Экономики с асимметрично информированными агентами: концепция предельной информации*

Валерий МАРАКУЛИН†

1 февраля 2008 г.

Аннотация

В работе вводится и исследуется новое понятие "предельной информации" для моделей экономики типа Эрроу — Дебре с асимметрично информированными индивидами. В основу концепции положен договорной подход, в рамках которого предполагается, что агенты встречаются и образуют коалиции, где происходит обмен продуктами и параллельно идёт обмен информацией. Так в ходе естественного процесса обмена информация индивидов многократно трансформируется и накапливается, а агенты обучаются, достигая предельной информации. Доказано, что для монотонного правила деления информацией предельная информация единственна, т. е. не зависит (инвариантна) от конкретной последовательности коалиций, реализованной в процессе взаимодействия экономических агентов.

Ключевые слова и фразы: экономика обмена, контракт, асимметричная информация, ядро.
JEL Classification: C 62, D 51

Введение

Информация занимает важное место в экономическом анализе: с ней мы сталкиваемся не только тогда, когда говорим о индивидуальном принятии решений, но и тогда, когда идет речь о функционировании рынков или же об экономике в целом.

В частности, информация играет существенную роль в распределении ресурсов, реализуемых через систему рынков. В исходном классическом варианте экономического моделирования информационная проблема не рассматривалась. Предполагалось, что вся экономическая жизнь протекает как бы в отдельно взятом временном периоде, агенты обладают достаточно полной информацией о значении экономических переменных для принятия собственных рациональных решений, сделки осуществляются за бесконечно малое время и т. д. (см., например, [4]). Однако в реальной жизни агенты принимают решения в условиях дефицита информации,

*Исследование выполнено при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ–4999.2006.6).

†Ведущий научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.

причем участники экономики асимметрично информированы о состояниях мира[1]. Информационная асимметрия — это реальная черта экономики, не учтенная классической теорией, которая появляется в современных моделях несовершенных рынков. В экономической теории основной анализ концентрируется на изучении итогового распределения ресурсов, обладающего равновесными свойствами. Но в реальной жизни это распределение является итогом множества сделок обмена между экономическими агентами, при этом далеко не каждая сделка (обмен) осуществима в реальной экономике, по причине, например, информационного дефицита.

В основу анализа в данной работе положен договорной подход. Идея этого подхода и, собственно, понятие договора, как контракта по обмену продуктами (бартерные контракты), принадлежит В. Л. Макарову [8]. В дальнейшем, усилиями работ ряда авторов (см. [6], [7], [9], [10]), развилась теория договоров. С точки зрения автора, этот подход весьма удобен для моделирования ситуаций с асимметрично информированными агентами. Действительно, в рамках договорного подхода важную роль играет понятие допустимости контракта. Ясно, что для корректного описания реальных сделок требуется, как минимум, прояснить, какие договоры (контракты) представляется возможным заключить. Сумма заключённых контрактов и исходного распределения дает распределение ресурсов, которое может обладать или не обладать разными свойствами стабильности: в теории договоров изучаются договорные, правильно договорные, совершенно договорные и проч. распределения, см. [9], а также приводящие к ним договорные процессы, см. [10]. В данной работе нас будет интересовать информационная специфика договорных процессов и вытекающие из неё теоретические выводы. При распространении договорного подхода на модели с асимметричной информацией ключевым является требование измеримости контракта, — как часть требования его допустимости — измеримости относительно алгебры событий, которая задаётся распределением информации среди экономических агентов. Однако распределение информации в экономической среде не статично и изменяется с течением времени в ходе экономического взаимодействия между агентами.

В литературе известны разные требования к измеримости распределения ресурсов. Например, Швальбе [3] рассматривает понятие *максимальной информации* — это наиболее полная информация, которую экономический агент может получить будучи членом всех возможных коалиций, куда он входит со своей начальной информацией. Известны также требования к измеримости относительно частной (исходной) информации (используется Яннелисом) и, например, измеримость относительно самой грубой информации (напр. см. [1], [2]). Можно сказать, что ни одно из этих требований не является вполне удовлетворительным, см. обзор в [3].

Содержательная часть работы посвящена описанию нового понятия — так называемой *предельной информации*. Существенное отличие предельной информации от максимальной заключается в том, что предельная информация учитывает возможность агентов *обучаться* в процессе товарно-информационного обмена. Более того, в "реальной" жизни агент обычно не имеет доступа к максимальной информации и вынужден пользовать менее полной информацией — предельной, т. е. только той, которую ему удаётся обнаружить. Формально, предельная информация это итог информационного обмена, реализованного цепочкой экономического взаимодействия

[1]Состоянием мира или природы являются любые факторы, влияющие на экономические показатели, прежде всего на благосостояние. К состояниям природы могут быть причислены: здоровье отдельно взятого участника, случаи стихийных бедствий, курс валют, и т. д.

индивидов в рамках внутри-коалиционного бартерного обмена продуктами и параллельно идущего обмена информацией. Однако на примерах показано, что в общем случае разные “цепочки” могут приводить к разному распределению информации, которая неулучшаема в результате последующих меновых операций. Поэтому, одним из первых вопросов требующих прояснения, это выявление условий информационного обмена, при которых предельная информация становится однозначно определённой. В работе доказано, что монотонность правила деления информацией влечёт единственность предельной информации и, значит, в данном случае эта концепция становится вполне корректной.

Работа организована следующим образом. Первый раздел посвящен основным понятиям, обозначениям и описанию модели экономики обмена с асимметричной информацией. Во втором разделе рассматриваются вопросы, связанные с распространением договорного подхода на модели экономики с асимметричной информацией: здесь вводится понятие предельной информации и доказывается теорема единственности.

1 Модель экономики с асимметричной информацией

Модели экономики с асимметричной информацией, описанные в литературе к настоящему моменту, грубо можно разделить на две категории (критерием для такого деления послужило определение информации). В экономической теории информацию рассматривали с двух точек зрения. С одной стороны, было замечено, что информация наделена определенными свойствами товара (в обычном, физическом, смысле), и, тем самым, похожа на другие товары: она может быть обменена, куплена или продана на соответствующих рынках информации. С другой стороны, информацию, которой располагает агент, можно рассматривать как характеристику этого агента, аналогичную начальному запасу товаров и отношению предпочтения агента. Ниже описана модель, которая берет в расчет оба аспекта информации одновременно. Описание проводится в соответствии с терминологией, использованной Ульрихом Швальбе в [3], где представлен современный взгляд на проблему асимметричной информированности агентов (и содержится наиболее емкий и доступный материал по данной проблематике).

1.1 Агенты и их информация

Рассмотрим экономику обмена с конечным множеством агентов. Пусть это множество $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$, где $i \in \mathcal{I}$ обозначает отдельного агента. Специфической чертой модели является явным образом введённая информация о состояниях мира (природы), которой обладают агенты, причём в общем случае у разных агентов эта информация различна и может изменяться в процессе их экономической деятельности.

Информация моделируется следующим образом. Рассмотрим измеримое пространство $(\Omega, P(\Omega))$ событий природы. В рамках этого и следующего раздела множество Ω предполагается *конечным*. Элементы $\omega \in \Omega$ называются состояниями природы или состояниями мира, а также элементарными событиями. Здесь $P(\Omega)$ это некоторое разбиение множества Ω. Напомним, что *разбиением* (некоторого) множества Ω

называется любая совокупность его попарно непересекающихся подмножеств, объединение которых есть Ω. Совокупность всех разбиений множества Ω обозначим P^* и пусть Ω^* это разбиение, состоящие из одноэлементных подмножеств Ω. Информация агента $i \in \mathcal{I}$ характеризуется разбиением $P_i \in P^*$. Содержательно, если элемент разбиения состоит из нескольких состояний природы, то это означает, что агент не способен различать эти состояния. Таким способом описывается способность агента различать события.

Пусть $P_i(\omega)$ это элемент разбиения P_i, который содержит состояние $\omega \in \Omega$. Говорят, что информация $P \in P^*$ *лучше (тоньше)* информации $P' \in P^*$, если каждый элемент P является подмножеством некоторого элемента P', то есть $P(\omega) \subseteq P'(\omega), \forall\, \omega \in \Omega$. Содержательно, одна информация тоньше другой, если она способна лучше различать элементарные состояния природы. На множестве P^* всех информационных разбиений Ω отношение "*тоньше*" является отношением частичного порядка и в дальнейшем будет обозначаться как

$$P \succeq P' \iff P \ \textbf{\textit{тоньше}} \ P'.$$

Легко видеть, что на множестве P^* всех разбиений $\succeq$ наводит структуру решётки, т. е. для любого конечного набора разбиений существует супремум и инфимум.

Упорядоченный набор (кортеж) индивидуализированных разбиений $\mathbb{P} = (P_i)_{i \in \mathcal{I}}$ называется ***информационной структурой экономики***.

Отношение $\succeq$, заданное на информационных разбиениях, индуцирует отношение частичного порядка на множестве всех информационных структур, заданное по правилу:

$$\mathbb{P} \succeq \mathbb{P}' \iff P_i \succeq P_i', \quad \forall\, i \in \mathcal{I}.$$

Ниже формулируются некоторые известные определения (напр., см. [3]):

Определение 1.1 *Если $P_i = \Omega^*$, то информационное разбиение P_i агента i называется* ***совершенным*** *или* ***полным****. Информационная структура экономики называется* ***совершенной****, если информация каждого агента совершенна.*

Определение 1.2 *Информационная структура $(P_i)_{i \in \mathcal{I}}$ называется* ***симметричной****, если $P_i = P_j$, $\forall\, i, j \in \mathcal{I}$.*

Определение 1.3 *Информационная структура $(P_i)_{i \in \mathcal{I}}$ называется* ***асимметричной****, если $P_i \neq P_j$ для некоторых $i, j \in \mathcal{I}$, $i \neq j$.*

Ясно, что определение совершенной информации применимо к одному агенту, а понятия симметричной или асимметричной информации определяются как минимум для двух агентов. Также отметим, что если информация совершенная, то она является симметричной, но если информационная структура является асимметричной, то она не может быть совершенной. В общем случае обратное неверно.

1.2 Товары, агенты и потребительские планы

Номенклатуру физических продуктов (товаров) в экономике обозначим $L = \{1, 2, \ldots, l\}$. Таким образом, пространство физических продуктов это $E = \mathbb{R}^L$, то

есть l-мерное евклидово пространство. При реализации разных событий индивиды могут потреблять разные наборы физических (контингентных) продуктов. Пространство контингентных продуктов это $\mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}^L)$ — множество всех отображений из пространства элементарных событий Ω в $\mathbb{R}^L$.

Пусть $P \in P^*$ некоторое разбиение Ω. Функция f с областью определения Ω называется *P-измеримой*, если она является постоянной[2] на элементах разбиения P. Для $P \in P^*$ введем множество

$$\mathbf{Map}_P(\Omega, \mathbb{R}^L) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}^L \mid f|_{P(\omega)} = const\},$$

это подпространство $\mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}^L)$ всех P-измеримых отображений.

Отличительная черта подхода Швальбе [3] состоит в том, что информация рассматривается как составная часть продуктового набора. При этом неопределенность моделируется следующим образом: товар, кроме места и времени, в котором он потребляется, определяется также состоянием природы (мира).

Так как физические товары рассматриваются в своей взаимосвязи с состояниями мира, естественно постулировать, что пространство допустимых товаров зависит от информации. В этой связи возникает *обобщенное пространство товаров* $\mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}^L) \times P^*$. В этом пространстве товары представлены упорядоченной парой, компонентами которой являются набор (вектор) физических контингентных товаров и информация. Таким образом, информация включается в определение товара.

Чтобы проиллюстрировать эту идею, рассмотрим следующий пример. Пусть имеется два различных состояния природы ω_1, ω_2:

ω_1 — агент i инфицирован,

ω_2 — агент i не инфицирован.

Рассмотрим два варианта информации, которой может располагать агент i:

$P_i = \{\{\omega_1, \}, \{\omega_2\}\}$ — агент различает данные состояния.

$P_i' = \{\{\omega_1, \omega_2\}\}$ — агент не различает данные состояния.

Предположим, что есть лекарство, которым можно вылечить болезнь агента. Очевидно, что лекарственное средство при наличии информации P_i не является таким же товаром, как при наличии информации P_i'.

Итак, каждый участник $i \in \mathcal{I}$ характеризуется начальным запасом $(e_i, P_i^0) \in \mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}^L) \times P^*$, где $e_i \in \mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}^L)$ обозначает начальные запасы возможных товаров агента i, а P_i^0 — начальный запас информации (разбиение Ω). Для простоты будем также предполагать, что индивиды способны потреблять физические продукты только в неотрицательных количествах и, при этом, $e_i \geq 0$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$.

Потребительское множество агента $i \in \mathcal{I}$ определяется следующим образом:

$$X_i := \{(x, P) \in \mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}^L_+) \times P^* \mid x - e_i \in \mathbf{Map}_P(\Omega, \mathbb{R}^L)\}.$$

Очевидно, что $(e_i, P_i^0) \in X_i$ (Так как $e_i - e_i = 0$ совместим с любой информацией, то $X_i \neq \emptyset$).

Потребительский план агента i представляет собой упорядоченную пару (x_i, P_i), где первая компонента $x_i \in \mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}^L_+)$ есть потребительский план, а вторая обозначает информацию агента. Потребительское множество агента состоит из всех потребительских планов, которые реализуются сетью контрактов, совместимых с

[2]Для конечной алгебры событий это определение эквивалентно стандартному.

информацией P_i. Отметим, что все это верно для любого P_i. То есть, план (x, P) для произвольного P принадлежит потребительскому множеству, если $(x - e_i)$ является постоянным отображением на элементах множества P. Агент не может потреблять товары независимо от его информации. То есть, если агент не различает два состояния мира, то потребительский план, реализуемый какой-либо сетью контрактов, и отличающийся в этих состояниях природы, не будет лежать в потребительском множестве.

Важно отметить, что во всех ранних моделях информация рассматривается лишь как ограничение на потребительское множество, в данной же модели информация является частью потребительского множества.

Набор, состоящий из потребительских планов агентов $((x_i, P_i))_{i\in\mathcal{I}}$, где $(x_i, P_i) \in X_i$, называется ***состоянием экономики***.

1.3 Коалиции и правила деления информации

Непустые подмножества множества $\mathcal{I}$ называются *коалициями*. Множество коалиций в экономике обозначается $C := 2^{\mathcal{I}} \setminus \{\emptyset\}$.

Предполагается, что члены коалиции способны обмениваться собственным опытом, то есть изменять свою индивидуальную информацию. Перераспределение начальных запасов агентов выполняется на основе этой модифицированной информации. Рассмотрим процесс обмена информации между агентами, вступившими в коалицию.

Обмен информацией описывается информационным правилом, которое является заданным модельным параметром. Так как каждый член коалиции обладает некоторой информацией, то, говоря о информации агентов в коалиции, можно мыслить себе её как набор информации. Информационное правило ставит в соответствие каждой коалиции и каждому набору (частной) информации в этой коалиции новый набор информации. При этом компонента i нового набора обозначает информацию, которую член коалиции с номером i может использовать в рамках коалиционной деятельности.

Определение 1.4 ***Информационное правилом коалиции*** *$S \subseteq \mathcal{I}$ называется отображение $k_S : (P^*)^S \to (P^*)^S$, удовлетворяющее $k_{\{i\}}(P) = P$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$, $P \in P^*$.*

Информационное ***правило экономики*** *это $(2^{|\mathcal{I}|} - 1)$-мерный кортеж отображений $k = (k_S)_{S\in C}$, где каждой коалиции S соответствует свое информационное правило k_S.*

Содержательно это можно выразить так. Член коалиции $i \in S$ с информацией P_i после присоединения к коалиции S имеет доступ к информации $P_i' = k_S^i((P_j)_{j\in S})$ — это компонента i (проекция) отображения k_S, вычисленная в “точке” $P_S = (P_i)_{i\in S}$. При этом в одноэлементных коалициях изменение информации не происходит (не с кем обмениваться).

В дальнейшем анализе иногда будет удобно считать, что отображения k_S, $S \in C$ определены на множестве всех информационных структур. В таком случае, без дополнительного напоминания мы всегда будем предполагать, что информация агентов, не попавших в данную коалицию, остаётся неизменной.

Итак, результатом применения информационного правила является новая информация, которую агенты могут использовать для перераспределения начальных запасов в рамках данной коалиции.

Определение 1.5 *Информационное правило* $k = (k_S)_{S \in C}$ *называется* ***правилом деления информации****, если* $k_S((P_i)_{i \in S})$ *лучше* $(P_i)_{i \in S}$ *для каждого* $(P_i)_{i \in \mathcal{I}}$, $\forall\, S \in C$.

Пусть $\Re$ обозначает множество всех правил деления информации. Рассмотренное выше на множестве всех разбиений Ω отношение частичного порядка $\succeq$ ("лучше чем") индуцирует на $\Re$ следующее бинарное отношение:

Пусть k и κ любые два правила деления информации. Скажем, что k *лучше* чем κ, если $k^i_S((P_j)_{j \in S})$ лучше $\kappa^i_S((P_j)_{j \in S})$ для любой коалиции $S \subseteq \mathcal{I}$, любого агента $i \in S$ и любого набора $P_S = (P_i)_{i \in S}$. Для краткости полагаем:

$$k \ \textbf{\textit{лучше}} \ \kappa \iff k \succeq \kappa.$$

Отношение $\succeq$ рефлексивно, транзитивно, но не полно. Таким образом, множество $\Re$ есть частично упорядоченное множество с порядком $\succeq$[3].

Приведём далее ряд известных терминологических определений, см. [3].

Информационное правило называется ***симметричным***, если для любой коалиции $S \subseteq \mathcal{I}$ и любых двух агентов $i, j \in S$ выполняется $k^i_S((P_j)_{j \in S}) = k^j_S((P_i)_{i \in S})$. То есть, результате применения данного информационного правила все члены коалиции располагают одинаковой информацией.

Правило деления информации называется ***плотным***, если для каждого $i \in \mathcal{I}$ и любых S, T, таких, что $i \in S \subset T$ выполняется $k^i_T((P_j)_{j \in T}) \succeq k^i_S((P_j)_{j \in S})$. Другими словами, это означает, что если коалиция увеличивается в размере, то информация каждого члена коалиции может только улучшиться.

Правило деления информации называется ***ограниченным***, если для каждого $i \in \mathcal{I}$ и любого S выполняется: $k^i_{\mathcal{I}}((P_j)_{j \in \mathcal{I}}) \succeq k^i_S((P_j)_{j \in S})$. Определение ограниченности информационного правила получается из определения плотности, примененного к коалиции, состоящей из всех агентов. Очевидно, что из плотности следует ограниченность, однако обратное неверно.

Далее приведем несколько известных в литературе примеров, поясняющих понятие информационного правила:

Пример 1.1 Самое грубое информационное правило $k^c := (k^c_S)_{S \in C}$ определяется так: $k^c_S((P_i)_{i \in S}) = (P^c_S)_{i \in S}$, где $P^c_S := \bigwedge\limits_S P_i$ для любой коалиции S.

Здесь $\bigwedge\limits_S P_i$ обозначает самое тонкое разбиение, полученное из набора информации $(P_i)_{i \in S}$ при условии, что для любой информации P_i каждый элемент P_i является подмножеством некоторого элемента из разбиения $\bigwedge\limits_S P_i$. Таким образом, $\bigwedge\limits_S P_i$ это инфимум разбиений P_i, $i \in S$. $\square$

Самое грубое информационное правило описывает ситуацию, где члены коалиции не способны обмениваться информацией и данное правило не является правилом деления информации. В меновой сделке возможны только те распределения, которые измеримы относительно самой грубой информации. Другими словами, когда происходит сделка между членами коалиции, все агенты должны в целом понимать то о чем идет речь, то есть должны различать значимые для сделки события.

[3] Ясно, что $\succeq$ можно рассматривать не только для правил деления информации, но и на более широком классе всех информационных правил.

Отметим, что изложенное выше не является требованием того, чтобы агенты забывали их начальную информацию при присоединении к коалиции. Однако, может случится так, что агенты будут не в состоянии использовать в полной мере свою начальную информацию при заключении сделки. Самое грубое информационное правило симметрично, но не является ни плотным, ни ограниченным.

Пример 1.2 Самое тонкое информационное правило $k^f := (k^f_S)_{S\in C}$ определяется так: $k^f_S((P_i)_{i\in S}) = (P^f_S)_{i\in S}$, где $P^f_S := \bigvee\limits_{i\in S} P_i$ для любой коалиции S, где $\bigvee\limits_S P_i$ это супремум информационных разбиений: $(\bigvee\limits_S P_i)(\omega) := \bigcap\limits_{i\in S} P_i(\omega)\ \forall\, \omega \in \Omega$. □

Самое тонкое информационное правило описывает ситуацию, где члены коалиции могут обмениваться своей информацией полностью. Получается эта информация так: берем информацию у каждого члена коалиции и по этому набору строим разбиение, которое является самым грубым из разбиений, которые тоньше каждого индивидуального разбиения у членов коалиции: это и будет самой лучшей информацией. В данном случае информация, которую использует каждый член коалиции для перераспределения ресурсов, будет не хуже, чем его индивидуальная информация. Отметим, что самое тонкое правило деления информации симметрично, плотно и ограничено.

Пример 1.3 Личное (частное) информационное правило $k^p := (k^p_S)_{S\in C}$ определяется так: $k^p_S((P_i)_{i\in S}) = (P_i)_{i\in S}$ для любой коалиции S , то есть $k^p_S = Id$ для любой коалиции S. □

Итак, это правило не меняет информацию членов коалиции: для каждого агента она не убывает и ни прибывает.

Пример 1.4 Особый случай информационного правила — это нулевое информационное правило. Независимо от начальной информации агентов, это правило присваивает каждому члену коалиции информацию $P_i = \{\Omega\}$. □

1.4 Допустимые распределения

Определение распределения имеет важное значение для рассмотрения ядра экономики. Безусловно, допустимые состояния экономики (которые мы и будем называть распределениями) должны быть, по крайней мере, физически возможными. Однако, если рассматривается экономика с асимметричной информацией, то определение допустимости должно также учитывать начальную информацию агентов и правило деления информации, которое действует в этой модели.

В литературе имеется два наиболее значимых определения (допустимого) распределения. Первое из них предложил Яннелис, который называет допустимыми те распределения, которые совместимы с начальной информацией агентов. Таким образом, по Яннелису возможность информационного обмена между агентами не принимается во внимание. Второе появляется в работах Аллен (см., напр., [1], [2]), где при определении допустимых распределений учитывается не только наличная информация агентов, но и информационный обмен. В качестве допустимых Аллен рассматривала распределения, которые измеримы относительно информации агентов, доступной всем членам экономики, то есть относительно самой грубой информации. У этих определений имеются явные недостатки. В определении Яннелиса,

очевидно, что множество допустимых распределений никоим образом не зависит от правила деления информации, хотя интуитивно понятно, что зависимость должна иметь место. Определение Аллен чрезмерно жесткое по той причине, что может оказаться так, что агенты вообще не смогут использовать никакой информации. В этом случае единственным допустимым распределением может оказаться только начальный запас агентов.

Швальбе, мотивированный вышеуказанными соображениями, вводит понятие *максимальной информации*, которое в дальнейшем используется им в понятии допустимого распределения.

Определение 1.6 ***Максимальной информацией*** *агента $i \in \mathcal{I}$ относительно правила $k = (k_S)_{S \in C}$ называется информация $P_i^m := \bigvee_{S \in C} k_S^i((P_j^0)_{j \in S})$.*

Таким образом, максимальная информация это такая, которую получил бы агент, если был бы в состоянии присоединиться ко всем коалициям одновременно.

Используя понятие максимальной информации, можно дать определение допустимости распределения.

Определение 1.7 *Распределение (состояние) $((x_i, P_i))_{i \in \mathcal{I}}$ называется* ***допустимым****, если $((x_i, P_i))_{i \in \mathcal{I}} \in \mathbf{Map}(\Omega, \mathbb{R}_+^L) \times P^*$ и при этом:*

(i) $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i$,

(ii) $(x_i - e_i) \in \mathbf{Map}_{P_i^m}(\Omega, \mathbb{R}^L)\ \forall\, i \in \mathcal{I}$.

Здесь первое условие отражает физическую допустимость распределения, в то время как второе — информационную допустимость, ибо является требованием измеримости валового контракта (net trade), реализующего распределение.

В следующем разделе вводится новое понятие предельной информации, что позволяет рассмотреть новое понятие допустимого распределения. Отличие состоит в других требованиях к измеримости из пункта (**ii**), теперь это будет уже измеримость относительно предельного информационного разбиения.

2 Предельная информация

2.1 Понятие предельной информации

В предыдущем разделе была описана модель экономики обмена, в которой участники были информированы различно, причем в модели допускался обмен как физическими товарами, так и информацией. В пункте 1.4 обсуждался вопрос о допустимых распределениях вида $((x_i, P_i))_{i \in \mathcal{I}}$. Здесь понятие допустимого распределения, наряду с обычным требованием сбалансированности продуктовых наборов $\sum_{i \in \mathcal{I}} x_i = \sum_{i \in \mathcal{I}} e_i$, включает в себя требование измеримости отображений $(x_i - e_i)$ относительно максимальной информации, т. е. $(x_i - e_i) \in \mathbf{Map}_{P_i^m}(\Omega, \mathbb{R}^L)\ \forall\, i \in \mathcal{I}$. Другими словами, в модели играют роль лишь начальное распределение ресурсов и итоговое. Цепочка обменов товарами и информацией, при помощи которой происходит переход от начального к конечному распределению, осталась за кадром модели: все внимание сосредоточено исключительно на итоговом распределении

товаров. Однако, договорной подход предполагает наличие явно выявленной последовательности меновых сделок. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать именно сделки по обмену товарами и одновременно информацией — контракты. При анализе контрактов наше внимание концентрируется в первую очередь на обмене информацией, но при этом мы не будем забывать, что при сделке также происходит обмен физическими товарами — ведь именно распределение ресурсов является основным предметом дальнейшего анализа.

Уместно дать краткое объяснение тому, что побуждает агентов к раскрытию своей информации. С этой целью обратимся к понятию измеримости контракта. По существу, контракт — это набор $v = (v_i)_{i\in\mathcal{I}}$ отображений $v_i : \Omega \to \mathbb{R}^L$, таких, что $\sum_{i\in\mathcal{I}} v_i = 0$. Кроме того, продуктовый поток v_i должен удовлетворять требованию измеримости относительно соответствующей алгебры событий, отвечающей информированности индивидов. Формально измеримость контракта можно рассматривать относительно любой информации. Однако с содержательной точки зрения наибольший интерес представляют только два варианта измеримости: измеримость контракта относительно индивидуальной информации агентов и измеримость относительно самой грубой информации. Первый случай выражает то, что каждый агент при заключении контракта должен понимать то, что получает он сам; второй вариант требует, чтобы каждый участник экономики понимал, что получают другие агенты. Понятно, что в обоих случаях чем тоньше информация, тем слабее требование измеримости, и, следовательно, шире множество допустимых распределений. Поэтому, для расширения пространства допустимых распределений, агенты соглашаются на информационный обмен.

Одна из наших целей состоит в том, чтобы понять, какого сорта информационное оснащение может теоретически сложиться у агентов, участвующих в сделках по обмену. Здесь возможны разные варианты и выше приводились примеры информационных правил и информации, которая получалась в результате применения этих правил (самая тонкая информация, самая грубая, личная и т. д.). В том числе было введено понятие максимальной информации P_i^m, $i \in \mathcal{I}$, которое можно использовать для любого информационного правила. По нашему мнению, недостаток концепции максимальной информации состоит в том, что она далека от жизненных реалий, ибо неясно, почему агент каждый раз, когда вступает в новую коалицию, может использовать только свою начальную информацию. На самом деле, агент, вероятно, располагает более полной информацией, полученной им из опыта уже совершенных сделок. Понятие, учитывающее фактор памяти и обучаемости индивидов мы называем *предельной информацией* — точное определение дается ниже.

Определение 2.1 *Информация называется* ***предельной****, если существует последовательность коалиций такая, что информация, образовавшаяся на последней стадии обмена между агентами, далее остается неизменной (неулучшаема) в коалиционном процессе информационного обмена для каждого из агентов.*

Отметим, что понятие предельной информации предполагает, что в каждом акте деления информацией агенты способны использовать информацию, полученную ими ранее из предыдущих обменов. Таким образом, информация может накапливаться, а агенты — обучаться[4].

Формально, информация $\mathbb{P}^{lim} = (P_i^{lim})_{i\in\mathcal{I}}$ является предельной, если существует (конечная) цепь коалиций $S_1, S_2, \ldots, S_m \subseteq \mathcal{I}$, $m \in \mathbb{N}$, такая, что:

[4]Это скорее “eductive learning” и “rational learning”, а не “adaptive learning”.

(i) $P_i^\xi = k^i_{S_\xi}((P_j^{\xi-1})_{j\in S_\xi})$, $i \in S_\xi$, $P_i^\xi = P_i^{\xi-1}$, $i \in \mathcal{I} \setminus S_\xi$, $\xi = 1, 2, \ldots, m$;

(ii) $\forall\, S \subseteq \mathcal{I}$, $\forall\, i \in S$, $k^i_S((P_j^m)_{j\in S}) = P_i^m = P_i^{lim}$.

Таким образом, предполагается, что индивиды участвуют в итерационном процессе обмена информацией, который задаётся информационным правилом и некоторой последовательностью коалиций. Здесь сначала обмен информацией происходит между членами коалиции S_1, в соответствии с информационным правилом k_{S_1}, а информация не попавших в неё агентов на этом этапе не изменяется. На 2-м этапе обмен информацией происходит только между членами коалиции S_2, причём в этом обмене могут участвовать и агенты, изменившие на первом этапе свою информацию, но тогда они вступают в информационный обмен уже с новой информацией. И так далее, до тех пор, пока информационный обмен не прекратится.

Понятие предельной информации инициирует ряд вопросов, выявляющих её свойства. В их числе:

a) Единственна ли предельная информация? Если нет, то при каких условиях правилу деления информации (или просто информационному правилу) соответствует единственная предельная информация?

b) Имеется ли фактическое различие между двумя формально разными понятиями предельной и максимальной информации? Может быть предельная и максимальная информация это по-разному определенный, но один и тот же объект?

Далее будут рассмотрены примеры, показывающие, что предельная информация действительно отличается от максимальной, а затем будет прояснён вопрос единственности.

2.2 Допустимые распределения и единственность

Напомним, что на каждом этапе происходит не только информационный, но и товарный обмен, который в конечном счете приводит к итоговому распределению. Поэтому целесообразно ввести определение допустимых распределений, опираясь именно на предельную информацию.

Обозначим предельную информацию агента i через P_i^{lim}. Если n — число участников в экономике, то кортеж $\mathbb{P}^{lim} = (P_1^{lim}, P_2^{lim}, \ldots, P_n^{lim})$ называется *предельной информационной структурой экономики.*

Определение 2.2 *Распределение* $((x_i, P_i))_{i\in\mathcal{I}}$ *называется предельно допустимым, если:*

(i) $\sum\limits_{i\in\mathcal{I}} x_i = \sum\limits_{i\in\mathcal{I}} e_i$,

(ii) $(x_i - e_i) \in \mathbf{Map}_{P_i^{lim}}(\Omega, \mathbb{R}^L)\ \forall\, i \in \mathcal{I}$.

Отметим, что, по-видимому, понятие предельно допустимого распределения можно корректно использовать только в случае единственности предельной информации. Однако описанный ниже пример 2.1 демонстрирует, что единственность не всегда имеет место. Другими словами, предельная информация может зависеть от цепи коалиций, из которой образовывалась предельная информация. Кроме того, пример

2.1 совместно с примером 2.2 показывают, что предельная информация может быть как тоньше, так и грубее максимальной[5].

Пример 2.1 Рассмотрим 4 состояния природы $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ и 3 агента с начальной информацией:

$$P_1^0 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \quad P_2^0 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}, \quad P_3^0 = \{\{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}\}.$$

Обозначим коалиции: $S_1 = \{1, 2\}, S_2 = \{1, 3\}, S_3 = \{2, 3\}, S_4 = \{1, 2, 3\}$.

Правило деления информации для коалиции $S \subseteq \mathcal{I}$***:*** *В коалиции S происходит акт деления информации, если в S найдется агент и элемент $\widetilde{\omega} \subset \Omega$ его информационного разбиения такой, что у* ***каждого*** *члена коалиции существует элемент разбиения,* ***целиком*** *содержащий событие $\widetilde{\omega}$. Далее все агенты коалиции S наделяются способностью различать событие $\widetilde{\omega}$ и, если это возможно, может произойти следующий акт деления информацией (в рамках заданной итерации) и т. д. Если указанные условия не выполнены, то обмен информацией не происходит.*

Отметим, что если индивид умеет различать события $\widetilde{\omega} \subset \Omega$, $\widetilde{\widetilde{\omega}} \subset \Omega$, и при этом $\widetilde{\omega} \subset \widetilde{\widetilde{\omega}}$, то этот индивид также способен различать событие $\widetilde{\widetilde{\omega}} \setminus \widetilde{\omega}$.

Содержательно, описанное правило означает следующее. Если существует такой член коалиции S, который осознает, что он способен различать событие $\widetilde{\omega}$, а все прочие члены S способны различать более широкие события, чем $\widetilde{\omega}$, то данный агент инициирует деление информации. Агент передает способность различать это событие прочим индивидам. Передавая свои знания другим участникам, этот агент рассчитывает получить от них новую информацию, сразу или, возможно, в дальнейших итерациях деления информацией (в других коалициях).

Пусть агент 1 вступил сначала в коалицию $S_1 = \{1, 2\}$. Тогда его информация P_1^1 (верхний индекс это номер итерации) будет равна $\{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4\}\}$. Очевидно, что эта информация неулучшаема в дальнейшем процессе коалиционного обмена и, следовательно, является предельной.

Рассмотрим другую возможную последовательность коалиций. Пусть агент 1 вступил сначала в коалицию $S_2 = \{1, 3\}$. Тогда его информация P_1^1 определяется как $\{\{\omega_1, \omega_3\}, \{\omega_2, \omega_4\}\}$. Опять-таки, эта информация является предельной.

Наконец, заметим, что $P_1^m = \{\{\omega_1\}, \{\omega_3\}, \{\omega_2\}, \{\omega_4\}\}$, т. е. в данном примере максимальная информация первого индивида тоньше любой из предельных. □

Нижеследующий пример показывает, что предельная информация может быть тоньше максимальной.

Пример 2.2 Рассмотрим 8 состояний природы $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$ и 3 агента с начальной информацией:

$P_1^0 = \{\{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4, \omega_6\}, \{\omega_5, \omega_7, \omega_8\}\}$,
$P_2^0 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}, \{\omega_7, \omega_8\}\}$,
$P_3^0 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_8\}, \{\omega_4, \omega_5\}, \{\omega_6, \omega_7\}\}$.

Пусть используется правило деления информации из предыдущего примера, и применяется та же нумерация коалиций.

[5]Правило деления информацией и примеры 2.1, 2.2 были построены А. Кадыровой [5].

Далее сначала рассмотрим максимальную информацию $\mathbb{P}^m$. По определению, для индивида 1 имеем:

$$P_1^m = \bigvee_{S \ni 1} k_S^1(P^0) = k_{S_1}^1(P_1^0, P_2^0) \vee k_{S_2}^1(P_1^0, P_3^0) \vee k_{S_4}^1(P_1^0, P_2^0, P_3^0),$$

где

$k_{S_1}^1(P_1^0, P_2^0) = \{\{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4, \omega_6\}, \{\omega_5\}, \{\omega_7, \omega_8\}\}$,
$k_{S_2}^1(P_1^0, P_3^0) = \{\{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4, \omega_6\}, \{\omega_5, \omega_7, \omega_8\}\}$,
$k_{S_4}^1(P_1^0, P_2^0, P_3^0) = \{\{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4, \omega_6\}, \{\omega_5, \omega_7, \omega_8\}\}$.

В итоге имеем:

$$P_1^m = \{\{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4, \omega_6\}, \{\omega_5\}, \{\omega_7, \omega_8\}\}.$$

Далее найдём возможную (как вариант) предельную информацию. Пусть сначала активна коалиция $S_1 = \{1, 2\}$. Получим:

$P_1^1 = k_{S_1}^1(P_1^0, P_2^0) = \{\{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_1, \omega_4, \omega_6\}, \{\omega_5\}, \{\omega_7, \omega_8\}\}$,
$P_2^1 = k_{S_1}^2(P_1^0, P_2^0) = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_6\}, \{\omega_5\}, \{\omega_7, \omega_8\}\}$,
$P_3^1 = P_3^0 = \{\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_8\}, \{\omega_4, \omega_5\}, \{\omega_6, \omega_7\}\}$.

Далее пусть активна коалиция $S_2 = \{1, 3\}$. Имеем:

$P_1^2 = k_{S_2}^1(P_1^1, P_3^1) = \{\{\omega_1, \omega_6\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_7, \omega_8\}\}$,
$P_2^2 = P_2^1 = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_4, \omega_6\}, \{\omega_5\}, \{\omega_7, \omega_8\}\}$,
$P_3^2 = k_{S_2}^3(P_1^1, P_3^1) = \{\{\omega_1, \omega_8\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_6, \omega_7\}\}$.

Пусть опять активна коалиция $S_1 = \{1, 2\}$. Имеем:

$P_1^3 = k_{S_1}^1(P_1^2, P_2^2) = \{\{\omega_1, \omega_6\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_7, \omega_8\}\}$,
$P_2^3 = k_{S_1}^2(P_1^2, P_2^2) = \{\{\omega_1, \omega_2\}, \{\omega_3, \omega_6\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_7, \omega_8\}\}$,
$P_3^3 = P_3^2 = \{\{\omega_1, \omega_8\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_6, \omega_7\}\}$.

Легко видеть, что дальнейший процесс внутри-коалиционного деления информацией идти не может (стабилизировался). В итоге для агента 1 имеем:

$$P_1^{lim} = \{\{\omega_1, \omega_6\}, \{\omega_2, \omega_3\}, \{\omega_4\}, \{\omega_5\}, \{\omega_7, \omega_8\}\}.$$

Таким образом, предельная информация P_1^{lim} агента 1 тоньше его максимальной информации P_1^m. Итак, в этом примере предельная информация грубее самой тонкой информации (совершенной) и тоньше максимальной информации, то есть находится в промежутке между ними. □

Конечно, определённые варианты применения предельной информации имеются и в случае её неединственности. Скажем, можно рассматривать такой сценарий для определения ядра. Коалиция доминирует распределение если после разрыва всех договоров найдется такая (новая) цепочка коалиций, в которой индивиды заключают взаимовыгодные договоры и обмениваются информацией так, что в итоге реализуется распределение, которое “лучше” для членов данной коалиции. Однако в этом сценарии не понятно, что произошло с информацией индивидов. Они все забыли? Но тогда как они могут сравнить новое распределение со старым?.. Кроме того, можно рассмотреть максимально-предельную информацию, которая вычисляется как супремум всех предельных информаций... Однако и здесь нет ясности с экономической интерпретацией.

2.3 Признак единственности

В предыдущем разделе было отмечено, что для корректного применения концепции предельной информации нужно выявить условия её единственности, т. е. условия, при которых она не зависит от порядка коалиций в последовательности меновых сделок. Ниже будет сформулировано достаточное условие для того, чтобы предельная информация была единственная. Оказывается, для каждого *монотонного* правила деления информации предельная информация единственная.

Определение 2.3 *Информационное правило $k = (k_S)_{S \subseteq \mathcal{I}}$* ***монотонно****, если для каждой (непустой) коалиции $S \subseteq \mathcal{I}$, и любых информационных структур из $\mathbb{P} \succeq \mathbb{P}'$ следует, что $k_S(\mathbb{P}) \succeq k_S(\mathbb{P}')$.*

Другими словами, информационное правило монотонно, если для каждой коалиции оно сохраняет отношение частичного порядка на множестве всех информационных структур с их естественным упорядочиванием. Здесь будет уместно отметить один важный момент. Не монотонное правило не обязано быть таким, что при некоторых $\mathbb{P} \succ \mathbb{P}'$, для некоторой коалиции S имеет место $k_S(\mathbb{P}) \prec k_S(\mathbb{P}')$. Отношение $\succeq$ это всего лишь *частичное* упорядочивание на множестве информационных структур, т. е. существуют несравнимые структуры. Для не монотонного правила для некоторой коалиции S и пары информационных структур имеет место $\mathbb{P} \succ \mathbb{P}'$ & $k_S(\mathbb{P}) \not\succeq k_S(\mathbb{P}')$, что неэквивалентно предыдущему. Ситуацию иллюстрирует правило из примера 2.1, где $\mathbb{P}' = k_{S_1}(\mathbb{P}^0) \succ \mathbb{P}^0$, но при этом $k_{S_2}(\mathbb{P}') \not\succeq k_{S_2}(\mathbb{P}^0)$ и $k_{S_2}(\mathbb{P}') \not\preceq k_{S_2}(\mathbb{P}^0)$ одновременно, т. е. структуры, полученные с помощью правила деления информации, несравнимые.

Теорема 2.1 (единственности) *Если правило* ***деления информации*** *$k \in \Re$* ***монотонно****, то предельная информационная структура $\mathbb{P}^{lim}$, полученная по правилу k, единственная.*

Доказательство. Пусть $\alpha = \{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$ и $\beta = \{T_1, T_2, \ldots, T_q\}$ две произвольные последовательности коалиций, генерирующие, по определению 2.1, две предельные информации $\mathbb{P}^{lim}_\alpha$ и $\mathbb{P}^{lim}_\beta$, соответственно. Покажем, что $\mathbb{P}^{lim}_\alpha = \mathbb{P}^{lim}_\beta$.

Действительно, по определению 1.5 для любого правила деления информацией имеем:

$$\mathbb{P}^0 \preceq k_{S_1}(\mathbb{P}^0) = \mathbb{P}^1_\alpha \preceq k_{S_2}(\mathbb{P}^1_\alpha) = \mathbb{P}^2_\alpha \preceq \ldots \preceq k_{S_r}(\mathbb{P}^{r-1}_\alpha) = \mathbb{P}^r_\alpha = \mathbb{P}^{lim}_\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}^0 \preceq \mathbb{P}^{lim}_\alpha.$$

Последовательно применяя монотонность правила и определение предельной информации, заключаем

$$\mathbb{P}^1_\beta = k_{T_1}(\mathbb{P}^0) \preceq k_{T_1}(\mathbb{P}^{lim}_\alpha) = \mathbb{P}^{lim}_\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}^2_\beta = k_{T_2}(\mathbb{P}^1_\beta) \preceq k_{T_2}(\mathbb{P}^{lim}_\alpha) = \mathbb{P}^{lim}_\alpha \ldots \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}^{q-1}_\beta = k_{T_{q-1}}(\mathbb{P}^{q-2}_\beta) \preceq k_{T_{q-1}}(\mathbb{P}^{lim}_\alpha) = \mathbb{P}^{lim}_\alpha \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}^{lim}_\beta \preceq \mathbb{P}^{lim}_\alpha.$$

Рассуждая аналогичным образом, но сначала в отношении последовательности β, а уже потом α, находим $\mathbb{P}^{lim}_\beta \succeq \mathbb{P}^{lim}_\alpha$. Следовательно, $\mathbb{P}^{lim}_\beta = \mathbb{P}^{lim}_\alpha$. Теорема 2.1 доказана. $\square$

Очевидно, что предельная информация существует (так как Ω конечно), однако как её найти в конкретной модели? Ответ на этот вопрос даёт следующий алгоритм[6].

Рассмотрим произвольную конечную последовательность коалиций

$$\pi = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$$

такую, что она содержит *все* возможные коалиции. Пусть k произвольное правило деления информации, удовлетворяющее свойству монотонности.

Алгоритм получения предельной информации: *Применим правила k_{S_ξ}, $\xi = 1, 2, \ldots, m$, начиная с $\mathbb{P}^0$, последовательно, в порядке π. Как только в одной из коалиций последовательности π был инициирован и завершен информационный обмен, возвращаемся к началу последовательности π, которую далее применяем к новой начальной информации, полученной в результате её деления на предыдущем этапе. Работа алгоритма заканчивается, как только последовательность π пройдена полностью и информационный обмен не был инициирован ни в одной коалиции. Таким способом, за конечное число итераций придём к предельной информации $\mathbb{P}^{lim}$.*

В силу теоремы 2.1 очевидно, что указанный алгоритм действительно даёт предельную информацию. Конечно, можно предложить и другие алгоритмы, подобные изложенному выше.

3 Бесконечное множество элементарных событий

В этом разделе мы рассмотрим обобщение простейшей модели экономики с асимметрично информированными агентами на случай *бесконечного* множества Ω.

Если Ω бесконечное множество, то моделировать информацию агента посредством разбиения множества Ω будет неправильно: за пределами анализа остаются многие интересные случаи. Поэтому далее под информацией индивида мы будем понимать всю σ-алгебру событий, которые индивид способен различать. Итак, пусть $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}_i(\Omega)$ это σ-алгебра событий различимых агентом i и пусть $(\Omega, \mathcal{A}_i(\Omega))$ его измеримое пространство, т. е. информация индивида i. Информационная структура экономики это кортеж $\mathbb{A} = (\mathcal{A}_i)_{i \in \mathcal{I}}$.

Все рассмотренные выше базовые понятия переносятся на случай бесконечного множества элементарных событий непосредственно, без принципиальных затруднений. Поэтому далее мы укажем только на некоторые случаи, требующие специальной договорённости.

Отношение частичного порядка $\succeq$, заданное выше на множестве всех разбиений Ω, переносится на случай бесконечного множества Ω по правилу:

$$\mathcal{A} \succeq \mathcal{A}' \iff \mathcal{A} \supseteq \mathcal{A}'.$$

Легко видеть, что в случае конечного множества состояний природы данное определение эквивалентно отношению “тоньше” на разбиениях.

[6]Этот алгоритм, а также основанное на нём доказательство теоремы единственности (отличное от приведённого выше) были построены М. Предтеченским, защитившим в 2005 г. диплом бакалавра на ММФ НГУ под моим научным руководством.

Подобно конечному случаю, отношение $\succeq$ распространяется на информационные структуры:

$$\mathbb{A} \succeq \mathbb{A}' \iff \mathcal{A}_i \supseteq \mathcal{A}'_i \; \forall\, i \in \mathcal{I}.$$

Теперь уже можно рассмотреть такие понятия как правило деления информации и монотонные информационные правила — это совершенно аналогично случаю конечного множества состояний природы. Более того, понятие достижимого распределения также напрямую переносится с конечного случая на бесконечный (конечно, нужно применять правильное понятие измеримого отображения). Рассмотрим далее понятие предельной информации.

Содержательно понятие предельной информации сохраняет свой смысл и в случае бесконечного числа состояний природы. Однако его формализация требует коррекции. Именно, в конечном случае предельная информация строилась по конечной цепочке коалиций. В бесконечном случае необходимо применять бесконечную последовательность причём такую, что после *каждого появления* какой-либо *коалиции* в последовательности *каждая из коалиций появляется в дальнейших реализациях.* Другими словами, процесс материального и информационного обмена идёт бесконечно, и, если есть какая-то возможность обмена информацией в какой-либо коалиции, то она должна быть реализована.

Определение 3.1 *Пусть $\pi = (S_1, S_2, \ldots, S_\xi, \ldots)_{\xi=1,2,\ldots}$ последовательность коалиций такая, что для каждого $\xi = 1, 2, \ldots$, и каждой $S \subseteq \mathcal{I},\ S \neq \emptyset$ найдётся $\xi' \geq \xi$ такой, что $S_{\xi'} = S$. Тогда предельная информация относительно π находится из условий:*

(**i**) $\mathcal{A}_i^\xi = k^i_{S_\xi}((\mathcal{A}_j^{\xi-1})_{j\in S_\xi})$, $i \in S_\xi$, $\quad \mathcal{A}_i^\xi = \mathcal{A}_i^{\xi-1}$, $i \in \mathcal{I} \setminus S_\xi$, $\ \xi = 1, 2, \ldots$,

(**ii**) $\mathcal{A}_i^{lim} = \bigvee\limits_{\xi=1}^{\infty} \mathcal{A}_i^\xi$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$.

Отметим, что в этом определении неявно предполагается, что правило $k = (k_s)_{S\in C}$ является правилом деления информации[7], т. е. в процессе коалиционного взаимодействия информация может только возрастать. Ясно, что данное определение предельной информации, вообще говоря, зависит от выбранной последовательности коалиций. Однако, как показывает следующая теорема, так же как и в конечном случае, для монотонного правила деления информацией предельная информация единственна.

Теорема 3.1 (единственности) *Если правило **деления информации** $k \in \Re$ **монотонно**, то предельная информационная структура $\mathbb{A}^{lim} = (\mathcal{A}_i^{lim})_{i\in\mathcal{I}}$ единственная, т. е. не зависит от выбора реализующей её последовательности.*

Доказательство. Рассмотрим две произвольные последовательности коалиций, генерирующие, по определению 2.1, две предельные информации $\mathbb{P}_\alpha^{lim}$ и $\mathbb{P}_\beta^{lim}$, соответственно:

$$\alpha = \{S_1, S_2, \ldots, S_\xi, \ldots\}, \qquad \beta = \{T_1, T_2, \ldots, T_\xi, \ldots\}.$$

[7]Понятие предельной информации можно ввести и для информационного правила общего вида, по формуле $\mathcal{A}_i^{lim} = \bigwedge\limits_{m=1}^{\infty} \bigvee\limits_{\xi=m}^{\infty} \mathcal{A}_i^\xi$, $\forall\, i \in \mathcal{I}$ в пункте (**ii**), но в контексте данной работы в этом нет необходимости...

Покажем, что $\mathbb{P}_\alpha^{lim} = \mathbb{P}_\beta^{lim}$.

Действительно, по определению 3.1 последовательности α и β таковы, что существуют монотонные отображения $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ натурального ряда $\mathbb{N}$ в себя, такие, что

$$T_\xi = S_{f(\xi)} \quad \& \quad S_\xi = T_{g(\xi)} \quad \forall\, \xi = 1, 2, \ldots.$$

Кроме того, из монотонности отображений имеем $f(\xi + 1) > f(\xi)$ и $g(\xi + 1) > g(\xi)$, $\forall\, \xi = 1, 2, \ldots$ Другими словами, каждую из последовательностей можно взаимооднозначно вложить в другую с сохранением исходного порядка коалиций.

Далее, применяя итеративно определение правила деления информацией, заключаем $\mathbb{A}^0 \preceq \mathbb{A}_\alpha^{f(1)-1}$, откуда в силу монотонности правила имеем

$$\mathbb{A}_\beta^1 = k_{T_1}(\mathbb{A}^0) \preceq k_{T_1}(\mathbb{A}_\alpha^{f(1)-1}) = k_{S_{f(1)}}(\mathbb{A}_\alpha^{f(1)-1}) = \mathbb{A}_\alpha^{f(1)}.$$

Подобным образом $\mathbb{A}_\alpha^{f(1)} \preceq \mathbb{A}_\alpha^{f(2)-1} \Rightarrow \mathbb{A}_\beta^1 \preceq \mathbb{A}_\alpha^{f(2)-1}$, откуда

$$\mathbb{A}_\beta^2 = k_{T_2}(\mathbb{A}_\beta^1) \preceq k_{T_2}(\mathbb{A}_\alpha^{f(2)-1}) = k_{S_{f(2)}}(\mathbb{A}_\alpha^{f(2)-1}) = \mathbb{A}_\alpha^{f(2)}$$

и т. д. В итоге заключаем

$$\mathbb{A}_\beta^\xi \preceq \mathbb{A}_\alpha^{f(\xi)}, \quad \forall\, \xi = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, в силу (**ii**) определения 3.1, должно быть

$$\mathbb{A}_\beta^{lim} = \bigvee_{\xi=1}^{\infty} \mathbb{A}_\beta^\xi \preceq \bigvee_{\eta=1}^{\infty} \mathbb{A}_\alpha^\eta = \mathbb{A}_\alpha^{lim}.$$

Наконец, меняя в изложенном рассуждении α на β и, применяя вложение g, аналогичным образом заключаем $\mathbb{A}_\beta^{lim} \succeq \mathbb{A}_\alpha^{lim}$ и, следовательно, $\mathbb{A}_\beta^{lim} = \mathbb{A}_\alpha^{lim}$. Теорема 3.1 доказана. □

Заключение

В работе было предложено новое понятие предельной информации, которое можно рассматривать как альтернативу концепции максимальной информации. Доказано, что любое монотонное правило деления информацией влечёт единственность предельной информации. Возможная неединственность предельной информации и её отличие от максимальной показана на содержательных примерах. Осталось неясным, является ли монотонность правила деления информацией необходимым требованием для единственности предельной. Неясно, при каких условиях максимальная информация совпадает с предельной.

Автор уверен, что предложенная концепция предельной информации будет полезна в построении новых и изучении известных моделей экономики, учитывающих информационное наполнение. В частности, это касается модели, описание которой приводится в работе [3].

Список литературы

[1] Allen, B., "Market Games with Asymmetric Information and Nontransferable Utility: Representation Results and the Core", — *University of Pensilvanya, CARESS Working Paper* 91-09, 1991

[2] Allen, B., "Market Games with Asymmetric Information and Nontransferable Utility: Representation Results and the Core", — *University of Pensilvanya, CARESS Working Paper* 91-16, 1991

[3] Schwable, U., "The Core of Economies with Asymmetric Information" — Berlin–Heidelberg-New York, *Springer–Verlag*, 1999

[4] Алипрантис К., Браун Д., Беркёншо О., "Существование и оптимальность конкурентного равновесия" — *пер. с англ., М.: Мир*, 1995, 384 с.

[5] Кадырова А., "Договорной подход в моделях с ассиметрично информированными агентами." — *квалификационная работа бакалавра*, НГУ, 2003

[6] Козырев А. Н., "Договорные и вполне договорные состояния в абстрактной экономике" — *Институт математики СО АН, СССР*, Новосибирск, Препринт № 7, 1982, 44 с.

[7] Козырев А. Н., "Устойчивые системы договоров в экономике чистого обмена" — *Оптимизация*, вып. 29(44), 1981, с. 66-78 (Изд. ИМ СО АН СССР, Новосибирск)

[8] Макаров В. Л., "Экономическое равновесие: существование и экстремальные свойства" — *Итоги науки и техники: Современные проблемы математики.* М.: ВИНИТИ АН СССР, т. 19 (1982), с. 23–58

[9] Маракулин В. М., "Договоры и коалиционное доминирование в неполных рынках" — 2003, *Консорциум экономических исследований и образования.* Серия "Научные доклады", № 02/04, 114 с.

[10] О сходимости договорных траекторий в экономике чистого обмена. — 2006, *Консорциум экономических исследований и образования.* Серия "Научные доклады", № 06/07, 94 с.

Маракулин Валерий Михайлович

Контракты и доминирование в конкурентной экономике.
III. Модели экономики с асимметрично информированными агентами:
концепция предельной информации

Препринт № 198

Ответственный за выпуск С. М. Анцыз

Подписано в печать 26.10.07. Формат 60 × 84 1/8.

Усл. печ. л. 2,8. Уч.-изд. л. 2,5. Тираж 100 экз.

Заказ № 167

Отпечатано в ООО «Омега Принт»
пр. Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090