

Вопросы к коллоквиуму
"Неопределенный и определенный интеграл".
Математический анализ, 3-й модуль,
группы ПМ 11, 12, 13;
2014/2015 учебный год,
В. В. Лебедев

На коллоквиуме студент получает два вопроса из этого вопросника по выбору преподавателя. Студент должен знать определения и формулировать утверждения. Воспроизводить доказательства теорем не требуется.

1. Дайте определение первообразной (неопределенного интеграла) и укажите ее основные свойства. Выпишите таблицу основных первообразных.

2. Расскажите о замене переменной. Дайте определение дифференциала функции и расскажите о внесении под знак дифференциала в неопределенных интегралах. Вычислите

$$\int \frac{\ln x}{x} dx.$$

3. Запишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла. Вычислите $\int e^x \cos x dx$.

4. Запишите рекуррентное соотношение для

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

5. Перечислите простейшие рациональные функции, расскажите об их интегрировании.

6. Сформулируйте теорему о представлении рациональной функции в виде суммы простейших. Сведите вычисление интеграла

$$\int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$$

к вычислению интегралов от простейших рациональных функций.

7. Расскажите, как сводятся следующие интегралы к интегралам от рациональных функций ($R(\)$ обозначает рациональное выражение от соответствующих переменных):

$$\int R(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \dots) dx, \quad \int R(e^{\alpha x}, e^{\beta x}, e^{\gamma x}, \dots) dx,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — рациональные числа. Сведите интеграл

$$\int \frac{e^x + e^{x/2}}{e^{2x} + 1} dx.$$

к интегралу от рациональной функции.

8. Расскажите о тригонометрических интегралах

$$\int R(\cos x, \sin x) dx$$

и их сведения к интегралам от рациональных функций (при помощи универсальной тригонометрической замены переменной). Сведите интеграл

$$\int \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x} dx.$$

к интегралу от рациональной функции.

9. Дайте определение интегрируемой функции на отрезке и ее определенного интеграла. Поясните геометрический смысл определенного интеграла (для непрерывной функции — площадь области под графиком). Приведите пример неинтегрируемой ограниченной функции.

10. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла (линейность, аддитивность). Поясните геометрический смысл определенного интеграла.

11. Сформулируйте критерий интегрируемости. Сформулируйте утверждение об интегрируемости непрерывных и кусочно непрерывных функций.

12. Сформулируйте теорему об интегрируемости модуля функции и запишите неравенство между модулем интеграла функции и интегралом ее модуля.

13. Сформулируйте теоремы об интегрировании неравенств и об оценке определенного интеграла.

14. Сформулируйте теорему о среднем значении для определенного интеграла.

15. Сформулируйте теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом и выведите формулу Ньютона-Лейбница.

16. Сформулируйте правило замены переменной в определенном интеграле. Вычислите

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

17. Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла. Вычислите

$$\int_1^2 x \ln x dx.$$

18. Дайте определение кривой на плоскости и ее длины. Запишите формулу для вычисления длины дуги графика гладкой функции. Вычислите длину дуги графика функции $y = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

19. Запишите формулу для вычисления массы отрезка с заданной переменной плотностью. Запишите формулу работы переменной силы на прямолинейном пути.

20. Запишите формулу для вычисления объема области в $\mathbb{R}^3$ с заданным законом изменения площади поперечного сечения. Вычислите объем области, ограниченной поверхностями $z = x^2 + y^2$, $z = 1$, (параболическая чашка).