135,185)

Менеджерами были определены следующие требования к портфелю проектов и уровням достоверности. Расходы на первую стратегическую цель должны составлять 20-80% выделенного бюджета, на вторую цель – 20-60%. Уровень достоверности по целевой функции равен $\gamma = 0.95$, по бюджетным ограничениям -- $\lambda_B = 0.99$, по персоналу -- $\lambda_R = 0.9$, по стратегическим целям -- $\lambda_S = 0.85$.

Применяя формулу нечётких составных опционов, получим следующие оценки проектов.

Таблица 9

Оценки проектов

Номер проекта	Оценка
1	(295.701,437.471,658.152,799.922)
2	(227.596,440.833,693.329,906.566)
3	(513.663,862.8,1218.14,1567.28)
4	(343.157,806.032,1487.69,1967.72)
5	(714.806,1214.54,1710.68,2210.41)

При установленных уровнях достоверности задача формирования портфеля является следующей задачей линейного программирования:

$$302.79\, x_1 + 238.258\, x_2 + 531.12\, x_3 + 366.301\, x_4 + 739.793\, x_5 \to \max,$$
$$24.95\, x_1 + 44.85\, x_2 + 49.9\, x_3 + 59.9\, x_4 + 79.9\, x_5 \le 150.35,$$

$$109.8\,x_1 + 149.8\,x_2 + 249.7\,x_3 + 159.6\,x_4 + 149.7\,x_5 \le 400.5\,,$$
$$299.5\,x_1 + 548.5\,x_2 + 679.2\,x_3 + 589.1\,x_4 + 569.3\,x_5 \le 1252.5\,,$$
$$12.25\,x_1 + 12.25\,x_2 + 24.5\,x_3 + 24.5\,x_4 + 24.5\,x_5 \le 52\,,$$
$$24.5\,x_1 + 36.75\,x_2 + 73.5\,x_3 + 61.25\,x_4 + 67.375\,x_5 \le 140\,,$$
$$14.7\,x_1 + 24.5\,x_2 + 36.75\,x_3 + 79.625\,x_4 + 73.5\,x_5 \le 154\,,$$
$$423.75\,x_1 + 717.25\,x_2 + 962.\,x_3 \le 1480.2\,,$$
$$789.\,x_4 + 783.5\,x_5 \le 1110.15\,,$$
$$371.25\,x_1 + 587.75\,x_2 + 878.\,x_3 \ge 416.95\,,$$
$$691.\,x_4 + 706.5\,x_5 \ge 416.95\,,$$
$$x_i \in \{0,1\} \quad \forall i\,,$$

Решение данной задачи линейного программирования есть $x_1 = x_3 = x_4 = 0,\ x_2 = x_5 = 1$. Это означает, что в портфель нужно включить второй и пятый проекты. Оценка портфеля равна $v = 978.051$.

Уровни достоверности $\lambda_B, \lambda_R, \lambda_S$ задают жёсткость ограничений и, вообще говоря, могут влиять на содержание портфеля. Например, если в предыдущим примере ослаблять бюджетное ограничение, снижая λ_B и оставляя другие показатели неизменными, то при $\lambda_B \le 0.673$ к портфелю добавляется проект 1.

Показатель γ определяет вид целевой функции и также оказывает влияние на состав портфеля и его оценку v. В предыдущем примере положим $\lambda_B = \lambda_R = \lambda_S = 0.9$ и будем варьировать уровень достоверности γ. Получаем следующую зависимость оценки проекта от уровня достоверности.

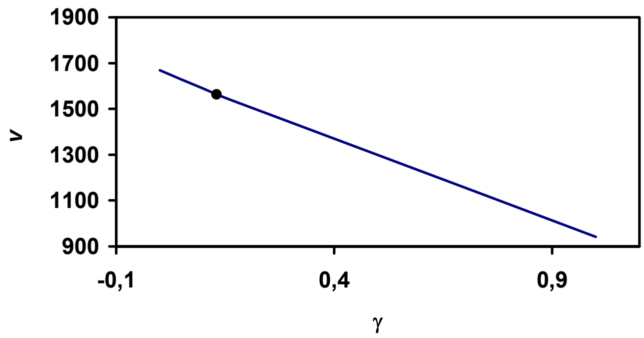

Рис. 7 Зависимость стоимости портфеля от уровня достоверности

Зависимость является кусочно-линейной, излом происходит в точке $\gamma = 0.13$. При $\gamma < 0.13$ в портфель входят проекты 3 и 4, при $\gamma > 0.13$ портфель состоит из проектов 2 и 5.

Заключение

Применение теории нечётких множеств открывает новые методы и возможности для решения задач оценивания проектов и формирования оптимального портфеля проектов. Во-первых, нечёткие множества позволяют учитывать качественные характеристики проектов, преобразуя их в численный вид. Во-вторых, применительно к количественным характеристикам проекта, таким как NPV, теория предоставляет средства для работы с неопределённостью даже в тех случаях, когда имеющейся информации недостаточно, чтобы делать статистические выводы с необходимым уровнем достоверности. С другой стороны, развит богатый аппарат для перехода от нечётких оценок к обычным числам, что обеспечивает возможность формирования портфеля проектов на основе их нечётких оценок путём ранжирования проектов или решения соответствующей задачи математического программирования. Гибкость и мощность методов теории нечётких множеств позволяют рассматривать их как перспективное и эффективное средство для решения различных задач управления проектами.

Литература

1. Buckley, J.J. (1987) “The fuzzy mathematics of finance”, Fuzzy Sets and Systems, 21, pp. 257–273.
2. Chui, Y.C. and Chan, S.P. (1994) “Fuzzy cash flow analysis using present worth criterion”, Engineering Economist, 39, pp. 113–138.
3. Kuchta, D. (2000) “Fuzzy capital budgeting”. Fuzzy Sets and Systems, 111, pp. 367–385.
4. Kahraman, C., Ruan, D., Tolga, E. (2002) “Capital budgeting techniques using discounted fuzzy versus probabilistic cash flows”. Information Sciences, 142, pp. 57–76.
5. Mohanty, R. P., Agarwal, R., Choudhury, A. K. and Tiwari, M. K. (1994) “A fuzzy ANP-based approach to R&D project selection: a case study”, Int. J. Production Research, 43, pp. 5199 – 5216
6. Dimova L., Sevastianova P., Sevastianov D. (2006) “MCDM in a fuzzy setting: Investment projects assessment application”. Int. J. Production Economics, 100, pp. 10–29
7. Mohamed, S., McCowan, A.K. (2001) “Modelling project investment decisions under uncertainty using possibility theory”. Int. J. Project Management, 19, pp. 231–241.
8. Liang, G.S. and Wang, M.J. (1991) “A fuzzy multi criterion decision making for facility site selection”. International Journal of Production Research, 29, pp. 2313–2330.
9. Chan, D.Y. (1996) “Application of extent analysis method in fuzzy AHP”. European Journal of Operation Research, 95, pp. 649–655.
10. Lee, J.W. and Kim, S.H. (2000) “Using analytic network process and goal programming for interdependent information system project selection”. Computers & Operations Research, 27, pp. 367–382.
11. Kahraman, C., Cebeci, U. and Ruan, D. (2004) “Multi-attribute comparison of catering service companies using fuzzy AHP: the case of Turkey”. International Journal of Production Economics, 87, pp. 171–184.
12. Lefley, F. and Sarkis, J. (2005) “Applying the FAP model to the evaluation of strategic information technology projects”. International Journal of Enterprise Information Systems, 1, pp. 69–90.
13. Carlsson C., Fuller R. (2001) “On optimal investment timing with fuzzy real options”, in: Proceedings of the EUROFUSE 2001 Workshop on Preference Modelling and Applications, 2001, pp. 235–239.

14. Carlsson C., Fuller R., Majlender P. (2005) “A fuzzy real options model for R&D project evaluation”, in: Y. Liu, G. Chen, M. Ying (Eds.), Proceedings of the Eleventh IFSA World Congress, University Press and Springer, Beijing, 2005, pp. 1650–1654.
15. Wang J., Hwang W.-L. (2007) “A fuzzy set approach for R&D portfolio selection using a real option valuation model”. Omega, 35, pp. 247-257.
16. Inuiguchi M., Ramik J. (2000) “Possibilistic linear programming: a brief review of fuzzy mathematical programming and a comparison with stochastic programming in portfolio selection problem”. Fuzzy Sets and Systems, 111, pp. 3-28.
17. Huang X. (2007) “Optimal project selection with random fuzzy parameters”. Int. J. Production Economics, 106, pp. 513–522
18. Lai, Y.J., Lai, H.C. (1993) “Possibilistic linear programming for managing interest rate risk”. Fuzzy Sets and Systems, 54, pp. 135–146.
19. Iwamura, K., Liu, B. (1998) “Chance constrained integer programming models for capital budgeting in fuzzy environments”. Journal of the Operational Research Society, 49, pp. 854–860.
20. Zadeh, L.A. (1978) “Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility”. Fuzzy Sets and Systems, 1, pp. 3-28.
21. Пытьев Ю.М. Возможность: элементы теории и применения. М.:УРСС, 2000.
22. Дюбуа Д., Прад А. Теория возможностей: приложения к представлению знаний в информатике. М.: Радио и связь, 1990.
23. Geske R. (1979) “The valuation of compound options”. Journal of Financial Economics, 7, pp. 63-81.
24. Perlitz M., Peske T., Schrank R.(1999) “Real option valuation: the new frontier in R&D project evaluation?”. R&D management, 29, pp. 255-269
25. Saaty T. (1990) “How to make a decision: The Analytic Hierarchy Process”. European Journal of Operational Research, 48, pp. 9-26