Лекция 2

Зададим градуировки на комплексе Хованова.
Алгебра A градуирована так, что $\deg_q(1) = 1$
$\deg_q(x) = -1$.
Заметим, что m и Δ имеют степень (-1).
Определим $\deg_q$ на комплексе как $\deg_q\big|_{A_v} + |v|$,
где $A_v = A^{\otimes \# \text{окр.}(v)}$
для $v \in \{0,1\}^n$.
Тогда так определено $\deg_q$ сохраняется дифференциалом.
Далее, $\deg_h = |v|$ — гомологическая градуировка.
Итак, комплекс Хованова биградуирован и
$$\sum_{i,j} (-1)^j Kh^{i,j} q^i = \sum_v (-1)^{|v|} \cdot q^{|v|} \cdot (q+q^{-1})^{\#\text{окр}(v)} =$$
(где $Kh^{i,j}$ — компонента с $\deg_q = i$ и $\deg_h = j$). $= \langle L \rangle$.

Говорят, что гомологии Хованова "категорифицируют" скобку Кауфмана и многочлен Джонса.

<u>Теорема</u> Гомологии Хованова — инвариант узла, т.е. они сохраняются при R1—R3.

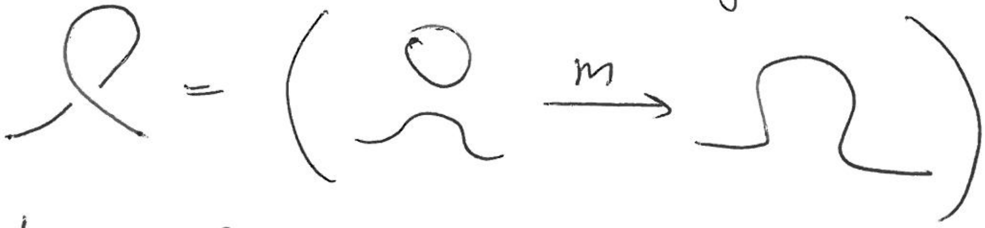
<u>Лемма</u> Пусть C — комплекс и $C' \subset C$ — подкомплекс.
1) Если $H^*(C') = 0$, то $H^*(C) \cong H^*(C/C')$

2) Если $H^*(C/C')=0$, то $H^*(C)=H^*(C')$.

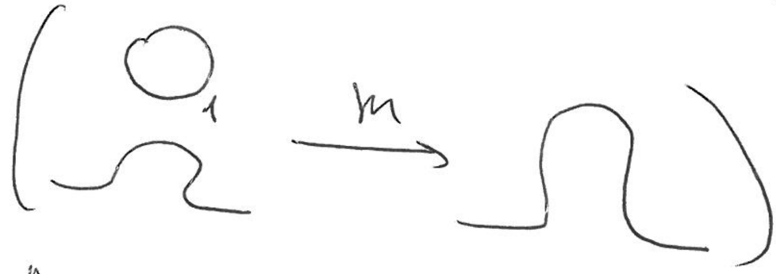
<u>Д-во</u> $0 \to C' \to C \to C/C' \to 0$

соответствует длинной точной последовательности.

~~[illegible]~~ (R1)

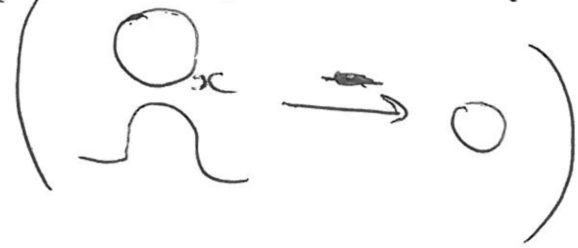


Рассмотрим $C' =$

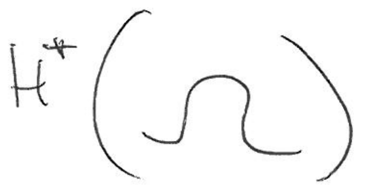


Т.к. $m: 1\otimes A \to A$ — изоморфизм, то $H^*(C')=0$.

Поэтому $H^*(C)=H^*(C/C')=H^*$

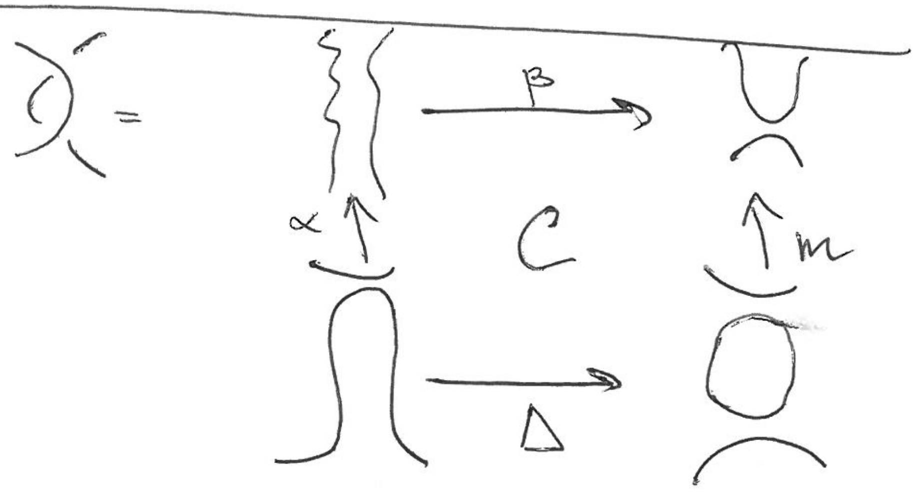


$\simeq H^*$



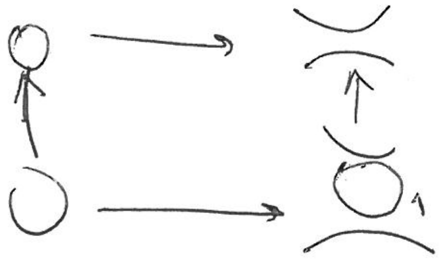
.

(R2)



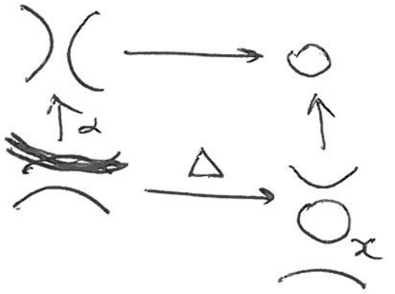
Заметим, что мы не знаем тип отображений ~~α~~ α и β (это или m, или Δ), но мы можем использовать прием из предыдущего случая

$C' =$



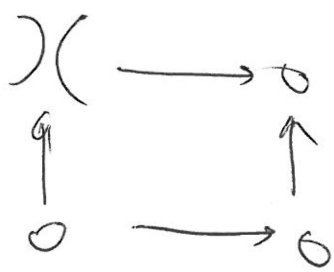
ацикличен $\Rightarrow H^*(C) = H^*(C/C')$

$C/C' =$

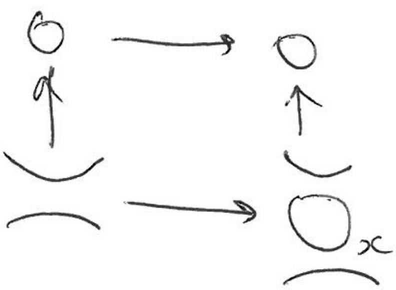


(здесь $\bigcirc_x = \frac{A}{\langle 1 \rangle} \simeq \langle x \rangle$)

$C'' =$



$(C/C')/C'' =$



ацикличен $\Rightarrow H^*(C/C') = H^*(C'')$

<u>Замеч.</u> Мы использовали тот факт, что сквозные отображения — изоморфизм.

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\Delta} & A\otimes A & \xrightarrow{\pi} & A\otimes\langle x\rangle \overset{\shortparallel}{} A\otimes A/A\otimes\langle 1\rangle \\ 1 & \longrightarrow & 1\otimes x + x\otimes 1 & \longrightarrow & 1 \\ x & \longrightarrow & x\otimes x & \longrightarrow & x. \end{array}$$

Доказательство R3 оставим в качестве упражнения (см., например, D. Bar-Natan, "On Khovanov's categorification of the Jones polynomial")

Гомологии Λ_4 Е.С. Ли предложила ~~[illegible]~~ конструкцию

гомологий узлов, связанную с немного другой двумерной фробениусовой алгеброй. А именно:

$$\tilde{m}(1\otimes 1)=1 \qquad \tilde{\Delta}(1)=1\otimes x+x\otimes 1$$
$$\tilde{m}(1\otimes x)=\tilde{m}(x\otimes 1)=x \qquad \tilde{\Delta}(x)=x\otimes x+\underbrace{1\otimes 1}_{!}$$
$$! \; \tilde{m}(x\otimes x)=1$$

Восклицательным знаком обозначены новые по сравнению с конструкцией Хованова слагаемые.

Можно проверить, что $(\tilde{m},\tilde{\Delta})$ тоже задают фробениусову алгебру, и, соответственно, по кубу разрешений можно построить комплекс с новым дифференциалом d_{Lee}, использующим $\tilde{m}$ и $\tilde{\Delta}$ вместо m и Δ. Ясно, что $d_{Lee}=d_{Kh}+d_{!}$, где $d_{!}$ учитывает члены, обозначенные !.

Теорема (Lee) 1. d_{Kh} и $d_{!}$ антикоммутируют.

2. d_{Lee} - инвариант узла и сохраняется при R1-R3

Д-во Аналогично предыдущему.

Сл-вие Существует спектральная последовательность, начинающаяся с d_{Kh} и сходящаяся к d_{Lee}.

Заметим, что $(\tilde{m},\tilde{\Delta})$ ~~[illegible]~~ задают не градуированную, а фильтрованную фробениусову алгебру.

Теорема (~~Лее~~) Размерность гомологий Ли зацепления с k компонентами равна 2^k.

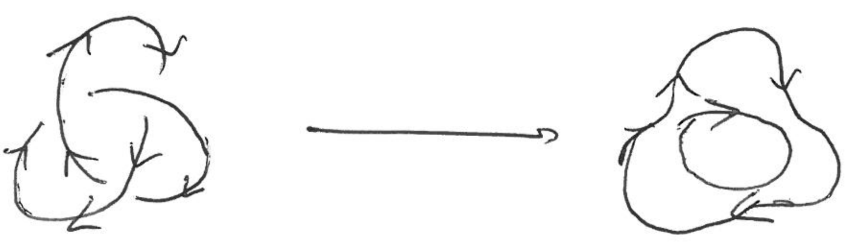
Таким образом, гомологии Ли гораздо проще гомологий Хованова. Чтобы доказать эту теорему, введем $a = x+1$ и $b = x-1$. Ясно, что

$$\tilde{m}(a\otimes a) = 2a,\ \tilde{m}(b\otimes b) = 2b,\ \tilde{m}(a\otimes b) = \tilde{m}(b\otimes a) = 0$$

$$\tilde{\Delta}(a) = a\otimes a \quad \text{и} \quad \tilde{\Delta}(b) = b\otimes b.$$

Таким образом, мы разложили нашу фробениусову алгебру в прямую сумму двух.

Д-во теоремы Построим сначала 2^k генераторов в H^*_{Lee}. Каждый из них будет соответствовать выбору ориентации на компонентах зацепления. Для ориентированной диаграммы рассмотрим ориентированное разрешение (соотв. 1-разрешение для отрицательных перекрестков и 0-разрешение для положительных).



Каждой окружности в разрешении сопоставим ~~[illegible] остаток по модулю~~ инвариант в $\mathbb{Z}_2$:

(число окр-тей, отделяющей ее от ∞) + $\begin{cases} 1, \text{если } \circlearrowright \\ 0, \text{если } \circlearrowleft \end{cases}$ mod 2

—"—

Сопоставим окружности a, если это число равно 0, и b иначе.

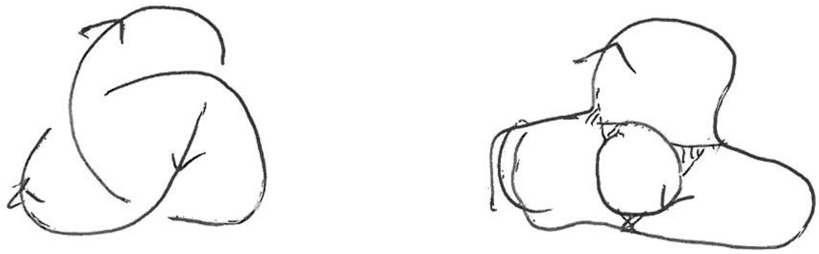
<u>Лемма</u> Для каждого перекрестка ~~...~~ окружности ориентированы одинаково и буквы на них различны.

Назовем все такие мономы <u>каноническими генераторами</u>. Легко видеть, что $d_{Kh} = d^*_{Kh} = 0$ для них, где d^*_{Kh} — сопряженный к d_{Kh} относит. естественного скалярного произведения дифференциал. Поэтому (теория Ходжа!) они представляют нетрив. классы когомологий. Чтобы доказать ~~...~~, что других генераторов нет, рассмотрим разрешение одного из перекрестков. Будем доказывать утверждение по индукции по числу перекрестков. Рассмотрим

$$C(D) \sim \left(C(D_0) \longrightarrow C(D_1)\right),$$

допустим, что D_0 — узел, а D_1 — зацепление с 2 компонентами. Тогда $|H_{Kh}(D_0)| = 2$, $|H_{Kh}(D_1)| = 4$, по предположению индукции. Но легко проверить, что оба генератора $H(D_0)$ отображаются в соответствующие генераторы $H(D_1)$, поэтому $\operatorname{rk} H(D) \leq 2$. ∎

<u>Замечание</u> Ориентированное разрешение естественно соответствует поверхности Зейферта узла:



Соединяя перекрёстки в ориентированном разрешении перекрученными на пол-оборота ленточками, легко видеть, что получается ориентированная поверхность с краем на K. Мы докажем в следующий раз, что для <u>положительных</u> узлов (т.е. таких, у которых все перекрёстки положительны) эта поверхность реализует минимальные $g_3(K)$ и $g_4(K)$, которые легко вычислить по диаграмме.