

## Экзам. билеты по Матпрактикуму (для групп ПМ-11, ПМ-12, ПМ-13)

(итоговый экзамен 2014/15 уч. года).

Разработчик: доц. Савватеев В.В.

### Бил.1

- 1.. Может ли для некоторой логической функции  $f(x,y,z,u,v)$  количество слагаемых ДНФ быть ровно в три раза больше, чем количество сомножителей КНФ для не- $f$ ?
- 2.. На сколько % выражение  $(1+2+3+\dots+2015)^2 - 9$  больше, чем сумма  $3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 2015^3$ ?
- 3.. Дан Excel-файл с командами рисования «живого куба». Изменить его так, чтобы на экране были видны ТРИ куба, образующие правильную 4-угольную призму.

### Бил.2

- 1.. На окружности взято 12 равноотстоящих точек с номерами от 1 до 12. Вычислить точку пересечения отрезка с концами (1 ; 6) и отрезка с концами (2 ; 9).
- 2.. Известно, что  $C_{49}^{n+1} / C_{36}^n$  приближённо равно 37,\*\*\*\*37. Найти  $n$  и цифры, обозначенные звёздочками.
- 3.. Пояснить, какие действия можно выполнять с «необычными числами», и какие свойства должны выполняться для этих чисел.

Решить уравнение  $w^8 + 29w^4 = 13$  на множестве остатков от деления на 31.

### Бил.3

- 1.. Студент Ботаник записывал в тетради цифры числа  $\pi$  и заметил, что часто встречаются симметричные наборы из трёх цифр (например, «141»). Когда он насчитал пять таких наборов, он остановился. С какой точностью он выписал число  $\pi$ ?
- 2.. Сгенерировать и заморозить 6 столбцов по 30 случайных чисел в каждом (команда СЛЧИС()). В первых двух столбцах эти числа изображают смещения  $(x_i, y_i)$  точки A, выходящей из точки (0, 0) и делающей единичные шаги вправо, влево, вверх или вниз, согласно алгоритму: если СЛЧИС меньше 0,5, то шаг (-1); в противном случае шаг равен 1. Аналогичным образом будут перемещаться точки B и C в оставшихся четырёх столбцах. Изобразить графики случайных блужданий по плоскости точек A, B, C на одном чертеже (синим, красным и зелёным цветом).
- 3.. С помощью таблицы «Живой 3-куб» нарисовать четыре куба, образующие крест.

### Бил.4

- 1.. Даны уравнения четырех прямых в  $R^3$ :  
$$(x-12)/3 = (y+7)/3 = z-2 ; \quad (x+7)/4 = y-3 = (z+4)/2 ;$$
$$(x+1)/11 = (y+11)/12 = (z-2)/3 ; \quad (x-2A)/A = (y-3)/4 = (z-A-2)/7 .$$

Все ли пары прямых из этих четырех скрещиваются, если выбрать  $A=0$ ?

Найти попарные расстояния первых трех прямых. Подобрать  $A$  так, чтобы три расстояния между парами прямых выражались числами 5,8161; 6,21265; 6,6092. Указание. Первое и третье число не зависят от  $A$ .
- 2.. Нарисовать одну из этих прямых в МАТЛАБ.
- 3.. Нарисовать в Excel два «живых куба» с общим центром.

### Бил.5

- 1.. Записать отрицание функции  $a (+) ab (+) abc$  в виде КНФ. Составить Excel-программу для вычисления этой КНФ. В каких двух случаях из восьми исходная функция равна 1? < знак (+) - это сложение по модулю 2 >

2.. Дан Excel-файл, вычисляющий определитель 3-го порядка с комплексными элементами. Дан определитель 4-го порядка, в первом столбце которого имеются числа  $1-i$ ,  $0$ ,  $2+i$ ,  $0$ . Как его быстро вычислить с помощью этого файла?

3.. Дан первый граф («3 дома, 3 колодца») и второй (полный граф с 3 вершинами). Они сочленены по одной из вершин ( $V$ ) 1-го графа и одной из вершин 2-го. Затем отброшено одно из ребер, инцидентных вершине  $V$ . Может ли получившийся граф оказаться планарным?

#### Бил.6

1.. Дан граф «зубастая пасть» (взять его изображение у преподавателя). Занести в Excel его матрицу инциденции. Можно ли из этого графа удалить ДВЕ вершины (вместе с прилегающими к ним ребрами) так, чтобы оставшийся график был планарным?

2.. Решить в МАТЛАБ задачу: из всех прямоугольников, вписанных в круг радиуса 1, выбрать тот, у которого сумма площади и периметра прямоугольника максимальна.

3.. Связен ли график, дополнительный к графу п.1 ?

#### Бил.7

1.. В 3-мерном пространстве выделен слой  $0 \leq z \leq 1$ , заполненный кубами с единичным ребром. Вершины и ребра этих кубов образуют счётный график, бесконечный в обе стороны в направлении осей  $X$  и  $Y$ . Имеется ли в нем гамильтонов маршрут, бесконечный в обе стороны?

2.. К шару радиуса  $R$  примыкает вплотную (вдоль экватора) тор с радиусом сечения  $r$ . Общая поверхность двух тел равна 100 кв.м. При каком условии объём всего тела максимальен? минимальен?

3.. В пакете МАТЛАБ с помощью функции **solve** решить уравнение  $z^{12} + 6*z^6 = 7$ .

#### Бил.8

1.. Нарисовать в МАТЛАБ рисунок «Четыре одинаковых круга с маленьким кругом между ними» (образец взять у преподавателя).

2.. Рассматривая рисунок п.1 как график с 13-ю вершинами, ответить на вопрос: как добавить к этому графу ещё одно ребро, чтобы новый график оказался имеющим эйлеров путь?

3.. Считая, что на рисунке п.1 нарисован остров с указанными на нём границами 16-и государств, ответить, можно ли эту карту правильно раскрасить а) четырьмя красками; б) тремя красками.

#### Бил.9

1.. Один студент второпях решил, что  $\text{КОРЕНЬ}(49/43) = 1,06749$  (докажите, что это число не может быть конечной десятичной дробью). Другой же решил, что число  $4,3 * \ln(43) = 16,173161173161173161\dots$  (период 173161). Докажите, что данное число не может быть бесконечной периодической дробью. Кто из них сильнее ошибся?

2.. При каком значении  $n$  количество перестановок с повторениями из  $n$  элементов по 2 элемента окажется ровно в 5 раз больше, чем количество перестановок без повторений из  $n$  элементов по 2 ?

3.. Нарисовать в МАТЛАБ острый угол, в который вписан круг радиуса 1 и круг радиуса 3, касающиеся друг друга (схему посмотреть у преп.).

#### Бил.10

1.. Пусть переменная  $K$  означает «корень из двух». Проверить в МАТЛАБ и в Excel, что  $K^{\wedge}(K^{\wedge}(K^{\wedge}K)) = 1,8403$ . Чему равен предел этого выражения при неограниченном возрастании количества корней: А.  $\lim = 1,9$  Б.  $\lim = 2$  В.  $\lim = K^{\wedge}3$  Г.  $\lim = 2 - 1/2^{\wedge}0,25$ .

2.. В правильном числовом равенстве все цифры, кроме 3, 6, 9, были заменены звёздочками. Получилось  $** \times 3669 - 33 \times *99 = 36**6$  ( $\times$  = знак умножения). Методом «разумного перебора» восстановить исходное равенство.

3.. Из связного графа было выкинуто одно ребро, и он распался на два графа типа «3-куб». Сколько вершин и ребер было в исходном графе? Был ли он планарным? Стал ли он кубическим?

#### Бил.11

1.. Даны система уравнений  $17a - 33b = 51$ ;  $33a + 19b = 193$ . Выражая  $b$  через  $a$  и решая уравнение относительно « $a$ » с помощью функции **solve**, доказать, что  $a = 3669/706$ ,  $b = 799/706$ . Сократимы ли эти дроби?

2.. Ту же систему решить в Excel с помощью ПОИСКА РЕШЕНИЯ, взяв целевую функцию  $F = (17a - 33b - 51)^2 + (33a + 19b - 193)^2$ . Проверить совпадение пяти знаков после запятой с точным решением.

3.. Сколько решений имеет ребус ТРОС + СОПТ = PPPP в 8-ичной системе счисления?

#### Бил.12

1.. Дать определение расстояния  $d$  между двумя множествами. Вычислить его в МАТЛАБ для двух скрещивающихся прямых  $r = r_1 + t a_1$ ,  $r = r_2 + u a_2$  ( $t, u$  - параметры на каждой из прямых, жирный шрифт = векторы). Схему расположения векторов взять у преп. Для вычисления использовать формулу  $d = |\langle(r_1 - r_2), a_1, a_2 \rangle| / |a_1 \times a_2|$ , где  $\langle \rangle$  - смешанное произведение,  $x$  = векторное произведение,  $||$  - знак модуля.

Конкретно:  $r_1 = (1 \ 2 \ -3)$ ,  $r_2 = (3 \ 1 \ -2)$ ,  $a_1 = (1 \ 1 \ 1)$ ,  $a_2 = (2 \ -4 \ 3)$ .

2.. Проверить, что  $(1^5 + 1^7) + (2^5 + 2^7) + (3^5 + 3^7) + (4^5 + 4^7) + \dots + (n^5 + n^7) = 2*(n(n+1)/2)^4$  (для  $n = 1, 2, 3, \dots, 100$ ). Верно ли, что сумма первых 79 слагаемых в скобках делится на 10000 ?

3.. Пусть  $k$  означает «извлечение корня». Что больше:  $\sin(36^\circ)$  или  $k((5-k(5))/8)$ ?  
(Вычисления сделать и в Excel, и в МАТЛАБ).

#### Бил.13

1.. Взять у преподавателя схему графа «венецианское зеркало», являющегося симметричным графом с 13 вершинами и 13 ребрами. Является ли он двудольным планарным графом?

2.. С помощью МАТЛАБ рассчитать, во сколько раз число  $13^{17}$  больше, чем число  $17^{13}$ . Сколько верных знаков после запятой в полученном ответе?

3.. Найти в символьном виде корни уравнения

$$(-1+2i)z^4 + (10+5i)z^3 - (54+135i)z^2 - 5iz - 43 + 49i = 0.$$

#### Бил.14

1.. Указать в 10-ичной системе такое число из 17-и цифр (восемь из которых РАЗНЫЕ), что его произведение на 72 даёт результат, состоящий только из восьмёрок.

2.. Число  $1/7$  записано в виде бесконечной 10-ичной дроби. Затем каждая из цифр, отличная от 2, 4, 8, должна быть заменена на одну из цифр 2 или 4 или 8. Как это сделать, чтобы новое число как можно меньше отличалось от  $1/7$ ? (*Цифры, стоящие на разных местах, но одинаковые по написанию, не обязательно заменять на одну и ту же цифру*). На сколько % (в самом лучшем случае) будет отличаться новое число от исходного?

3.. В пакете МАТЛАБ разработать СКРИПТ с именем Snegovik.m, рисующий снеговика с помощью рисования нескольких прямых отрезков и нескольких окружностей. (Типовую форму снеговика можно взять у преп.)

#### Бил.15

- 1.. Найти расстояние от сферы  $x^*x + y^*y + z^*z = 1$  до параболы в 3-мерном пространстве  $\{ y = 3(x-8)^2, z=2 \}$ .
- 2.. Вычислить в МАТЛАБ, на сколько % отличается первое число от второго:  
первое  $1/(2+3/(4+5/(6+7/(8+9/10))))$ , второе  $1/(2-3/(4-5/(6-7/(8-9/10))))$ ,  
Записать каждое из чисел в виде обыкновенной дроби.
- 3.. С помощью пакета Excel проверить, что при  $n=2^{51}$  якобы выполняется равенство  $n/(1+K) = n*(K-1)$ , где  $K = \text{корень}(2+1/n)$  (вычислять надо отдельно левую часть, и отдельно - правую). Докажите, что это равенство неверно, и объясните, почему в данном случае компьютер ошибся.

#### Бил.16

- 1.. Даны числа 7 и 3. Из них составим числа  $a_1 = (7+3)/2$  и  $b_1 = \text{корень}(7*3)$ . Из  $a_1, b_1$  составим  $a_2 = (a_1+b_1)/2$  и  $b_2 = \text{корень}(a_1*b_1)$ . Из  $a_2, b_2$  составим  $a_3 = (a_2+b_2)/2$  и  $b_3 = \text{корень}(a_2*b_2)$ , и так далее. Проверить, что на любом шаге  $n$  будет выполняться система неравенств  $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$ .  
Построить график  $a_n$  и  $b_n$  для  $n = 1, 2, 3, \dots, 20$ . Имеют ли предел эти последовательности? Если да, то быстро ли они к нему приближаются?
- 2.. Построить в МАТЛАБ график функции  $y = (8x^3 - 19x)^{(1/3)}$ . Уточнить, есть ли у него асимптоты и точки, в которых производная бесконечна.
- 3.. Опираясь на график поверхности  $z = \exp(-x^*x - y^*y)$  (изучался на занятиях), построить в Excel поверхность функции из трёх слагаемых «Два холма на берегу пруда».

#### Бил.17

- 1.. Построить в МАТЛАБ на одном чертеже два графика:  $y = (1/16)^x$  и  $y = \log_{1/16} x$ .  
*Внимание! У этих графиков ТРИ точки пересечения!*
- 2.. Найти объём бочки, образованной симметричным куском параболы при его вращении вокруг оси иксов. (Схему и размеры этой бочки даст преподаватель).
- 3.. Рассказать, как применять формулу прямоугольников для приближённого вычисления определённого интеграла. Придумать пример, когда по формуле прямоугольников получается ошибка, равная в точности 20%:  
а) для кусочно-постоянной  $f(x)$  ; б) для  $f(x)$  в виде куска параболы  $y = x^*x$ .

#### Бил.18

- 1.. Нарисовать на экране дисплея вертикальные отрезки длины 1:  $x = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$  и той же длины горизонтальные отрезки  $y = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$ . (Они разбивают единичный квадрат на 16 равных квадратиков). Найти и назвать образ каждого из этих восьми отрезков под действием комплексной функции комплексного переменного  $w = z^2$ . Нарисовать их с помощью Excel («готический портал»).
- 2.. Проделать то же самое, что в п.1, в среде МАТЛАБ.
- 3.. Исходная область в п.1 определяет ГРАФ с 16 вершинами и 22 ребрами. Образ этого графа под действием  $w = z^2$  является графом, изоморфным исходному. Будем считать точку  $z = 0 + 0i$  точкой соединения этих двух графов. Верно ли, что получившийся граф планарен?

#### Бил.19

- 1.. На схеме, которую нужно взять у преп., изображены кубики (12 шт.), расположенные по краю пустого внутри квадрата. Будем считать их вершинами некоего необычного графа. Чтобы задать ребра этого графа, пронумеруем кубики по часовой стрелке от 1 до 12. Двигаясь затем по ч.с. начиная с вершины 1, пропустим 4 вершины и попадем в 5-ю (а номер её равен 6). Получилось первое ребро этого графа.

Из вершины 6 снова двигаемся по ч.с., пропускаем 4 вершины и попадаем в вершину 11. Это - второе ребро. И так далее, до конца этого процесса.

Двудольный ли это граф? Гамильтонов ли он? Да и связан ли он, кстати?

2.. Нарисуйте этот граф в обычном виде в пакете Excel (получится правильный невыпуклый 12-угольник).

3.. Вычислить в МАТЛАБ сколько % составляет площадь круга, описанного около правильного ВЫПУКЛОГО многоугольника, это площади этого многоугольника.

Бил.20

1.. Вычислить определённый интеграл

$$\int_0^a \frac{(a^2 x + 2x^3)dx}{(a^4 + a^2 x^2 + x^4)^{(1/3)}}$$

двумя способами: А) точно, в пакете МАТЛАБ (в символьном виде);

Б) приближённо в МАТЛАБ, методом прямоугольников, с шагом  $h = a/10$ ; затем с шагом  $h = a/100$ . затем с шагом  $h = a/1000$ .

Оценить относительную ошибку для каждого из 3 значений  $h$ .

2.. Построить в Excel на отрезке  $[0, a]$  с шагом  $h = a/100$  график подынтегральной функции п.1.

3.. Найти (в Excel) отношение  $C_{49}^6$  к  $C_{36}^5$  а) точно (по команде ЧИСЛКОМБ);

б) приближённо, заменяя большие по величине факториалы по формуле Стирлинга..



## ПРИЛОЖЕНИЕ

У преподавателя, проводящего письменный экзамен по изложенным выше билетам, имеется набор готовых «полуфабрикатов» программ, которые рекомендуется использовать студенту без всяких пояснений, а также ряд простых рисунков и схем, воспроизведение которых в билетах затруднительно. Ниже приводится краткое описание «полуфабрикатов» программ и словесное описание всех рисунков и схем.

### «ПОЛУФАБРИКАТЫ» для некоторых заданий

1. Excel-файл «Живой 3-куб» с помощью специально подобранных формул и ссылок на них не просто позволяет изобразить на экране произвольный параллелепипед, но «оживить» его: меняя параметры смещения фигуры относительно точки  $(0, 0, 0)$ , а также координаты трёх опорных векторов, мы визуально наблюдаем немедленное изменение размеров и формы рисунка. Путём несложного копирования формул на экране можно создать любые комбинации параллелепипедов. (К билетам 1, 3, 4).

2. Excel-файл «Синтез ДНФ» удобен для построения на экране составных частей совершенной ДНФ (формирование конъюнкций и «сборка» их вместе с помощью дизъюнкции) в случае, когда исходная логическая функции принимает значение ИСТИНА в малом числе вершин булевского куба. (к бил.5).

3. Excel-файл «Вычисление определителя 3-го порядка с комплексными элементами» сводит один комплексный определитель 3-го порядка к сумме восьми действительных определителей того же порядка с простыми коэффициентами и очень прост в использовании. Более того, его легко приспособить для вычисления определителей второго порядка. и даже некоторых простых определителей 4-го порядка. (к бил.5).

4. Многие интересные задачи связаны с расстоянием между скрещивающимися прямыми, однако вычисление его в «бескомпьютерном» виде всегда было камнем преткновения для студентов. Студентам сообщается очень удобная и изящная формула «смешанное произведение поделить на векторное»:

$$d = \frac{\text{abs}(\langle \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle)}{\text{abs}(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)},$$

а все ли сумеют правильно подставить в неё векторы - это уж их забота.(к бил.4, 2).

## СЛОВЕСНОЕ ОПИСАНИЕ графов и рисунков

«Зубастая пасть» (к бил. 6). Этот граф образован 8-ю вершинами (4 сверху, 4 снизу) соединенными рёбрами так, что получаются три одинаковые квадрата в одном горизонтальном ряду. В каждом из квадратов ещё проводятся две диагонали, сверху и снизу также добавляется по дуге («верхняя губа» и «нижняя губа» зубастой пасти).

«Четыре круга» (к бил.8). Это и рисунок, и граф, и даже карта острова. Центры четырёх одинаковых соприкасающихся кругов образуют квадрат. Во внутренний зазор вписан ещё один кружок. Через его центр под углом 45 градусов (в обе стороны) проведены прямые до момента их выхода за пределы больших кругов. Вершинами графа являются точки выхода прямых из окружностей, 8 точек соприкосновения и центр всей конструкции.

«Острый угол» (к бил. 9). В любой острый угол можно вписать круг радиуса 1 и затем ещё круг радиуса 3. Но эти круги не обязаны соприкасаться. Придётся ещё и подбирать величину угла. А потом выяснится, чего доброго, что угол должен быть тупым. Есть над чем подумать бакалаврам!

«Венецианское зеркало» (к бил. 13). Сначала рисуем кривую в форме **астроиды** (а кто не знает, что это такое, загляните в интернет). Сверху к ней добавляем висячую вершину. Итого уже есть 5 вершин и 5 ребер. Далее рисуем удлинённый прямоугольник с центром таким же, как у астроиды и со слегка прогнутыми внутрь сторонами (для придания ему «венецианскости»). А затем дорисовываем вытянутый вверх прямоугольник. Вот и готов график с 13-ю вершинами и 13-ю рёбрами, как и полагается быть в билете номер 13. Правда, неизвестно, связан ли этот график.

«12 кубиков» (к бил.19). Берём квадрат 4x4 и заштриховываем четыре центральные клетки. Нумеруем оставшиеся клетки, начиная с левого верхнего угла, идя вправо. Вот и готовы 12 вершин графа. Всё остальное пояснено в билете.

«Снеговик» (к бил.14) Рисуем одну окружность побольше (и снизу), а вторую поменьше (и сверху). Голова, стало быть. И вместо глаз две маленькие окружности (не то глаза удивлённые, не то очки). Вместо носа и рта уголок под углом 45 градусов, переходящий в горизонтальный рот. Сверху три отрезка, как бы образующие турецкую феску. Но мы-то знаем, что это не феска, а перевёрнутое ведро!

*И ПОСЛЕДНЕЕ.* «Размеры бочки» (к бил. 17). Положим бочку набок (чтоб днища были слева и справа) и рассмотрим её осевое сечение по осям X, Y. Ширина сечения  $2a$  (где, конечно,  $a > 0$ ), а высота сечения меняется. На краях (там, где днища) высота ПОЛУСЕЧЕНИЯ равна  $b$ , в середине же она равна  $b+c$ . Сечение сверху и снизу

ограничена одинаковыми кусками параболы. При расчёте объёма днище бочки не вышибать!