Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
_____________С.Ю. Рощин

Одобрено на заседании Академического совета
Аспирантской школы по математике

Согласовано
Академический директор Аспирантской школы по математике
__________ М.В. Игнатьев

Программа вступительного испытания по научной специальности
основной образовательной программы высшего образования – программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре
Математика и механика

Научные специальности:
1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ
1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика

Санкт-Петерубрг, 2026

1. Область применения и нормативные ссылки

Программа вступительного испытания по научной специальности сформирована на основе федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования по программам специалитета или магистратуры.

2. Структура и процедура проведения вступительного испытания

Вступительное испытание по научной специальности основной образовательной программы высшего образования – программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре «Математика и механика» по научным специальностям 1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ, 1.1.4. Теория вероятностей и математическая статистика проводится в формате собеседования. Собеседование состоит из двух частей.

В первой части абитуриент рассказывает о себе, о мотивах, которыми он руководствуется, выбирая математику как направление своего обучения и дальнейшей профессиональной деятельности, а также о направлении своих исследований и предполагаемой теме диссертации. На первую часть собеседования отводится 15 минут.

Примерные вопросы:

- Какие области математики Вас интересуют?
- Есть ли у Вас научные результаты? Если да, то опишите некоторые из них.
- Над какими задачами Вы планируете работать в случае приема в аспирантуру? Есть ли у Вас уже какие-то продвижения в решении этих задач? Если да, то какие?

Во второй части оценивается теоретическая подготовленность абитуриента. Абитуриент получает два вопроса из теоретической части программы собеседования. Ему предоставляется 40 минут на подготовку и 10-15 минут на ответ. По решению экзаменационной комиссии один или оба теоретических вопроса могут быть заменены задачами по материалу теоретической части.

По решению экзаменационной комиссии последовательность частей собеседования при ответе абитуриента может меняться. Абитуриенту могут быть заданы дополнительные вопросы или задачи в рамках программы экзамена.

Программы теоретической части собеседования для всех научных специальностей содержатся в разделе 3 настоящего документа.

Собеседование проводится на русском или английском языке (по желанию абитуриента). По предварительному согласованию с абитуриентом собеседование может проводиться дистанционно с использованием информационных технологий.

3. Критерии оценки собеседования

Максимальная возможная оценка в соответствии с перечисленными критериями за две части собеседования составляет 50 баллов.

Первая часть собеседования комиссии с абитуриентом оценивается исходя из 20 баллов. Оценивается умение абитуриента проводить самостоятельные исследования, знание методов, имеющийся опыт исследовательской деятельности.

Критерии оценивания	**Баллы**
Есть научные математические результаты, содержание которых изложено автором корректно и которые показывают его математический уровень	1-10
Есть опубликованные математические работы или препринты на arXiv, содержание которых корректно изложено автором	2-10
Есть предполагаемый план исследований в аспирантуре и/или предполагаемый руководитель, согласный на руководство абитуриентом	2-10
Имеется научный задел по предполагаемым исследованиям	2-10

Во второй части собеседования комиссия оценивает уровень математической подготовки абитуриентов. Каждый вопрос оценивается по 15-балльной шкале.

Критерии оценивания	Баллы
Ответ полный, логичный, конкретный, без замечаний, продемонстрированы знания материала программы теоретической части.	12-15
Ответ логичный, конкретный, присутствуют незначительные пробелы в знания материала программы теоретической части.	8-11
Ответ неполный, отсутствует логичность повествования или допущены существенные логические ошибки.	1-7
Ответ на поставленный вопрос не дан.	0

Оценка за собеседование от 0 до 14 баллов включительно считается неудовлетворительной. Для участия в конкурсе по итогам собеседования необходимо набрать суммарно не менее 15 баллов.

4. Содержание теоретической части собеседования

К собеседованию в части теории абитуриент готовится по темам в соответствии с научной специальностью будущей научно-квалификационной работы (кандидатской диссертации), указанной в заявлении о поступлении в аспирантуру.

4.1 Содержание теоретической части (программы) собеседования по научной специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

1. Вопросы по вещественному анализу

1. Действительные числа. Расстояние в R и Rn. Открытые и замкнутые множества. Замыкание множества. Предел последовательности. Инфимум и супремум подмножеств числовой прямой. Структура открытых множеств на прямой. Сумма ряда.

2. Топологические пространства, база топологии, непрерывность функции, предел последовательности, сепарабельность. Метрические пространства, полнота, пополнение. Топология, порожденная метрикой.

3. Компактность, основные свойства компактных пространств. Вполне ограниченные множества. Критерий Хаусдорфа. Теоремы Вейерштрасса и Стоуна – Вейерштрасса о приближении непрерывных функций. Критерий компактности в C[a,b].

4. Мера Лебега на отрезке и на общем измеримом пространстве. Множество типа Кантора положительной меры Лебега.

5. Интеграл Лебега и его основные свойства. Связь с интегралом Римана. Неравенства Гёльдера, Минковского, Йенсена.

6. Теоремы Егорова, Лузина, Беппо Леви, Фату. Сходимость почти всюду, по мере, в среднем, поточечная, связь между ними.

7. Теорема Фубини. Теорема Радона – Никодима.

8. Дифференцируемость монотонной функции почти всюду. Функции ограниченной вариации. Абсолютно непрерывные функции. Восстановление функции по ее производной. Формула Ньютона – Лейбница.

9. Производная отображений в Rn. Связь с частными производными. Теоремы об обратной и неявной функции.

10. Гамма и бета функции Эйлера. Преобразование Фурье интегрируемых функций и его простейшие свойства.

Литература

1. В. А. Зорич. Математический анализ, т. 1, 2. Любое издание.
2. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа. Любое издание.
3. В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. РХД, 2020.

2. Вопросы по комплексному анализу

1. Последовательности и ряды комплексных чисел. Функции комплексного переменного, дифференцируемость, геометрический смысл производной. Условия Коши-Римана. Элементарные функции комплексного переменного.
2. Интегрирование функций комплексного переменного по кривым. Формула для вычисления с помощью параметризации. Интегральная теорема Коши. Теорема о первообразной. Интегральная формула Коши. Теорема о среднем для голоморфной функции. Принцип максимума модуля. Теорема Мореры.
3. Степенные ряды комплексного переменного. Радиус сходимости. Аналитичность суммы. Представление голоморфных функций степенными рядами. Единственность разложения. Разложения элементарных функций.
4. Целые функции. Теорема Лиувилля.
5. Аналитическое продолжение голоморфных функций. Аналитическое продолжение вдоль кривой. Многозначные аналитические функции Ln(z), zα. Точки ветвления.
6. Ряд Лорана. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана. Изолированные особые точки. Теорема о главной части ряда Лорана в окрестности устранимой точки. Полюс. Порядок полюса. Вид ряда Лорана в окрестности полюса. Существенно особые точки. Вид ряда Лорана в окрестности существенно особой точки. Теорема Пикара. Классификация особых точек.
7. Вычеты. Основная теорема о вычетах. Вычисление интегралов с помощью теоремы о вычетах. Лемма Жордана. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема высшей алгебры.
8. Конформные отображения и их основные свойства. Критерий локальной однолистности. Принцип соответствия границ. Теорема Римана.

Литература:

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Любое издание.
2. Свешников А. Г., Тихонов А. Н. Теория функций комплексной переменной. Любое издание.
3. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. Любое издание.

3. Вопросы по функциональному анализу

1. Нормированные, банаховы, евклидовы, гильбертовы пространства. Основные часто используемые пространства функций и последовательностей.
2. Ортогональные проекции. Ортонормированные системы и базисы в гильбертовом пространстве. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Изоморфизм бесконечномерных сепарабельных гильбертовых пространств. Примеры базисов в L2[a,b] и L2(R). Сходимость рядов Фурье.
3. Линейные функционалы. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Теорема Хана – Банаха. Отделимость выпуклых множеств.
4. Сопряженное пространство. Теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала на гильбертовом пространстве. Сопряженные к основным часто используемым пространствам.
5. Слабая и *-слабая топологии. Теорема Банаха – Алаоглу.
6. Линейные операторы между нормированными пространствами. Норма, непрерывность и ограниченность оператора. Сопряженный к ограниченному оператору и его норма.
7. Спектр и резольвента ограниченного оператора. Компактные операторы и их свойства. Спектр компактного оператора. Теорема Фредгольма.
8. Самосопряженные ограниченные операторы и их спектры. Теорема Гильберта -Шмидта. Представление самосопряженного оператора в виде умножения на функцию.
9. Локально выпуклые пространства. Пространства пробных функций D и S. Обобщенные

функции классов D’ и S’. Дифференцирование обобщенных функций.

10. Преобразование Фурье в пространствах S, S’.

Литература

1. В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. РХД, 2020. – 756 с.

2. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа. Любое издание.

3. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977. 358 с.

4. Рудин У. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975. — 443 с.

5. Хелемский А. Я. Лекции по функциональному анализу. М.: МЦНМО, 2014. – 560 с.

4.4. Содержание теоретической части (программы) собеседования по научной специальности 1.1.4 Теория вероятностей и математическая статистика

1. Пространство элементарных событий. Алгебра и σ-алгебра событий. Аксиоматика Колмогорова. Дискретные вероятностные пространства.

2. Независимые события. Условные вероятности в дискретном случае. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

3. Случайные величины и их функции распределения. Независимость случайных величин.

4. Дискретные и абсолютно непрерывные случайные величины, и соответствующие вероятностные распределения. Основные примеры дискретных и абсолютно непрерывных вероятностных распределений: Бернулли, Гаусса, Пуассона, Коши.

5. Определение математического ожидания случайной величины. Основные свойства математического ожидания. Неравенство Коши – Буняковского. Неравенство Минковского. Неравенство Чебышёва.

6. Дисперсия случайной величины. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин. Дисперсия суммы независимых случайных величин.

7. Характеристические функции (преобразование Фурье) случайных величин и их основные свойства. Связь характеристических функций с моментами. Формула обращения и теорема единственности.

8. Совместное распределение случайных величин. Характеризация независимости через совместное распределение. Многомерное нормальное распределение. Существование последовательности независимых случайных величин с заданными распределениями.

9. Закон больших чисел для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин: формулировка теоремы Колмогорова и доказательство сходимости в среднем квадратическом при наличии дисперсии.

10. Слабая сходимость вероятностных мер. Описание слабой сходимости на прямой в терминах функций распределения и в терминах характеристических функций.

11. Связи между различными видами сходимости случайных величин: почти всюду, по вероятности, в среднем, в среднем квадратическом, по распределению.

12. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией.

13. Условное математическое ожидание относительно сигма-алгебры и его основные свойства. Определение мартингала. Примеры. Формулировка теоремы Дуба о сходимости мартингалов, ограниченных в среднем квадратическом.

14. Понятие случайного процесса. Конечномерные распределения случайного процесса. Формулировка теоремы Колмогорова о существовании случайного процесса с заданной системой конечномерных распределений.

15. Марковская цепь с конечным числом состояний. Стационарные распределения марковской цепи и сходимость к ним переходных вероятностей.

16. Определения винеровского процесса и пуассоновского процесса. Основные свойства

винеровского процесса.

17. Типичные задачи математической статистики. Точечные оценки и их свойства: несмещенность, состоятельность, оптимальность, асимптотическая нормальность. Построение точечных оценок методом максимального правдоподобия и моментов.

18. Оценка параметров с помощью доверительных интервалов. Построение доверительных интервалов для неизвестных среднего и дисперсии в случае выборки из нормального распределения. Распределение Стьюдента.

19. Проверка статистических гипотез. Ошибки первого и второго рода. Теорема Неймана – Пирсона.

20. Проверка гипотезы о виде распределения. Эмпирическая (выборочная) функция распределения. Гистограмма. Формулировка теоремы Гливенко – Кантелли. Критерий согласия Колмогорова. Критерий согласия хи-квадрат Пирсона.

Литература

1. Боровков А.А. Теория вероятностей. М., Едиториал УРСС, 2003.
2. Боровков А.А. Математическая статистика. М., Физматлит, 2007.
3. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М., ЛКИ, 2007.
4. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. 2-е изд. М., Наука, 1989.
5. Кораллов Л.Б., Синай Я.Г. Теория вероятностей и случайные процессы. М., МЦНМО, 2013.
6. Ламперти Дж. Вероятность. М., Наука, 1973.
7. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. М., Изд-во МГУ, 1963.
8. Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. М., Наука, 1986.
9. Прохоров Ю.В., Пономаренко Л.С. Лекции по теории вероятностей и математической статистике. М., Юрайт, 2019.
10. Прохоров Ю.В., Прохоров А.В. Курс лекций по теории вероятностей и математической статистике. М., МЦНМО, 2019.
11. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. М., Книжный дом «Либроком», 2010.
12. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М., Дрофа, 2007.
13. Ширяев А.Н. Вероятность. Т. 1, 2. М., МЦНМО, 2007.
14. Ширяев А.Н., Эрлих И.Г., Яськов П.А. Вероятность в теоремах и задачах (с доказательствами и решениями). М., МЦНМО, 2013.