

Лекция 1

I. Введение Курс посвящен топологии Хобанла и Херфа-Фивера узлов, основной упор будет делаться не на детали их определений (которые, впрочем, будут введены в начале работы), а на мощность этих инвариантов по сравнению с ранее известными, а на их применение в задачах трехмерной и четырехмерной топологии. Так, первые три лекции будут посвящены следующему результату.

Обозначим через $g_3(K)$ (соотв. $g_4(K)$) минимальный род поверхности с границей на узле K , надко вложенной в S^3 (соотв. D^4). Ясно, что для любого K $g_3(K) \geq g_4(K)$, известно, когда неравенство строгое.

Теор Для взаимно простых m и n обозначим через $T(m, n)$ торический узел типа (m, n) . Тогда

$$g_3(T(m, n)) = g_4(T(m, n)) = \frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

Утверждение про трехмерный род сравнительно простое и будет доказано в сегодняшней лекции. Утверждение про четырехмерный род значительно сложнее и довольно долго оно было открыто

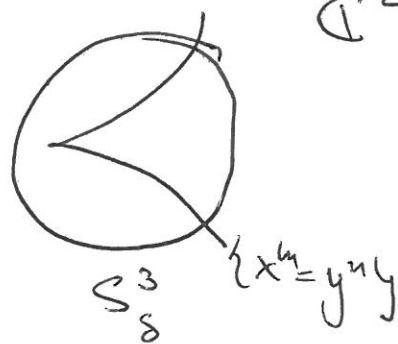
проблемой, известной как гипотеза Минковского. ⁽¹¹⁾
 И рассказу о её доказательстве при помощи
 волновой Хобанова, принадлежащий Джеймсу
 Расмуссену. Общедоступное доказательство таково:

- Превращается в одна поверхность в S^3
 с границей на $T(m, n)$ рода $g_{m, n} = \frac{(m-1)(n-1)}{2}$
- При помощи волновой Хобанова
 строится инвариант узла $S(K)$ и доказываются
 неравенство $|S(K)| \leq 2g_4(K)$
- Проверяется, что $S(T_{m, n}) = (m-1)(n-1)$, и

$$g_{m, n} = \frac{1}{2}|S(K)| \leq g_4(K) \leq g_3(K) \leq g_{m, n}.$$

Как построить поверхность рода $g_{m, n}$? Все
 зависит от того для каких m, n мы хотим построить
 поверхность, а сейчас, следуя Лектору, опишем
 более геометрический подход.

$\mathbb{C}^2$ Рассмотрим отображение $f: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$,
 $f(x, y) = x^m - y^n$



Тогда: 1) Для доказательства дано S
 $\{f=0\} \cap S^3 = T(m, n)$

2) Для $\varepsilon \ll \delta$ $\{f=\varepsilon\} \cap S^3_\delta = T(m, n)$

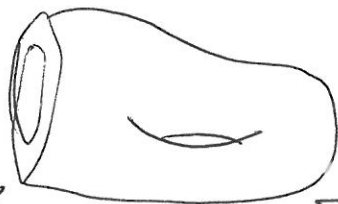
3) $\{f=\varepsilon\} \cap D^4_\delta$ — малая поверхность в D^4_δ с
 границей на $T(m, n)$

рога $\frac{(m-1)(n-1)}{2} = g_{m, n}$

4) $\left\{ \frac{f}{|f|} = 1 \right\} \subset S^3$ - малая сфера
в S^3 тогда гм.ч.

(11)

Линейный Александера



Пусть K - узел в S^3 , а K

Σ - ориентированная поверхность в S^3 с границей на K .

На $H_1(\Sigma)$ есть естественная билинейная (несимметричная) форма, т.е. форма Зейферта

$$\langle x, y \rangle = lk(x^+, y),$$

где lk - коэффициент зацепления в S^3 , а x^+ - образ цикла x в положительном направлении по отношению к Σ .

Факт $\langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle = (x, y)$ - индекс пересечения x и y .

Определим $\Delta(t) = \det(S - tS^T)$, где S - матрица $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в некотором базисе $H_1(\Sigma)$.

Темп. $\Delta(t)$ - инвариант узла K , он не зависит от выбора поверхности Зейферта Σ .
Линейный $\Delta(t)$ называется линейным Александера K . Заметим, что $2g(\Sigma) \geq \deg \Delta(t)$

Следствие $2g_3(K) \geq \deg \Delta(t)$.

(11)

Факт $\Delta(T(m, n)) = \frac{(1-t)(1-t^{mn})}{(1-t^m)(1-t^n)}$, и

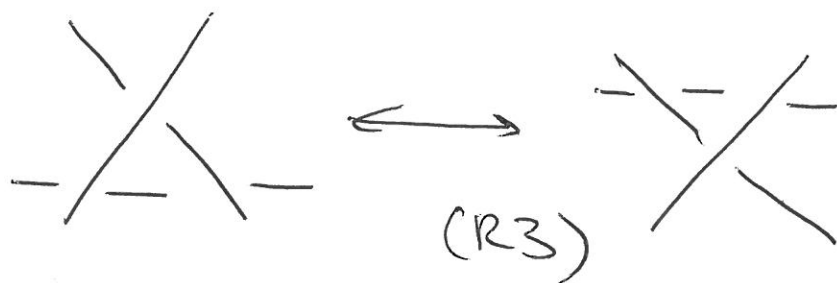
$\deg \Delta = 1 + mn - m - n = (m-1)(n-1).$

Следствие $\frac{(m-1)(n-1)}{2} \leq g_3(T(m, n)) \leq \frac{(mn)(n-1)}{2}.$

К сожалению, известен Александров-Фукс из известных инвариантов узлов, генерирующих все идеалы коммутативного кольца. Для бесконечной группы инвариантов над полем не существует.

Рассмотрим идеалы узла по абелевой группе. Обычно предполагается. Получим идеалы, но с некоторыми пересечениями.

Теорема Райсман-Сира Две параллельные хорды узла имеют одинаковую длину, если они являются хордами идеального узла.

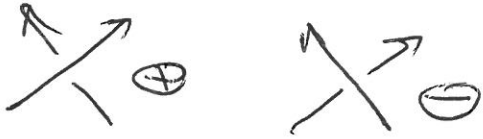


Тест Множителя Джонса сохраняется при $R1-R3$

(11)

$$J(L) = (-1)^{n_-} q^{n_+ - 2n_-} \langle L \rangle,$$

где $n_{\pm}$ - число положительных (соот. отрицательных) пересечений в ориентированном графиде L .



Множитель Хорфа

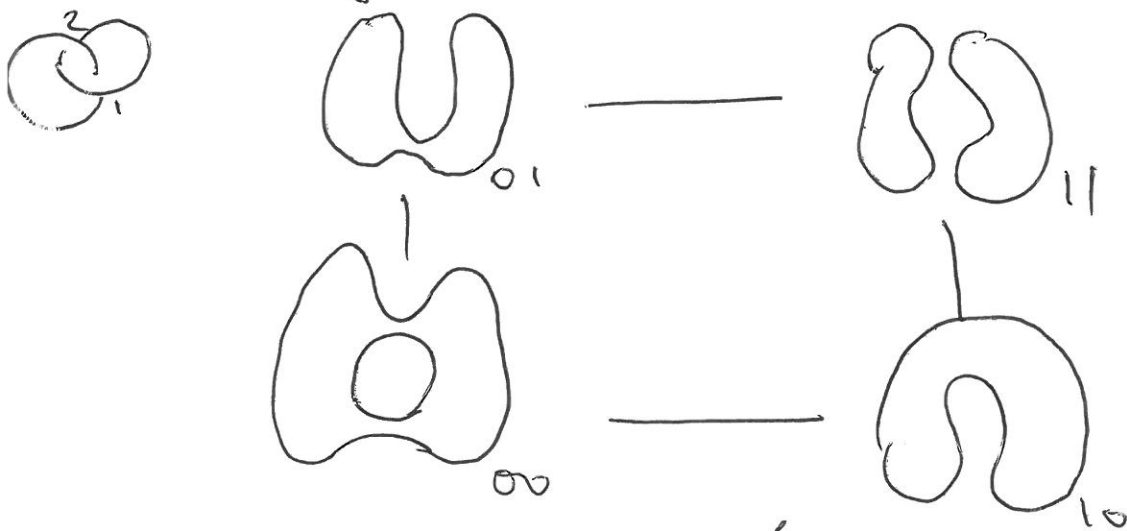
$$a \nearrow \searrow - a^{-1} \nwarrow \nearrow = (q - q^{-1}) \nearrow \nearrow$$

Важно проверить, что при $a = q^2$ получим Джонса, а при $a = 1$ - Александера.

Есть много других важных инвариантов, других и множителей Джонса: инварианты Васильева, инварианты Ренне-Турова - Тураева и т.д.

II. Теорема Хобанова Скобку Кауфмана удобно

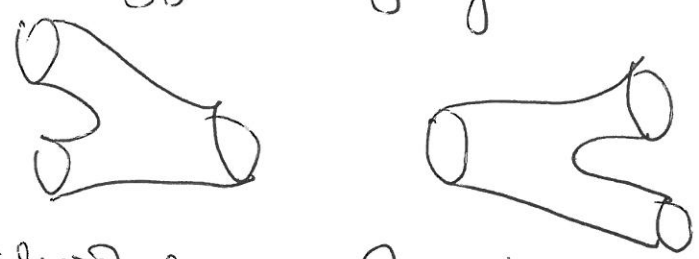
вычислять так: разрезаем все пересечения в графиде, и зашнуровываем их ~~по~~ вершинами $\{0, 1\}^n$ так, что $\cap (=0) > \cup (=1)$. Например, для зашнуровки Хорфа получим:



Тогда по определению

$$\langle L \rangle = \sum_{x \in \{0,1\}^n} (-q)^{|x|} (q + q^{-1})^{\# \text{связности}(x)}.$$

Видно, что реда куда соответствует ~~физический~~ координаты между наборами связности, каждый из которых или сдвигает где связности в одну, или создает из одной связности две.



Рассмотрим алгебру ~~Келли~~ $A = \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^2)}$ со связностью:

$$\begin{aligned} \mu: A \otimes A &\rightarrow A & \mu(1 \otimes 1) &= 1 & \mu(x \otimes 1) &= x \\ & & \mu(1 \otimes x) &= x & \mu(x \otimes x) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta: A &\rightarrow A \otimes A & \Delta(1) &= 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \\ & & \Delta(x) &= x \otimes 1 \end{aligned}$$

$$i: \mathbb{Q} \rightarrow A, \quad i(1) = 1$$

$$\varepsilon: A \rightarrow \mathbb{Q}, \quad \varepsilon(1) = 0, \quad \varepsilon(x) = 1.$$

Эти связности удовлетворяют естественным соотношениям: μ коассоциативно и ассоциативно, Δ коассоциативно и коассоциативно, и



$$\Delta \circ \mu = (\Delta \otimes 1) \circ (\Delta \otimes 1)$$

(11)

Алгебра A с такими операциями называется фредериксовым алгеброй.

В куде разделение составили катом
 берим $\mathbb{E}A \otimes \#$ операции, а ребра — отображения
 и или Δ . Обозначим эти отображения как Φ ребер.
Фант Получившаяся графика кодирует
 входы и выходы графа.

Каждое ребро соответствует элементу 0 на 1
 в некотором месте. Другими словами, ребро
 как $(-1)^{\text{знак}} \text{ ребро}$. Тогда получим

$$d = \sum_{\text{ребра}} (-1)^{\text{знак}} \Phi_{\text{ребро}}.$$

Класс $d^2 = 0$, т.е. d закрывает циклы.
 Это означает, что d закрывает циклы.
 Наконец, для записи кода получим:

