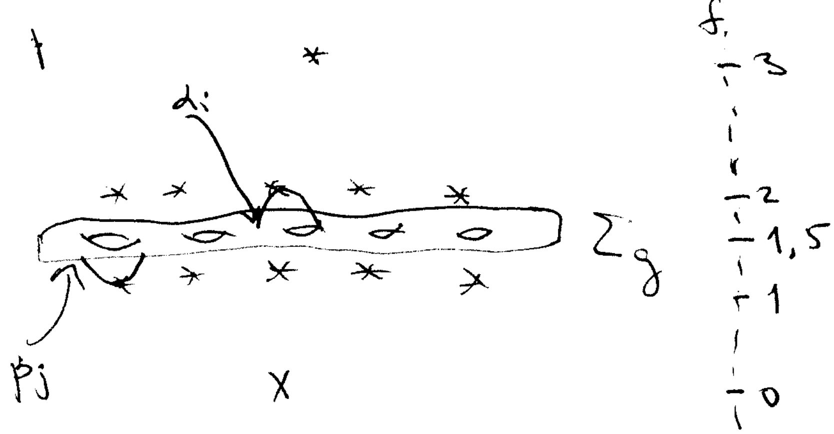
Лекция 4

№4

Начиная с этой лекции, мы будем говорить о гомологиях ~~[illegible]~~ Хегора-Флоера трехмерных многообразий и узлов в них. В частности, гомологии Хегора-Флоера узлов в S^3 можно рассматривать как "категорификацию" многочлена Александера. С другой стороны, возможность определить эти гомологии для трехмерных многообразий позволяет эффективно вычислять эти гомологии в большом числе примеров и применять для доказательства глубоких результатов в трехмерной и четырехмерной топологии.

Пусть M — замкнутое, ориентированное трехмерное гладкое многообразие. Рассмотрим функцию Морса f на нем, у которой 1 максимум, 1 минимум, g критических точек индекса 1 и g критических точек индекса 2 (т.к. $\chi(M)=0$, то критических точек индекса 1 и 2 должно быть поровну). Можно считать, что f т.н. самоиндексирующаяся, т.е. значение f в критической точке индекса i равно i. Тогда $f^{-1}(1,5)=\Sigma_g$ — гладкая поверхность рода g.



Л4

Притягивающие многообразия точек индекса 1 пересекают Σ_g по g непересекающимся окружностям $\beta_1 \dots \beta_g$. Аналогично, отталкивающие многообразия точек индекса 2 пересекают Σ_g по g непересекающимся окружностям $\alpha_1, \dots \alpha_g$.
Тройка $(\Sigma_g, \underline{\alpha}, \underline{\beta})$ (где $\underline{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_g)$, $\underline{\beta} = (\beta_1 \dots \beta_g)$) называется диаграммой Хегора многообразия M.

<u>Факт</u> $(\Sigma_g, \underline{\alpha}, \underline{\beta})$ полностью определяет M.

<u>Д-во:</u> Определим
$$M_+ = f^{-1}([1{,}5; +\infty))$$
$$M_- = f^{-1}((-\infty; 1{,}5])$$

Тогда M_+ и M_- — полнотория рода g с границей на Σ_g. Они определяются тем, что в M_+ окружности α_i заклеиваются дисками, а в M_- окружности β_i заклеиваются дисками.

<u>Замечание</u> Можно считать, что M_+ и M_- — два экземпляра стандартного полнотория рода g, склеенные по диффеоморфизму Σ_g. Этот диффеоморфизм

Кроме того, в дальнейшем нам будет нужно выбрать точку $W \in \Sigma_g$, не лежащую на α_i или β_i. (14)

Упражнение $H_1(M) = \dfrac{H_1(\Sigma)}{\langle \alpha_i, \beta_j \rangle}$.

Для конструкции гомологий Флоера мы используем g-ую симметрическую степень Σ_g, $Sym^g(\Sigma_g) = \dfrac{\Sigma_g \times \ldots \times \Sigma_g}{S_g}$.

Лемма $Sym^g(\Sigma_g)$ – гладкое $(2g)$-мерное многообразие.

Доказательство Выберем комплексную структуру на Σ_g, тогда локально $\Sigma_g \sim \mathbb{C}$. Докажем, что $Sym^k \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^k$. Действительно, если $(z_1 \ldots z_k) \in Sym^k \mathbb{C}$ – неупорядоченный набор из k точек, то можно рассмотреть многочлен

$(z - z_1) \cdot \ldots \cdot (z - z_k) = z^k + a_1 z^{k-1} + \ldots + a_k$.

Отображение $(z_1 \ldots z_k) \longmapsto (a_1 \ldots a_k)$ дает искомый изоморфизм между $Sym^k \mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^k$, и $Sym^k \mathbb{C}$ гладкое.

Замечание Аналогично можно построить комплексную и симплектическую структуру на $Sym^k \Sigma_g$.

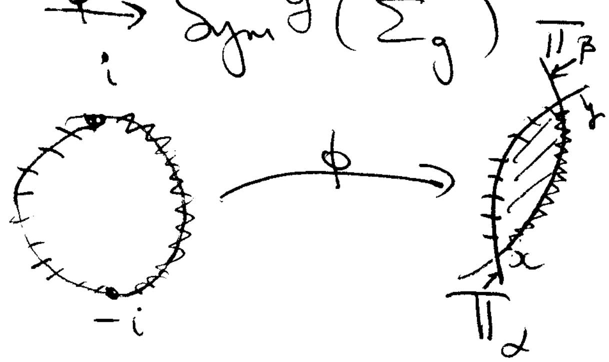
Опр Y^{2k} называется симплектическим, если существует 2-форма ω т.ч. $d\omega = 0$ и $\omega^k > 0$.
$L \subset Y$ называется лагранжевым, если $\dim L = k$ и $\omega|_L = 0$.

Рассмотрим тор $\mathbb{T}_\alpha = \ldots$

Факт Можно выбрать симплектическую структуру на $Sym^g(\Sigma_g)$ так, что $\mathbb{T}_\alpha$ и $\mathbb{T}_\beta$ — лагранжевы торы.

Нас будут интересовать точки пересечения $\mathbb{T}_\alpha$ и $\mathbb{T}_\beta$. По определению, $x \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ соответствует набору подстановки $\sigma \in S_g$ и набора из g точек пересечения $x_i \in \alpha_i \cap \beta_{\sigma(i)}$.

Опр Пусть x и y — две точки пересечения $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$. ($J$-) голоморфный диск между x и y — отображение $D^2 \xrightarrow{\phi} Sym^g(\Sigma_g)$ такое, что



- ϕ переводит $-i$ в x и i в y
- ϕ переводит левую полуокружность в $\mathbb{T}_\alpha$ и правую полуокружность в $\mathbb{T}_\beta$
- ϕ голоморфно относительно комплексной структуры на $Sym^g(\Sigma_g)$ (соотв. почти комплексной структуры J).

Пусть $\mathcal{M}(x,y)$ — пространство модулей таких отображений. На нем есть естественное действие вещественной прямой гиперболическими автоморфизмами D^2, сохраняющими $\pm i$:

Пусть $\widehat{\mathcal{M}}(x,y) = \mathcal{M}(x,y)/\mathbb{R}$.

<u>Факт</u> Для общей почти комплексной структуры J на $\mathrm{Sym}^g(\Sigma_g)$ пространство модулей гладкое и имеет "ожидаемую" размерность $\mu(\varphi)$, где μ – индекс Маслова. Соответственно,
$\dim \widehat{\mathcal{M}}(x,y,\varphi) = \mu(\varphi) - 1$.

Наконец, пусть $D_w = \{w\} \times \mathrm{Sym}^{g-1}(\Sigma_g)$, где w – отмеченная точка на Σ_g. Это гладкий дивизор в Σ_g. Пусть $n_w(\varphi) = \varphi \circ D_w$. Если φ – голоморфный диск, т.к. D_w – комплексное подмногообразие, то $\varphi \circ D_w \geq 0$.

<u>Опр.</u> Комплекс $CF^-(M)$ Хегора-Флоера M имеет образующие $x \in \mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta$ (над $\mathbb{Z}[U]$, где U – формальный параметр) и дифференциал, задаваемый следующей формулой:

$$\partial x = \sum_{\substack{y,\varphi:\\ \mu(\varphi)=1}} \# \widehat{\mathcal{M}}(x,y,\varphi) \cdot y \cdot U^{n_w(\varphi)}$$

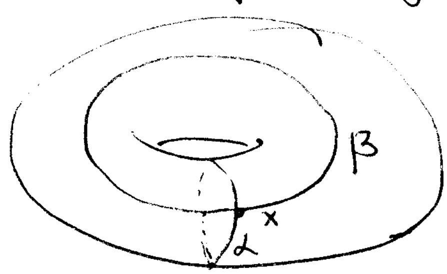
Условие $\mu(\varphi)=1$ гарантирует, что (возможно, после деформации почти комплексной структуры) $\widehat{\mathcal{M}}(x,y,\varphi)$ – конечное множество, и $\# \widehat{\mathcal{M}}(x,y,\varphi)$ – число точек этого множества со знаками.
Умножение на $U^{n_w(\varphi)}$ "регуляризует" определение ∂,

Все теоремы ниже принадлежат П. Озвату и (14)
З. Сабо, если не сказано иного (P. Ozsváth, Z. Szabó).

<u>Теор</u> $\partial^2 = 0$, гомологии ∂ обозначаются $HF^-(M)$.

<u>Теор</u> $HF^-(M)$ не зависит от выборов, использованных в определении (выбор разбиения Хегора, выбор деформации комплексной структуры и т.д.) и является инвариантом трехмерного многообразия M.

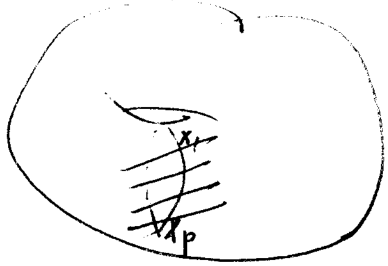
<u>Пример</u> Рассмотрим диаграмму Хегора S^3 рода 1:



Здесь α — параллель тора, β — его меридиан, $g=1$, т.е. $Sym^1(\Sigma) = \Sigma$ и $\mathbb{T}_\alpha = \alpha$, $\mathbb{T}_\beta = \beta$, $\mathbb{T}_\alpha \cap \mathbb{T}_\beta = \{x\}$. Таким образом, в комплексе единственный генератор x, и $\partial x = 0$. Соответственно, $HF^-(S^3) = \mathbb{Z}[U]\langle x \rangle$.

<u>Пример</u> Рассмотрим линзовое пространство $L(p,q)$. По определению, это фактор $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ по действию $\mathbb{Z}_p$: $(z_1, z_2) \longrightarrow (e^{\frac{2\pi i}{p}} z_1, e^{\frac{2\pi i q}{p}} z_2)$, где НОД$(p,q) = 1$. Можно проверить, что $L(p,q)$ тоже имеет диаграмму Хегора рода 1,

Ясно, что ~~[illegible]~~ пересечение α и β состоит из p точек $x_1 \ldots x_p$. Можно проверить, что



между x_i нет голоморфных дисков, и $\partial x_i = 0$. Поэтому

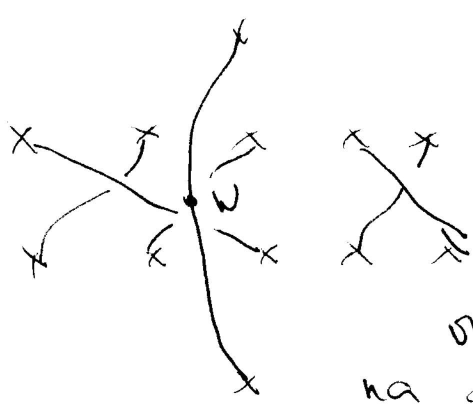
$$HF^-(L(p,q)) \simeq \mathbb{Z}[U]\langle x_1\rangle \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}[U]\langle x_p\rangle \cong \mathbb{Z}[U]\langle x_1, \ldots, x_p\rangle.$$

Обобщением этого разложения является следующая теорема:

<u>Теор</u> Существует каноническое разложение

$$HF^-(M) = \bigoplus_{s \in H_1(M)} HF^-(M, s).$$

<u>Идея док-ва</u>: Поставим в соответствие образующей $x \in T_\alpha \cap T_\beta$ класс в $H_1(M)$. Каждая такая образующая соответствует набору из g траекторий градиента функции Морса между критическими точками индексов 1 и 2.



Кроме того, w задает траекторию между точками индексов 0 и 3.

Выкинем из M трубчатые окрестности всех этих траекторий, на дополнении $\operatorname{grad} f$ задает векторное поле без особенностей. Это поле можно продолжить в трубчатую окрестность, т.к. каждая траектория

Таким образом, получим векторное поле на M без особенностей. Так как M параллелизуемо, то такое поле задает отображение $h: M \to S^2$, гомотопический класс которого определяется

$$h^*[S^2] \in H^2(M) \simeq H_1(M).$$

Таким образом, каждому генератору в $CF^-(M)$ мы поставили в соответствие класс в $H_1(M)$.

Теперь утверждение следует из следующей леммы:

Лемма Если x и y соответствуют разные классы в $H_1(M)$, то между x и y нет голоморфного диска (т.е. ∂x не содержит y).

Пример $H_1(L(p,q)) = \mathbb{Z}_p$, и $\forall s \in \mathbb{Z}_p$

$$HF^-(L(p,q), s) \cong \mathbb{Z}[U].$$

Теорема Пусть M — многообразие с границей T^2, и $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — кривые в ∂M такие, что $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \gamma_2 \cap \gamma_3 = \gamma_3 \cap \gamma_1 = 1$. Пусть Y_i — результат заклейки M полноториями так, что γ_i заклеиваются дисками. Тогда есть точный треугольник:

$$\begin{tikzcd}
CF^-(Y_1) \arrow[rr] & & CF^-(Y_2) \arrow[dl] \\
& CF^-(Y_3) \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$