Группа:	ФИО:	Вариант I

1	2	3	4 а)	4 б)	5	6 а)	6 б)	Σ

Экзаменационная работа по курсу «Математический анализ - 1»

23 декабря 2024

1 Пусть функция f задана выражением $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{x+2}{x+1}}$. Найдите $f^{(n)}(0)$ для произвольного $n \geqslant 1$.

2 Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{x}}$ при $x > 1$. Пусть функция $g\colon (e, +\infty) \to \mathbb{R}$ такова, что $f\left(\frac{g(y)}{y}\right) = y$ для любого $y \in (e, +\infty)$. Найдите $g'\left(\frac{e^4}{2}\right)$.

Замечание: $f(4) = \frac{e^4}{2}$.

3 Рассмотрим неявную функцию $y(x)$ заданную уравнением

$$y + y^3 + 2x = 4.$$

Найдите первую и вторую производные y' и y'' в точке $x = 1$, $y = 1$.

4 Найдите пределы:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\sin(x) - \sin(2x)}{\sin(x) - x\cos(x)}$; **б)** $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$, где $a > 0$.

5 Представьте локальной формулой Тейлора с остаточным членом $o\left(x^3\right)$ функцию $f(x) = \cos\left(\frac{\pi e^x}{2}\right)$.

6 Вычислите следующие пределы:

а) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e\left(1 - \frac{1}{2x}\right)\right)$; **б)** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(\sin x) - xe^{-x^2/2}}{x^5}$.

Формулы Маклорена:

1. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \bar{o}\left(x^n\right)$ при $x \to 0$;

2. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \bar{o}\left(x^{2n+2}\right)$ при $x \to 0$;

3. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \bar{o}\left(x^{2n+1}\right)$ при $x \to 0$;

4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \bar{o}\left(x^n\right)$ при $x \to 0$;

5. $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} \cdot x^k + \bar{o}\left(x^n\right)$ при $x \to 0$.

6. $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)} x^{2k-1}}{(2k-1)} + \bar{o}\left(x^{2n-1}\right)$ при $x \to 0$;

7. $\arcsin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(2k)!\cdot x^{2k+1}}{4^k\cdot(k!)^2\cdot(2k+1)} + \bar{o}(x^{2n+1})$ при $x \to 0$.

Некоторые тригонометрические функции:

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1);$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Обратные тригонометрические функции:

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Группа:	ФИО:							Вариант II
1	2	3	4 а)	4 б)	5	6 а)	6 б)	Σ

Экзаменационная работа по курсу «Математический анализ - 1»

23 декабря 2024

1 Пусть функция f задана выражением $f(x) = \cos^4(x)$. Найдите $f^{(n)}(x)$ для произвольного $n \geqslant 1$.

2 Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ при $x > 2$. Пусть функция $g\colon (e^2/4, +\infty) \to \mathbb{R}$ такова, что $f\left(\frac{g(y)}{y}\right) = y$ для любого $y \in (e^2/4, +\infty)$. Найдите $g'\left(\frac{e^3}{9}\right)$.
Замечание: $f(3) = \frac{e^3}{9}$.

3 Рассмотрим неявную функцию $y(x)$ заданную уравнением

$$y + y^3 + 3x = 5.$$

Найдите первую и вторую производные y' и y'' в точке $x = 1$, $y = 1$.

4 Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \cos(x)}{2\sin^2(x/2)}$; **б)** $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{2(e^{\cos(x)} + x - 1) - \pi}{\ln(\sin(-3x))}$.

5 Представьте локальной формулой Тейлора с остаточным членом $o\left(x^3\right)$ функцию $f(x) = \sin(\pi e^x)$.

6 Вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x^2 \left(\ln(1 + x) - \ln x\right) - x\right)$; **б)** $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(\tan x) - xe^{x^2/6}}{x^5}$.

Формулы Маклорена:

1. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \bar{o}\left(x^n\right)$ при $x \to 0$;

2. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \bar{o}\left(x^{2n+2}\right)$ при $x \to 0$;

3. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \bar{o}\left(x^{2n+1}\right)$ при $x \to 0$;

4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \bar{o}\left(x^n\right)$ при $x \to 0$;

5. $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} \cdot x^k + \bar{o}\left(x^n\right)$ при $x \to 0$.

6. $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)} x^{2k-1}}{(2k-1)} + \bar{o}\left(x^{2n-1}\right)$ при $x \to 0$;

7. $\arcsin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(2k)!\cdot x^{2k+1}}{4^k\cdot(k!)^2\cdot(2k+1)} + \bar{o}(x^{2n+1})$ при $x \to 0$.

Некоторые тригонометрические функции:

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1);$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Обратные тригонометрические функции:

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

С Новым годом!

Группа:	ФИО:	Вариант III

1	2	3	4 а)	4 б)	5	6 а)	6 б)	Σ

Экзаменационная работа по курсу «Математический анализ - 1»

23 декабря 2024

1 Пусть функция f задана выражением $f(x) = e^x(x+1)^3$. Найдите $f^{(n)}(0)$ для произвольного $n \geqslant 1$.

2 Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ при $x > 3$. Пусть функция $g\colon ((e/3)^3, +\infty) \to \mathbb{R}$ такова, что $f\left(\frac{g(y)}{y}\right) = y$ для любого $y \in ((e/3)^3, +\infty)$. Найдите $g'\left(\frac{e^4}{4^3}\right)$.

Замечание: $f(4) = \frac{e^4}{4^3}$.

3 Рассмотрим неявную функцию $y(x)$ заданную уравнением

$$y + y^3 + 4x = 6.$$

Найдите первую и вторую производные y' и y'' в точке $x = 1$, $y = 1$.

4 Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\ln(\operatorname{tg}(x))}{\sin(x) - \cos(x)}$; **б)** $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg}(x)} - \sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}}{4x^2+3x-1}$.

5 Представьте локальной формулой Тейлора с остаточным членом $o\left(x^4\right)$ функцию $f(x) = \cos\left(\frac{\pi \cdot \cos(x)}{2}\right)$.

6 Вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x\right)$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\arctan x) - x e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^5}$.

Формулы Маклорена:

1. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \bar{o}\left(x^n\right)$ при $x \to 0$;

2. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \bar{o}\left(x^{2n+2}\right)$ при $x \to 0$;

3. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \bar{o}\left(x^{2n+1}\right)$ при $x \to 0$;

4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \bar{o}\left(x^n\right)$ при $x \to 0$;

5. $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} \cdot x^k + \bar{o}\left(x^n\right)$ при $x \to 0$.

6. $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)} x^{2k-1}}{(2k-1)} + \bar{o}\left(x^{2n-1}\right)$ при $x \to 0$;

7. $\arcsin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(2k)!\cdot x^{2k+1}}{4^k\cdot(k!)^2\cdot(2k+1)} + \bar{o}(x^{2n+1})$ при $x \to 0$.

Некоторые тригонометрические функции:

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1);$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Обратные тригонометрические функции:

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

С Новым годом!

Группа:	ФИО:	Вариант IV

1	2	3	4 а)	4 б)	5	6 а)	6 б)	Σ

Экзаменационная работа по курсу «Математический анализ - 1»

23 декабря 2024

1 Пусть функция f задана выражением $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 3x + 2}$. Найдите $f^{(n)}(x)$ для произвольного $n \geqslant 1$.

2 Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{e^x}{x^4}$ при $x > 4$. Пусть функция $g\colon (e, +\infty) \to \mathbb{R}$ такова, что $f\left(\frac{g(y)}{y}\right) = y$ для любого $y \in ((e/4)^4, +\infty)$. Найдите $g'\left(\frac{e^5}{5^4}\right)$.

Замечание: $f(5) = \frac{e^5}{5^4}$.

3 Рассмотрим неявную функцию $y(x)$ заданную уравнением

$$y + y^3 + 5x = 7.$$

Найдите первую и вторую производные y' и y'' в точке $x = 1$, $y = 1$.

4 Найдите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - (e^x + e^{-x})\cos(x)}{x^2}$; **б)** $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{xe^x - 4 + 2e^x - 2x}{1 + x\sin(\pi x) + x/2 + 2\sin(\pi x)}$.

5 Представьте локальной формулой Тейлора с остаточным членом $o\left(x^4\right)$ функцию $f(x) = \sin\left(\pi \cdot \cos(x)\right)$.

6 Вычислите следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} - x^2\right)$; **б)** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(\sin x) - xe^{x^2/6}}{x^5}$.

Формулы Маклорена:

1. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \bar{o}\left(x^n\right)$ при $x \to 0$;

2. $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \bar{o}\left(x^{2n+2}\right)$ при $x \to 0$;

3. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \bar{o}\left(x^{2n+1}\right)$ при $x \to 0$;

4. $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + \bar{o}\left(x^n\right)$ при $x \to 0$;

5. $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)}{k!} \cdot x^k + \bar{o}\left(x^n\right)$ при $x \to 0$.

6. $\operatorname{arctg} x = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{(k-1)} x^{2k-1}}{(2k-1)} + \bar{o}\left(x^{2n-1}\right)$ при $x \to 0$;

7. $\arcsin x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(2k)!\cdot x^{2k+1}}{4^k\cdot(k!)^2\cdot(2k+1)} + \bar{o}(x^{2n+1})$ при $x \to 0$.

Некоторые тригонометрические функции:

$(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2}(2n+1);$

$(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

Обратные тригонометрические функции:

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1;$

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

С Новым годом!