

С. А. Логвенков П. А. Мышкис В. С. Самовол

Сборник задач по высшей математике

Учебное пособие для студентов
социально-управленческих специальностей

Москва
Издательство МЦНМО
2014

УДК 512 (075.8)

ББК 22.143

Л69

Авторы:

Логвенков Сергей Алексеевич,
доцент кафедры высшей математики НИУ ВШЭ;
Мышкис Петр Анатольевич,
доцент кафедры высшей математики НИУ ВШЭ;
Самовол Владимир Симхович,
профессор кафедры высшей математики НИУ ВШЭ.

Рецензенты:

доктор физико-математических наук профессор Белолипецкий А. А.
(Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова),
кандидат физико-математических наук доцент Андреева Т. В.
(Московский государственный университет путей сообщения)

Логвенков С. А., Мышкис П. А., Самовол В. С.

Л69 Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие
для студентов социально-управленческих специальностей. —
М.: МЦНМО, 2014. — 176 с.

ISBN 978-5-4439-0282-1

Сборник задач составлен в соответствии с программами курсов по математическому анализу и линейной алгебре для подготовки студентов, обучающихся по специальностям: менеджмент, социология, государственное и муниципальное управление, психология, прикладная политология. Содержит задачи по следующим разделам: элементы векторной алгебры и аналитической геометрии, матрицы и определители, системы линейных уравнений, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, дифференциальное исчисление функций нескольких переменных, двойные интегралы, простейшие обыкновенные дифференциальные уравнения.

ББК 22.143

ISBN 978-5-4439-0282-1

© Коллектив авторов, 2014.

© МЦНМО, 2014.

Предисловие

Настоящий сборник задач включает разделы математики, которые, как правило, изучаются на первом курсе. Сюда относятся векторная алгебра с элементами аналитической геометрии, линейная алгебра, а также основы дифференциального и интегрального исчисления функций одной и нескольких переменных. В сборник также включен раздел, посвященный основным методам решения простейших обыкновенных дифференциальных уравнений.

Предлагаемый задачник составлен в соответствии с программами таких курсов, как «Алгебра и анализ» и «Математика», читаемых на различных факультетах Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ). Изложение материала ориентировано на углубленное изучение фундаментальных математических идей и методов, широко применяемых в исследованиях социально-экономических процессов и явлений. Целью создания учебника является выработка у студентов четких практических навыков решения базовых задач, традиционно относящихся к курсам алгебры и математического анализа. Помимо стандартных задач в сборник включены задачи, требующие для решения более глубокого понимания теоретического материала. Все разделы задачника снабжены ответами.

При подборе примеров и задач привлекались разнообразные источники и, прежде всего, те книги, которые представлены в приведенном в конце задачника библиографическом списке. Сборник задач может оказаться полезным также и преподавателям при составлении контрольных и экзаменационных работ.

І. АЛГЕБРА

Глава 1

Векторная алгебра и начала аналитической геометрии

Справочный материал и примеры решения задач

1. Расстояние r между точками $A = (x_1; y_1; z_1)$ и $B = (x_2; y_2; z_2)$ определяется по формуле

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Соответственно, длина $|\overrightarrow{AB}|$ вектора \overrightarrow{AB} вычисляется как расстояние между точками A и B .

Длина $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ вычисляется по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Кроме того, верна формула:

$$|\lambda \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|,$$

где λ — любое число. Ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} называются коллинеарными, если выполнено равенство $\vec{b} = \lambda \vec{a}$.

2. Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторов

$$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1) \quad \text{и} \quad \vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$$

определяется следующей формулой:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Соответственно, длина $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a} = (x; y; z)$ может быть вычислена как $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

3. Скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ может быть определено также следующим образом:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \beta,$$

где β — угол между данными векторами. Эта же формула позволяет вычислять угол между векторами.

4. *Плоскость в трехмерном пространстве* может быть задана уравнением $Ax + By + Cz = D$. Здесь вектор $\vec{n} = (A; B; C)$ перпендикулярен плоскости и называется вектором нормали. Уравнение плоскости, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$, с вектором нормали $\vec{n} = (A; B; C)$ может быть написано в следующем виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

5. *Прямая в трехмерном пространстве* может быть задана параметрически и канонически.

Параметрический вид уравнения прямой:

$$x = x_0 + ta, \quad y = y_0 + tb, \quad z = z_0 + tc.$$

Здесь $(x_0; y_0; z_0)$ — точка, лежащая на прямой, $(a; b; c)$ — направляющий вектор прямой, t — числовой параметр.

Канонический вид уравнения этой же прямой:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

6. *Прямая* может быть также задана как линия пересечения двух плоскостей, т. е. как решение системы двух линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2. \end{cases}$$

Задача 1. Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точки $A = (2; 2; 5)$ и $B = (0; 2; -4)$.

Решение. Направляющим вектором прямой является вектор $\vec{AB} = (-2; 0; -9)$, следовательно, каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - 2}{-2} = \frac{y - 2}{0} = \frac{z - 5}{-9}.$$

Задача 2. Найти точку пересечения E двух прямых, первая из которых проходит через точки $A = (1; -2; 5)$ и $B = (2; 1; 4)$, а вторая — через точки $C = (6; 3; -2)$ и $D = (4; 2; 1)$.

Решение. Составим параметрические уравнения этих прямых. При этом направляющий вектор первой прямой — это вектор $\vec{AB} = B - A = (1; 3; -1)$, направляющий вектор второй прямой — вектор

$\overrightarrow{CD} = D - C = (-2; -1; 3)$. Тогда уравнения прямых

$$\begin{aligned} x &= 1 + u, & y &= -2 + 3u, & z &= 5 - u; \\ x &= 6 - 2v, & y &= 3 - v, & z &= -2 + 3v. \end{aligned}$$

Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 1 + u = 6 - 2v, \\ -2 + 3u = 3 - v, \\ 5 - u = -2 + 3v. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $u = 1$, $v = 2$. Подставляя полученные значения u и v в уравнения любой из прямых, находим точку их пересечения: $E = (2; 1; 4)$.

Заметим, что если бы полученная система уравнений не имела решения, то это означало бы, что данные прямые не пересекаются, т. е. параллельны или скрещиваются. Чтобы в этом случае определить расположение указанных прямых, целесообразно рассмотреть их направляющие векторы. Если они коллинеарны, то прямые параллельны или совпадают, а если эти векторы не коллинеарны, то прямые скрещиваются.

Задача 3. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: $A = (1; 1; 1)$, $B = (2; -1; 1)$ и $C = (2; 2; 0)$.

Решение. Найдем вектор нормали $\vec{n} = (a; b; c)$. Этот вектор должен быть перпендикулярен векторам $\overrightarrow{AB} = (1; -2; 0)$ и $\overrightarrow{AC} = (1; 1; -1)$, следовательно, скалярное произведение вектора нормали и каждого из этих двух векторов должно равняться нулю. Получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} a - 2b = 0, \\ a + b - c = 0. \end{cases}$$

Решение системы имеет вид $a = 2b$, $c = 3b$. Полагая $b = 1$, получаем вектор нормали $\vec{n} = (2; 1; 3)$. Уравнение плоскости имеет вид

$$2(x - 1) + (y - 1) + 3(z - 1) = 0, \quad \text{или} \quad 2x + y + 3z = 6.$$

Заметим, что вектор нормали определен неоднозначно. Впрочем, и уравнение плоскости определено с точностью до умножения на ненулевое число.

Задача 4. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной прямой $x = 5 + t$, $y = -t$, $z = -1 - 2t$ и проходящей через точку $A = (2; -1; 1)$.

Решение. Вектор нормали плоскости будет совпадать с направляющим вектором данной прямой $\vec{n} = (1; -1; -2)$. Следовательно, уравнение плоскости имеет вид

$$(x - 2) - (y + 1) - 2(z - 1) = 0, \quad \text{или} \quad x - y - 2z = 1.$$

Задача 5. Составить уравнение прямой, являющейся линией пересечения двух заданных плоскостей: $2x + y + z = 0$ и $x + 2y + z = 1$.

Решение. Объединим уравнения в систему. В ходе решения неизвестную y выберем в качестве свободного параметра, а неизвестные x и z выразим через $y = t$. Решая полученную систему уравнений методом исключений (методом Гаусса), получим решение в следующем виде: $x = -1 + t$, $y = t$, $z = 2 - 3t$. Полученное решение, очевидно, представляет собой уравнение искомой прямой, записанное в параметрической форме.

Задача 6. Исследовать следующую систему векторов на линейную зависимость и независимость:

$$\vec{a} = (1; -2; -4), \quad \vec{b} = (3; 0; 1), \quad \vec{c} = (4; -2; 1).$$

Решение. Система из трех векторов в трехмерном пространстве зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из этих векторов (взятых в качестве строк или столбцов матрицы) равен нулю.

Вычисляя определитель указанной матрицы, получаем, что он равен 24. Следовательно, система векторов линейно независима.

Задача 7. Найти ранг системы векторов

$$\vec{a} = (2; -1; -3), \quad \vec{b} = (1; 0; 1), \quad \vec{c} = (-1; 1; 3), \quad \vec{d} = (1; 1; 4).$$

Указать какой-нибудь базис в этой системе векторов. Векторы, не входящие в базис, разложить по базису.

Решение. Составим матрицу из данных векторов, взятых в качестве ее строк, и будем приводить эту матрицу методом Гаусса к треугольному (ступенчатому) виду. Предварительно для удобства расчетов поменяем порядок строк в матрице. Сбоку от каждой строки будем указывать соответствующий ей вектор (эти записи называем ниже комментарием):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} b \\ a \\ c \\ d \end{matrix}$$

Умножая первую строку на нужные коэффициенты и прибавляя ее к другим строкам, добиваемся нулей в первом столбце под первым элементом главной диагонали. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} b \\ a-2b \\ c+b \\ d-b \end{matrix}$$

Аналогичным способом с помощью второй строки получаем нули во втором столбце под вторым элементом главной диагонали. Новая матрица приобретает следующий вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} b \\ a-2b \\ (c+b) + (a-2b) = a-b+c \\ (d-b) + (a-2b) = d+a-3b \end{matrix}$$

В комментарии расшифрованы проведенные преобразования.

В последнем преобразовании добиваемся нуля в последней строке третьего столбца (под третьим элементом главной диагонали).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} b \\ a-2b \\ a-b+c \\ (d+a-3b) - 2(a-b+c) = d-a-b-2c \end{matrix}$$

Матрица приведена к требуемому виду, что свидетельствует об окончании вычислений. Первые три строки преобразованной матрицы имеют треугольный вид, что говорит о линейной независимости соответствующих векторов-строк. Эти векторы представляют собой линейные комбинации векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} . Это позволяет сделать вывод о том, что ранг исходной системы векторов равен трем, а векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} являются ее базисом. Осталось выразить вектор \vec{d} через векторы базиса. Для этого заметим, что последняя строка матрицы нулевая. Следовательно, согласно комментарию, имеем $\vec{d} - \vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c} = 0$, откуда $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c}$. Задача решена полностью.

§ 1. Операции над векторами

1.1. Даны точки $M_1(4; -2; 6)$, $M_2(1; 4; 0)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$.

1.2. Известно, что $\overrightarrow{AB} = (4; -12; z)$, причем $|\overrightarrow{AB}| = 13$. Найдите z .

1.3. Вектор \vec{a} составляет с осями Ox и Oy углы 60° и 120° . Найдите его координаты и сделайте рисунок, если $|\vec{a}| = 2$.

1.4. Найдите вектор \vec{a} , образующий с тремя базисными векторами \vec{i} , \vec{j} и \vec{k} равные острые углы, при условии, что $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$.

1.5. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:

$$A(3; -4; 7), \quad B(-5; 3; -2), \quad C(1; 2; -3).$$

Найдите его четвертую вершину D .

1.6. Даны вершины треугольника

$$A(3; -1; 5), \quad B(4; 2; -5), \quad C(-4; 0; 3).$$

Найдите длину медианы, проведенной из вершины A .

1.7. Постройте параллелограмм на векторах $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{k} - 3\vec{j}$. Определите длины его диагоналей.

1.8. Найдите длину вектора \vec{a} , если векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + 6\vec{j} - n\vec{k}$ коллинеарны.

1.9. Найдите длину вектора \vec{a} , если векторы $\vec{a} = (x; -2; 8)$ и $\vec{b} = (1; y; -4)$ коллинеарны.

1.10. Найдите все точки B , для которых векторы \overrightarrow{AB} и $\vec{c}(1; 2; 3)$ коллинеарны и $|\overrightarrow{AB}| = 2|\vec{c}|$, если задана точка $A(3; 2; 1)$.

1.11. Определите длины сторон параллелограмма, диагоналями которого служат векторы $\vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{d} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$.

1.12. Даны векторы $\vec{a} = (4; -2; 4)$ и $\vec{b} = (6; -3; 2)$. Найдите

а) $(\vec{a} + \vec{b})^2$, б) $(\vec{a} - \vec{b})^2$, в) $(2\vec{a} - 3\vec{b})(\vec{a} + 2\vec{b})$.

1.13. Найдите косинус угла между векторами \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AC} по трём заданным точкам:

а) $A(1; 2; -3; 4)$, $B(3; 4; -2; 0)$, $C(2; 4; -3; 6)$;

б) $A(2; -2; -4; 1)$, $B(4; 2; -5; 3)$, $C(2; 0; -3; 3)$;

в) $A(3; -1; 5; 2)$, $B(7; 1; 3; 3)$, $C(5; -1; 7; 3)$.

1.14. Найдите вектор \vec{b} , коллинеарный вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$.

1.15. Вектор \vec{b} , коллинеарный вектору $\vec{a} = (3; -4; -12)$, образует с осью Ox тупой угол. Зная, что $|\vec{b}| = 26$, найдите его координаты.

1.16. Вычислите

а) $(\vec{m} + \vec{n})^2$, если \vec{m} и \vec{n} — единичные векторы с углом 30° между ними;

б) $(\vec{a} - \vec{b})^2$, если $|\vec{a}| = \sqrt{8}$, $|\vec{b}| = 4$ и угол между этими векторами составляет 135° .

1.17. Даны длины векторов $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Найдите $|\vec{a} - \vec{b}|$.

1.18. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\varphi = 60^\circ$, причем $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 8$. Найдите $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

1.19. Найдите косинус угла между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если заданы три его вершины $A(2; 1; 3)$, $B(5; 2; -1)$, $C(-3; 3; -3)$.

1.20. Параллелограмм построен на векторах $\vec{AB} = (2, 5; 1; 2, 5)$ и $\vec{AD} = (0, 5; -1; 1, 5)$. Найдите угол между его диагоналями.

1.21. Векторы $\vec{AC} = (1; -1; 6)$ и $\vec{BD} = (-1; -5; 2)$ являются диагоналями параллелограмма. Найдите угол между его сторонами AB и AD .

1.22. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - \vec{n}$, где \vec{m} и \vec{n} — единичные векторы, образующие угол 120° . Найдите угол между векторами \vec{a} и \vec{b} .

1.23. Найдите угол между биссектрисами углов xOy и yOz .

1.24. Найдите длину проекции вектора \vec{a} на вектор \vec{b} :

а) $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$;

б) $\vec{a} = (-2; 3; -1; 4)$, $\vec{b} = (1; 0; 2; 2)$.

1.25. Найдите косинус угла между вектором $\vec{a}(3; -4; 5)$ и вектором \vec{b} — проекцией вектора \vec{a} на координатную плоскость xOy .

1.26. Даны два вектора $\vec{a} = (m; 3; 4)$ и $\vec{b} = (4; m; -7)$. При каких значениях параметра m векторы \vec{a} и \vec{b} будут перпендикулярны?

1.27. При каком значении параметра m векторы $\vec{a} = m\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - m\vec{k}$ перпендикулярны?

1.28. При каком значении параметра m угол между векторами $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + m\vec{k}$ равен 180° ?

1.29. Найдите $\cos(\widehat{\vec{b}, \vec{c}})$, если

а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -7$ и $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$;

б) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$ и $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$.

1.30. Найдите $\vec{a} \cdot \vec{c}$, если

а) $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 1$, $\cos(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = \frac{5}{6}$ и $\vec{c} = \vec{a} - 3\vec{b}$;

б) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, $\cos(\widehat{\vec{b}, \vec{c}}) = \frac{3}{10}$ и $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

1.31. Найдите величину параметра $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, если угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен φ :

а) $\vec{a}(5 \cos \alpha; 2 \sin \alpha; 5 \sin \alpha; 2 \cos \alpha)$, $\vec{b}(0; 2; 5; 0)$, $\varphi = \frac{3\pi}{4}$;

б) $\vec{a}(3 \sin \alpha; -5 \cos \alpha; 3 \cos \alpha; 5 \sin \alpha)$, $\vec{b}(3; 0; 0; 5)$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

1.32. Найдите величину параметра $\alpha \in [0; \pi]$, если угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен φ :

а) $\vec{a}(3 \cos \alpha; -5 \sin \alpha; 3 \sin \alpha; 5 \cos \alpha)$, $\vec{b}(3; 0; 0; 5)$ $\varphi = \frac{\pi}{7}$;

б) $\vec{a}(-3 \cos \alpha; 5 \sin \alpha; -3 \sin \alpha; 5 \cos \alpha)$, $\vec{b}(3; 0; 0; -5)$, $\varphi = \frac{\pi}{7}$.

1.33. Угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 30° . Известны длины векторов $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$. Определите косинус угла между векторами $\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$ и $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

1.34. Найдите $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, если:

а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $\vec{a} \cdot (2\vec{a} + \vec{b}) = 6$;

б) $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$ и $(\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot \vec{b} = -10$;

в) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$ и $\vec{a} \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 10$;

г) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ и $(5\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = 47$.

§ 2. Прямые и плоскости в пространстве

Элементы аналитической геометрии

2.1. Пусть $M_1(-1; -3; -7)$ и $M_2(-4; -1; -5)$. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2; -4; -2)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

2.2. Напишите уравнение плоскости, параллельной оси Ox и проходящей через точки $M_1(0; 1; 3)$ и $M_2(2; 4; 5)$.

2.3. Напишите уравнение плоскости, параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(3; 1; 0)$ и $M_2(1; 3; 0)$.

2.4. Напишите уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M(2; -4; 3)$.

2.5. Напишите уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M(0; 5; 6)$.

2.6. Составьте уравнение плоскости, отсекающей равные отрезки на осях координат и проходящей через точку $M(5; 4; 3)$.

2.7. Составьте уравнение плоскости, отсекающей на осях Oy и Oz вдвое большие отрезки, чем на оси Ox , и проходящей через точку $M(2; -3; 3)$.

2.8. Напишите уравнение плоскости, параллельной плоскости $5x - 3y + 2z - 10 = 0$ и проходящей через точку $M(2; 3; -1)$.

2.9. Напишите уравнение плоскости, которая проходит через точку $M(14; 2; 2)$ параллельно плоскости $x - 2y - 3z = 0$.

2.10. Найдите угол между плоскостями:

а) $x + 2y - 2z - 8 = 0$ и $x + y - 17 = 0$;

б) $x - y + z\sqrt{2} - 6 = 0$ и $x + y - z\sqrt{2} + 12 = 0$.

2.11. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку M перпендикулярно плоскостям:

а) $x - 2y + z - 13 = 0$, $x + 2y - 2z + 2 = 0$, $M(-1; -1; 2)$;

б) $3x - 2y + 2z - 6 = 0$, $5x - 4y + 3z + 3 = 0$, $M(3; -1; -5)$.

2.12. Напишите уравнение прямой (в каноническом параметрическом виде), проходящей через точки $M_1(-1; 2; 3)$ и $M_2(2; 6; -2)$.

2.13. Напишите в каноническом и параметрическом виде уравнение прямой, являющейся пересечением плоскостей

$$x + y - z - 2 = 0 \quad \text{и} \quad 2x - y + z - 7 = 0.$$

2.14. Прямые l_1 и l_2 являются линиями пересечения двух пар плоскостей. Определите, пересекаются ли эти прямые.

а) $l_1: \begin{cases} 2x + y - z - 2 = 0, \\ x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x + 3y - z - 2 = 0, \\ x + 2y - 2 = 0; \end{cases}$

б) $l_1: \begin{cases} 3x + 3y + z + 1 = 0, \\ x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x + y + 3z - 5 = 0, \\ x + 2y + 4z - 5 = 0. \end{cases}$

2.15. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(3; -5; 2)$ на ось Ox .

2.16. Найдите угол между прямой

а) $\frac{x+1}{0} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z+2}{1}$ и прямой $x = 2t - 1$, $y = 2t + 3$, $z = 2$;

б) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{\sqrt{2}}$ и плоскостью $x + y + z\sqrt{2} = 0$.

2.17 Найдите косинус угла между двумя лучами.

а) $l_1: \begin{cases} x = 3 + 3t, \\ y = -2 - t, \\ z = 1 + 2t, \\ t \in [0; +\infty), \end{cases}$ и $l_2: \begin{cases} x = 3 + k, \\ y = -2 + 3k, \\ z = 1 - k, \\ k \in (-\infty; 0]; \end{cases}$

$$\text{б) } l_1: \begin{cases} x=2-t, \\ y=3-t, \\ z=-2+4t, \\ t \in [0; +\infty), \end{cases} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} x=2+2k, \\ y=3+k, \\ z=-2+2k, \\ k \in (-\infty; 0]. \end{cases}$$

2.18 Найдите длину отрезка

$$\text{а) } \begin{cases} x=-2,5+2t, \\ y=3,1+2t, \\ z=-1,1+t, \\ t \in [-1; 1]; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x=5, \\ y=-2,3+5t, \\ z=5+12t, \\ t \in [-2; -1]. \end{cases}$$

2.19. При каком значении параметра a прямая l и плоскость α перпендикулярны:

$$\text{а) } l: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}, \quad \alpha: 2x + (a+2)y - 2z + 11 = 0;$$

$$\text{б) } l: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{8} = \frac{z}{6}, \quad \alpha: x + (a+1)y + 3z + 5 = 0?$$

2.20. Найдите точку пересечения прямой l и плоскости α :

$$\text{а) } l: \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2}, \quad \alpha: x - 3y + z - 8 = 0;$$

$$\text{б) } l: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-2}{0}, \quad \alpha: 3x + y - 2z = 0.$$

2.21. Найдите точку пересечения прямой, проходящей через точки $(1; 1; 1)$ и $(1; 2; 3)$, и плоскости $x - y - 3z - 11 = 0$.

2.22. При каком значении параметра a плоскость $x + y + az - 4 = 0$ и прямая $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ пересекаются (параллельны)?

2.23. Напишите уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2; 3; -4)$ и перпендикулярной прямой $\frac{x-2}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$.

2.24. Напишите уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-4}{3}$$

и точку $M(3; 4; 5)$.

2.25. Найдите координаты проекции точки P на плоскость α :

$$\text{а) } P(-1; 2; 0), \quad \alpha: 4x - 5y - z - 7 = 0;$$

$$\text{б) } P(2; -1; 1), \quad \alpha: x - y + 2z - 2 = 0.$$

2.26. Найдите расстояние от плоскости $5x + 2y - z - 10 = 0$ до точки $M(0; -5; 10)$.

2.27. Найдите проекцию точки M на прямую l :

а) $M(2; 3; 4)$, $l: x = y = z$;

б) $M(0; 2; 1)$, $l: \frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$.

2.28. Напишите уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M(1; 0; -1)$ на прямую $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{-3}$.

2.29. Найдите точку пересечения прямых:

а) $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ и $\frac{x+6}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+1}{2}$;

б) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+2}{3}$ и $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-6}{5} = \frac{z-2}{1}$.

2.30. Напишите уравнение плоскости, относительно которой точки P_1 и P_2 симметричны:

а) $P_1(1; -2; -3)$ и $P_2(3; 4; 9)$;

б) $P_1(-2; 1; -3)$ и $P_2(6; 5; 5)$.

2.31. Найдите точку, симметричную точке P относительно плоскости α :

а) $P(0; -1; 3)$, $\alpha: 2x + y - 2z - 2 = 0$;

б) $P(2; 1; -1)$, $\alpha: 2x - y + z - 8 = 0$.

2.32. Найдите время t , необходимое для перехода объекта, движущегося со скоростью $\vec{v}(2; 0; 1)$, из точки $A(0; 2; 1)$ в точку $B(4; 2; 3)$.

2.33. Объект, двигаясь по плоскости последовательно со скоростями $\vec{v}_1(1; -2)$ и $\vec{v}_2(2; 3)$, попадает из точки $A(-1; 3)$ в точку $B(7; 1)$. Найдите соответствующие моменты времени t_1 и t_2 , а также точку B_{12} смены скоростей \vec{v}_1 на \vec{v}_2 .

2.34. Объект, двигаясь последовательно со скоростями $\vec{v}_1(1; 0; -1)$, $\vec{v}_2(-1; 1; 3)$ и $\vec{v}_3(-1; -1; 1)$, попадает из точки $A(2; 3; -2)$ в точку $B(1; 2; 3)$. Найдите соответствующие моменты времени t_1 , t_2 и t_3 , а также точки B_{12} и B_{23} смены скоростей \vec{v}_1 на \vec{v}_2 и \vec{v}_2 на \vec{v}_3 .

2.35. Найдите каноническое уравнение прямой, полученной отражением прямой

$$\begin{cases} x = 2 - 5t, \\ y = 3 + t, \\ z = -2 - 2t \end{cases}$$

относительно координатной плоскости YOz .

2.36. Найдите параметрическое уравнение прямой, полученной отражением прямой $\frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z-1}{3}$ относительно координатной оси Oz .

2.37. Найдите уравнение плоскости, полученной отражением плоскости α относительно:

а) координатной оси Oz , $\alpha: 2(x-3) - 3(y-1) + 4(z+3) = 0$;

б) координатной оси Ox , $\alpha: 3(x+1) - 2(y-3) - 4(z+2) = 0$.

2.38. На прямой $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{0} = \frac{z+1}{-5}$ взяты две точки A и B на расстоянии $\sqrt{104}$ друг от друга. На каком расстоянии друг от друга лежат их проекции A' и B' на ось Oz ?

2.39. Найдите расстояние от сферы

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 16$$

до

а) точки $A(3; 6; 1)$;

б) сферы $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z-1)^2 = 1$.

2.40. Найдите расстояние от сферы

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 64$$

до сферы $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z-1)^2 = 1$.

2.41. Найдите точку A касания сферы

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$$

и сферы:

а) $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z-1)^2 = 9$;

б) $(x-4)^2 + (y+4)^2 + (z-3)^2 = 36$.

2.42. Найдите расстояние от сферы

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$$

до плоскости $x - 2y + 2z - 6 = 0$.

2.43. При каких значениях параметра D плоскость

$$x - 2y + 2z + D = 0$$

касается сферы

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 25?$$

2.44. Найдите радиус r окружности, по которой сфера

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 25$$

пересекается с плоскостью $x - 2y + 2z - 3 = 0$.

2.45. Дан бесконечный конус с вершиной $A(1; 2; 3)$, осью

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = 3 - 2t; \end{cases} \quad t \in [0 + \infty),$$

и углом при вершине 2α таким, что $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Найдите

- а) уравнение поверхности (боковой) этого конуса;
б) условие на координаты точек его внутренней части.

§ 3. Линейные векторные пространства

3.1. Разложите вектор $\vec{x}(4; 3; -2)$ по векторам

$$\vec{e}_1(1; 1; 2), \quad \vec{e}_2(-3; 0; -2), \quad \vec{e}_3(1; 2; -1).$$

3.2. Найдите координаты вектора $\vec{x}(2, 2, -1)$ в базисе

$$\vec{e}_1(1; 0; 2), \quad \vec{e}_2(-1; 2; 1), \quad \vec{e}_3(-1; 4; 0).$$

3.3. Разложите вектор $\vec{x}(2; 2; 3; 3)$ по системе векторов

$$\vec{a}(1; 2; 3; 1), \quad \vec{b}(2; 1; 2; 3), \quad \vec{c}(3; 2; 4; 4).$$

3.4. Разложите вектор $\vec{x}(4; 1; 3; 1)$ по системе векторов

$$\vec{a}(2; 0; 1; 1), \quad \vec{b}(1; 1; 2; -2), \quad \vec{c}(2; 1; 3; -3).$$

3.5. В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, и с нулевым свободным членом найдите какой-нибудь базис. Найдите в этом базисе разложение многочлена $T(x) = x^2 - 3x$. В ответе укажите координаты многочлена $T(x)$ в выбранном базисе.

3.6. В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, и с корнем $x = 1$ найдите какой-нибудь базис. Найдите в этом базисе разложение многочлена $T(x) = x^2 - 3x + 2$. В ответе укажите координаты многочлена $T(x)$ в выбранном базисе.

3.7. В линейном пространстве многочленов степени, не превосходящей 2, найдите разложение многочлена $T(x)$ по базису $P(x)$,

$Q(x)$, $R(x)$. В ответе укажите координаты многочлена $T(x)$ в данном базисе.

а) $T(x) = 3x^2 + 2x + 1$, $P(x) = 4x^2 + 3x + 4$, $Q(x) = 3x^2 + 2x + 3$,
 $R(x) = x^2 + x + 2$;

б) $T(x) = 9x^2 + 10x + 4$, $P(x) = 3x^2 + 2x + 3$, $Q(x) = x^2 + x + 1$,
 $R(x) = 3x^2 + 3x + 2$.

3.8. Найдите какой-нибудь базис в указанном линейном пространстве L . Найдите координаты элемента $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ в этом базисе. В ответе укажите координаты A в выбранном базисе.

а) L — линейное пространство всех матриц 2×2 ;

б) L — линейное пространство симметричных матриц 2×2 ;

в) L — линейное пространство матриц 2×2 вида $\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

3.9. В линейном пространстве симметричных матриц 2×2 найдите координаты элемента

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$ в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$ в базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3.10. Исследуйте систему векторов на линейную зависимость или независимость:

а) $\vec{a}_1 = (-7; 5; 19)$, $\vec{a}_2 = (-5; 7; -7)$, $\vec{a}_3 = (-8; 7; 14)$;

б) $\vec{a}_1 = (1; 2; -2)$, $\vec{a}_2 = (0; -1; 4)$, $\vec{a}_3 = (2; -3; 3)$;

в) $\vec{a}_1 = (1; 8; -1)$, $\vec{a}_2 = (-2; 3; 3)$, $\vec{a}_3 = (4; -11; 9)$;

г) $\vec{a}_1 = (1; 2; 3)$, $\vec{a}_2 = (2; -1; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; 3; 4)$;

д) $\vec{a}_1 = (0; 1; 1; 0)$, $\vec{a}_2 = (1; 1; 3; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; 3; 5; 1)$,
 $\vec{a}_4 = (0; 1; 1; -2)$;

е) $\vec{a}_1 = (-1; 7; 1; -2)$, $\vec{a}_2 = (2; 3; 2; 1)$, $\vec{a}_3 = (4; 4; 4; -3)$,
 $\vec{a}_4 = (1; 6; -1; 1)$.

3.11. Найдите ранг системы векторов и укажите какой-нибудь базис в этой системе векторов. Векторы, не входящие в базис, разложите по базису:

а) $\vec{a}_1 = (1; 1; 2)$, $\vec{a}_2 = (3; 1; 2)$, $\vec{a}_3 = (1; 2; 1)$, $\vec{a}_4 = (2; 1; 2)$;

б) $\vec{a}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{a}_2 = (-3; -5; 5)$, $\vec{a}_3 = (3; 4; -1)$, $\vec{a}_4 = (1; -1; 4)$;

в) $\vec{a}_1 = (1; 1; 0; -1)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; 1; 0)$, $\vec{a}_3 = (1; 3; 2; 1)$,

$\vec{a}_4 = (1; 4; 3; 2)$;

г) $\vec{a}_1 = (1; 0; 1; 0)$, $\vec{a}_2 = (-2; 1; 3; -7)$, $\vec{a}_3 = (3; -1; 0; 3)$,
 $\vec{a}_4 = (-4; 1; -3; 1)$;

д) $\vec{a}_1 = (1; 1; 4; 2)$, $\vec{a}_2 = (1; -1; -2; 4)$, $\vec{a}_3 = (0; 2; 6; -2)$,
 $\vec{a}_4 = (-3; 3; 3; -12)$, $\vec{a}_5 = (-1; 0; -4; -3)$;

е) $\vec{a}_1 = (1; 3; 0; 5)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; 0; 4)$, $\vec{a}_3 = (1; 1; 1; 3)$,
 $\vec{a}_4 = (1; 0; -1; 2)$, $\vec{a}_5 = (1; -3; 3; -1)$.

3.12. При каких значениях параметра a система векторов является линейно зависимой:

а) $\vec{a}_1 = (1; 2; -1; 1)$, $\vec{a}_2 = (2; 5; 0; 1)$, $\vec{a}_3 = (-1; 0; 5; a)$;

б) $\vec{a}_1 = (1; 0; 2; -3)$, $\vec{a}_2 = (2; 2; -4; a)$, $\vec{a}_3 = (3; 1; 2; -5)$?

3.13. При каких значениях параметра a система векторов является линейно независимой:

а) $\vec{a}_1 = (2; 1; a; 2)$, $\vec{a}_2 = (1; 2; 3; 1)$, $\vec{a}_3 = (1; -1; 2; 1)$;

б) $\vec{a}_1 = (-1; 2; -2; 1)$, $\vec{a}_2 = (2; 4; 4; a)$, $\vec{a}_3 = (1; 0; 2; 0)$?

- 2.13. $\frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$; $x=3, y=-1+t, z=t$.
- 2.14. а) Нет; б) да, в точке $(1; -2; 2)$.
- 2.15. $\frac{x-3}{0} = \frac{y}{5} = \frac{z}{-2}$. 2.16. а) $\varphi = \frac{\pi}{3}$; б) $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
- 2.17. а) $\frac{2}{\sqrt{154}}$; б) $-\frac{5}{9\sqrt{2}}$. 2.18. а) 6; б) 13.
- 2.19. а) $a=4$; б) $a=3$. 2.20. а) $(2; -1; 3)$; б) $(1; 1; 2)$.
- 2.21. $(1; -1; -3)$.
- 2.22. При $a \neq -1$ пересекаются, при $a = -1$ параллельны.
- 2.23. $y+z+1=0$. 2.24. $x-2y+z=0$.
- 2.25. а) $(1; -0,5; -0,5)$; б) $(1,5; -0,5; 0)$. 2.26. $\sqrt{30}$.
- 2.27. а) $(3; 3; 3)$; б) $(2; 0; -1)$. 2.28. $\frac{x-1}{5} = \frac{y}{-4} = \frac{z+1}{-1}$.
- 2.29. а) $(-5; 6; 1)$; б) $(3; 1; 1)$.
- 2.30. а) $x+3y+6z-23=0$; б) $2x+y+2z-9=0$.
- 2.31. а) $(4; 1; -1)$; б) $(6; -1; 1)$. 2.32. $t=2$.
- 2.33. $t_1=4; t_2=2; B_{12}(3; -5)$.
- 2.34. $t_1=4; t_2=2; t_3=3; B_{12}(6; 3; -6); B_{23}(4; 5; 0)$.
- 2.35. $\frac{x+2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+2}{-2}$.
- 2.36. $x=-3-4t, y=2+2t, z=1+3t$.
- 2.37. а) $2x+3y+4z+9=0$; б) $3x+2y+4z+1=0$.
- 2.38. 10. 2.39. а) 2; б) 1.
- 2.40. 1. 2.41. а) $A(2; 4; -1)$; б) $A(2; 0; -1)$.
- 2.42. 2. 2.43. $-6, 24$. 2.44. $r=3$.
- 2.45. а) $2(x-1) + (y-2) - 2(z-3) = 2 \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$;
 б) $2(x-1) + (y-2) - 2(z-3) > 2 \cdot \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$.

§ 3

- 3.1. $\vec{x} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$. 3.2. $(1; -3; 2)$.
- 3.3. $\vec{x} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$. 3.4. $\vec{x} = 2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$.
- 3.5. В качестве базиса можно взять $e_1 = x^2, e_2 = x$.
 В этом базисе $T(x) = (1; -3)$.
- 3.6. В качестве базиса можно взять $e_1 = (x-1)^2, e_2 = x-1$.
 В этом базисе $T(x) = (1; -1)$.
- 3.7. а) $(2; -1; -2)$; б) $(-1; -3; 5)$.
- 3.8. а) В качестве базиса можно взять $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,
 $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. В этом базисе $A = (0; 2; 2; 3)$.
- б) В качестве базиса можно взять $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 В этом базисе $A = (0; 2; 3)$.

в) В качестве базиса можно взять $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

В этом базисе $A = (2; 2; 3)$.

3.9. а) $(2; 2; -4)$; **б)** $(2; -1; -2)$; **в)** $(-1; -3; 5)$.

3.10. а) Линейно зависима; **б)** линейно независима;

в) линейно независима; **г)** линейно зависима;

д) линейно зависима; **е)** линейно независима.

3.11. а) Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

В этом базисе $\vec{a}_4 = (0,5; 0,5; 0)$.

б) Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

В этом базисе $\vec{a}_4 = (7,75; -0,25; -2,5)$.

в) Ранг 2, в качестве базиса можно взять \vec{a}_1, \vec{a}_2 .

В этом базисе $\vec{a}_3 = (-1; 2)$, $\vec{a}_4 = (-2; 3)$.

г) Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

В этом базисе $\vec{a}_4 = (0; -1; -2)$.

д) Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\vec{a}_1, \vec{a}_3, \vec{a}_5$.

В этом базисе $\vec{a}_2 = (1; -1; 0)$, $\vec{a}_4 = (-2; 2,5; 1)$.

е) Ранг 3, в качестве базиса можно взять $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$.

В этом базисе $\vec{a}_4 = (-3; 5; -1)$, $\vec{a}_5 = (-2; 0; 3)$.

3.12. а) $a = -3$; **б)** $a = 2$. **3.13. а)** $a \neq 5$; **б)** $a \neq 2$.

Глава 2

Матрицы и определители матриц. Системы линейных уравнений

Справочный материал и примеры решения задач

1. Вычислить определитель матрицы A путем разложения его по элементам какого-либо столбца (строки):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Будем раскладывать определитель матрицы по элементам первого столбца с учетом наличия в этом столбце нулевого элемента (чем больше нулевых элементов, тем меньше объем вычислений). *Определитель матрицы вычисляется по формуле*

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}.$$

Здесь a_{i1} — элементы первого столбца, а A_{i1} — их алгебраические дополнения ($i = 1, 2, 3$). *Алгебраические дополнения вычисляются по формуле:*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij},$$

где M_{ij} — соответствующие миноры. *Минором M_{ij} матрицы A называется определитель матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j . Вычисляем нужные нам алгебраические дополнения:*

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -2.$$

Отсюда $\det A = A_{11} - 2A_{31} = -10$.

2. Вычислить матрицу A^{-1} , обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Для вычисления матрицы, обратной матрице второго порядка, существует следующая формула.

Если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $\det A = ad - bc \neq 0$, то $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Отсюда получаем для данной матрицы:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что правильность решения легко проверить, убедившись, что $AA^{-1} = E$, где E — единичная матрица.

3. Вычислить матрицу A^{-1} , обратную матрице A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Эту задачу можно решать двумя способами: методом присоединенной матрицы, основанным на вычислении алгебраических дополнений, и методом элементарных преобразований. Продемонстрируем оба метода.

Способ 1. Вычислим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A и ее определитель:

$$\begin{aligned} A_{11} &= 4, & A_{12} &= -7, & A_{13} &= -6, \\ A_{21} &= -8, & A_{22} &= 9, & A_{23} &= 10, \\ A_{31} &= 4, & A_{32} &= -5, & A_{33} &= -6, \\ \det A &= a_{21} \cdot A_{21} + 0 + a_{23} \cdot A_{23} = -4. \end{aligned}$$

Составим присоединенную матрицу B , элементами которой являются алгебраические дополнения матрицы A :

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -8 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Используя формулу для обратной матрицы $A^{-1} = \frac{1}{\det A} B^T$, получим

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

Способ 2. Используем теперь метод элементарных преобразований. Построим матрицу, полученную дописыванием справа от матрицы A единичной матрицы:

$$B = (A|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

С помощью метода Гаусса приведем матрицу, составленную из первых трех строк и столбцов, к единичной матрице. При этом преобразования над ее строками будем производить над строками всей матрицы B . Справа от матрицы указано, какие элементарные преобразования будут выполнены со строками на этом шаге. Римские цифры обозначают номера строк.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{II}-3\cdot\text{I} \\ \text{III}-4\cdot\text{I}}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 9 & -4 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{III}-\frac{5}{3}\text{II}} \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & -\frac{5}{3} & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{3\cdot\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Далее получим нули над главной диагональю:

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{II}-\frac{5}{2}\text{III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & -\frac{21}{2} & \frac{27}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{2\cdot\text{II}} \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 & -21 & 27 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}-\frac{1}{2}\text{III}} \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2,5 & -2,5 & 1,5 \\ 0 & -12 & 0 & -21 & 27 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\text{I}+\frac{1}{6}\text{II}} \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -12 & 0 & -21 & 27 & -15 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-\frac{1}{12}\text{II} \\ \frac{1}{2}\text{III}}} \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{array} \right). \end{aligned}$$

В правой части полученной матрицы мы видим матрицу, обратную матрице A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{7}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}.$$

4. Решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Ответ записать в векторной форме.

Решение. Составим расширенную матрицу данной системы уравнений и с помощью элементарных преобразований (методом Гаусса) приведем ее к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & -7 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & -2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Попутно мы выяснили, что ранги основной и расширенной матриц системы совпадают (равны двум). Это свидетельствует о совместности системы. Из вида полученной матрицы следует, что неизвестные x_1 и x_2 можно выбрать в качестве базисных. В качестве базисных неизвестных рекомендуется брать неизвестные, соответствующие первым отличным от нуля элементам соответствующей строки матрицы, приведенной к треугольному виду. Оставшиеся неизвестные x_3 и x_4 берем в качестве свободных. Из второго уравнения выразим x_2 через свободные неизвестные x_3 и x_4 . Получим $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4$. Подставляя это выражение в первое уравнение и приводя подобные члены, находим $x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x_3 + \frac{7}{4}x_4$. Полагая $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$, получаем

$$x_1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}C_1 + \frac{7}{4}C_2, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}C_1 - \frac{1}{2}C_2.$$

Ответ можно теперь записать в векторной форме:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обратите внимание, что последний из векторов является частным решением исходной системы, а другие два — это линейно независимые решения соответствующей однородной системы.

5. Решить однородную систему линейных уравнений и найти для нее фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. После проведения элементарных преобразований решение однородной системы записывается в виде

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

см. предыдущую задачу. Векторы

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений данной однородной системы уравнений. Тогда любое решение однородной системы можно представить в виде $\vec{x} = C_1 \vec{e}_1 + C_2 \vec{e}_2$.

6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вектор $\vec{x} \neq 0$ и число λ называются соответственно *собственным вектором* и *собственным значением* матрицы, если выполняется следующее равенство: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Собственные значения являются корнями уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$, где E — единичная матрица. Составим матрицу $A - \lambda E$ и вычислим ее определитель.

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 6 \\ 3 & 2-\lambda & 5 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\det(A - \lambda E) = (2 - \lambda)((1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4).$$

Корни полученного многочлена — это $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 4$.

Найдем теперь собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda_1 = 2$. Для этого решим однородную систему уравнений с матрицей $A - \lambda_1 E$:

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

после элементарных преобразований матрица приводится к виду

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений соответствующей однородной системы состоит из одного вектора

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

который является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 2$, а множество всех собственных векторов, соответствующих данному собственному значению, имеет вид $t\vec{a}_1$.

Вычислим теперь собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = -1$.

Матрицу $A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ приводим к виду $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Фундаментальная система решений соответствующей однородной системы состоит из одного вектора

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

который и является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_2 = -1$, а множество всех собственных векторов, соответствующих данному собственному значению, имеет вид $t\vec{a}_2$.

Вычислим теперь собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 4$.

Матрицу $A - \lambda_3 E = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ приводим к виду $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Фундаментальная система решений соответствующей однородной системы состоит из одного вектора

$$\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix},$$

который и является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_3 = 4$, а множество всех собственных векторов, соответствующих данному собственному значению имеет вид $t\vec{a}_3$. Задача решена.

§1. Операции над матрицами

1.1. Даны матрицы A и B . Найдите матрицу C :

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, C = 2A - 3B;$

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 1 \\ -5 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 9 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ -3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, C = A - 2B.$

1.2. Даны матрицы A и B . Найдите матрицу X , удовлетворяющую матричному уравнению:

а) $A + 2X - 4B = 0, A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 6 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & 0 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix};$

а) $5A + 3X - B = 0, A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$

1.3. Найдите $f(A)$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $f(x) = x^2 - 3x$.

1.4. Найдите произведение матриц A и B :

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix};$

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix};$

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{д) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{е) } A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{з) } A = (1 \ 2 \ -3), B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad \text{и) } A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, B = (1 \ 2 \ -3);$$

$$\text{к) } A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix};$$

$$\text{л) } A = (1 \ 2 \ -5), B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{м) } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B^T = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.5. Найдите произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ матриц A и B и установите, как при этом меняются столбцы или строки матрицы B :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.6. Используя результат предыдущей задачи, представьте матрицу B в виде произведения матриц A и X . В ответе укажите матрицу X и порядок сомножителей ($B = A \cdot X$ или $B = X \cdot A$):

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 342 & 211 & 645 \\ 457 & 992 & 719 \\ 123 & 403 & 842 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 645 & 211 & 342 \\ 719 & 992 & 457 \\ 842 & 403 & 123 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} A = \begin{pmatrix} 342 & 211 & 645 \\ 457 & 992 & 719 \\ 123 & 403 & 842 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 457 & 992 & 719 \\ 342 & 211 & 645 \\ 123 & 403 & 842 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} A = \begin{pmatrix} 332 & 211 & 123 \\ 457 & 992 & 719 \\ 123 & 403 & 842 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 996 & 633 & 369 \\ 457 & 992 & 719 \\ 123 & 403 & 842 \end{pmatrix};$$

$$\text{г)} A = \begin{pmatrix} 111 & 203 & 343 \\ 209 & 121 & 514 \\ 221 & 106 & 678 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 333 & 812 & 343 \\ 627 & 484 & 514 \\ 663 & 424 & 678 \end{pmatrix}.$$

1.7. Возведите матрицу A в степень n :

$$\text{а)} A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, n = 3; \quad \text{б)} A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, n = 5;$$

$$\text{в)} A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, n = 10, n = 15; \quad \text{г)} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, n = 10;$$

$$\text{д)} A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}, n - \text{произвольное натуральное число.}$$

§ 2. Определитель и ранг матрицы

2.1. Найдите ранг матрицы:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 4 \\ 9 & 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 & 7 \\ 4 & 15 & 8 & 7 & 1 \\ 2 & 17 & 4 & 13 & -9 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{е)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 4 & 11 & -7 \\ 1 & -4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{з)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & -9 & 4 & -2 \\ 5 & 18 & -8 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{и)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{к)} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

2.2. Вычислите определитель

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix}; \quad \text{д) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

2.3. Вычислите указанные миноры матриц:

$$\text{а) } M_{32}, A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } M_{13}, A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.4. Вычислите указанные алгебраические дополнения матриц:

$$\text{а) } A_{23}, A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A_{43}, A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.5. Вычислите определитель матрицы путем разложения его по элементам второй строки

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 & -4 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 & 2 \\ x & y & z & t \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

2.6. Вычислите определитель матрицы путем разложения его по элементам третьего столбца

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 5 & 1 & x & 8 \\ -4 & -1 & y & -5 \\ 8 & -1 & z & 12 \\ 4 & -1 & t & 7 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & -1 & a & -1 \\ -1 & -2 & b & -1 \\ -2 & 0 & c & 1 \\ 0 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}.$$

2.7. Вычислите определитель

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & -2 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{vmatrix}; \quad \text{д) } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 7 \\ -2 & -5 & 7 & 5 \\ -2 & -5 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{е) } \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix};$$

$$\text{ж) } \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 6 & 3 & 7 \\ -2 & -8 & -7 & -3 \\ -1 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix}; \quad \text{з) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}; \quad \text{и) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.8. При каком значении параметра a выполнено равенство

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & a+3 & -2 \\ 5 & -5 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 40; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 8 & 0 \\ -2 & a+4 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -30;$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -2 & a-2 \\ 1 & 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 18; \quad \text{г) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & -4 & 4-a & 0 \end{vmatrix} = -36?$$

2.9. При каких значениях параметра a система векторов $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ линейно зависима:

а) $\vec{x}_1 = (3; 7; 4), \vec{x}_2 = (3; 8; 6), \vec{x}_3 = (3; a+5; 8);$

б) $\vec{x}_1 = (1; 2; 6), \vec{x}_2 = (a-4; -2; -2), \vec{x}_3 = (3; 1; 1)?$

2.10. При каких значениях параметра a произвольный вектор в пространстве \mathbb{R}^3 можно разложить по векторам $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:

а) $\vec{a}_1 = (1; 4; 3), \vec{a}_2 = (2; 1-a; 1), \vec{a}_3 = (5; 4; 1);$

б) $\vec{a}_1 = (-3; 1; 4), \vec{a}_2 = (a+2; -2; -5), \vec{a}_3 = (5; 1; 9)?$

2.11. При каком значении параметра a точки A, B, C и D лежат в одной плоскости? (Исследуйте линейную зависимость или независимость векторов $\overline{AB}, \overline{AC}$ и \overline{AD} .)

а) $A(1; 1; 1), B(2; 1; 0), C(-1; 0; 1)$ и $D(a+1; 2; 0);$

б) $A(0; 3; 1), B(2; 8; 9), C(1; 0; 2a-2)$ и $D(0; 8; 11).$

2.12. При каких значениях параметра x площадь параллелограмма, построенного на векторах $(x; 3)$ и $(3; 4)$, больше площади параллелограмма, построенного на векторах $(2; 3)$ и $(3; 4)?$

2.13. При каких значениях параметра p объем параллелепипеда, построенного на векторах $(2; 3; 0), (3; 4; 0)$ и $(7; 8; p)$, меньше объема параллелепипеда, построенного на векторах $(2; 3; 0), (3; 4; 0)$ и $(7; 8; -4)?$

§ 3. Обратная матрица. Матричные уравнения

3.1. Найдите матрицу, обратную матрице A :

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; в) $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$; г) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & -8 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

ж) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; з) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$;

и) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; к) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

3.2. Найдите значения параметров a , b и c , при которых матрицы A и B являются обратными:

а) $A = \begin{pmatrix} a-1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & c-2 \\ 4 & b & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -8 & 3 & -6 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} a-3 & 3 & 5 \\ 0 & c & 3 \\ -5 & -1 & b-4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -15 & 29 & 12 \\ 10 & -19 & -8 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} a-2 & 0 & 1 \\ -8 & b+4 & -6 \\ -4 & 2 & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} a & -2 & -1 \\ -15 & b+20 & 12 \\ 10 & -19 & 2c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \\ -5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & a & 2 \\ 5 & -7 & c \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ b & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

е) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ b-20 & 1 & c-10 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.3. Решите матричное уравнение:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 1 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; г) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$;

$$\text{д)} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{е)} X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж)} X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix}; \quad \text{з)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 15 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{и)} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{к)} X \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{л)} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\text{м)} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.4. Найдите A^{-1} , если

$$\text{а)} A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Указание: используйте метод Гаусса, считая матрицу A матрицей коэффициентов системы линейных уравнений с соответствующими правыми частями.)

§ 4. Системы линейных уравнений

4.1. Решите систему уравнений:

$$\text{а)} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 1, \\ 3x_1 + 8x_2 - 10x_3 = 1; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

4.2. В какой точке линия пересечения плоскостей $3x + 2y + z - 5 = 0$ и $x + y - z = 0$ пересекает плоскость $4x - y + 5z - 3 = 0$?

4.3. В какой точке линия пересечения плоскостей $2x + y - z - 5 = 0$ и $x - 2y + 2z + 5 = 0$ пересекает плоскость $7x + y + z - 14 = 0$?

4.4. Решите систему линейных уравнений и найдите фундаментальную систему решений. Запишите ответ в векторном виде:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 10x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 12x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 34x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 79x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 42x_3 = 0, \\ 3x_1 + 7x_2 + 109x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x_1 - 22x_2 + x_3 + 250x_4 = 0, \\ 2x_1 - 44x_2 + 3x_3 + 180x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} x_1 + 33x_2 + x_3 - 150x_4 = 0, \\ 3x_1 + 99x_2 + 4x_3 + 270x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} x_1 - 40x_2 - x_3 + 120x_4 = 0, \\ 4x_1 - 160x_2 - 3x_3 + 640x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{з) } \begin{cases} x_1 - 35x_2 - x_3 + 130x_4 = 0, \\ 3x_1 - 105x_2 - 2x_3 + 150x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{и) } \begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 14x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{к) } \begin{cases} 10x_2 + 6x_3 - 12x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{л) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{м) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 + 6x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{н) } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{о) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\text{п) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 + 11x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - 11x_3 + 10x_4 = 0. \end{cases}$$

4.5. Исследуйте системы линейных уравнений на совместность:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_4 = 3, \\ 5x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 1, \\ -5x_1 + 7x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 4. \end{cases}$$

4.6. Представьте общее решение неоднородной системы уравнений в виде суммы частного решения и общего решения соответствующей однородной системы:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} -x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ -3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 6; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 9; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -5; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 8, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 1; \end{cases} \quad \text{з) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 + 11x_3 - x_4 = 7; \end{cases}$$

$$\text{и) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6, \\ 4x_1 + 6x_2 + x_3 + 12x_4 = 10; \end{cases} \quad \text{к) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 = 3, \\ 6x_1 + 2x_2 + 11x_3 + x_4 = 12; \end{cases}$$

$$\text{л) } \begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 5, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 3; \end{cases} \quad \text{м) } \begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - 4x_2 - 11x_3 - 7x_4 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 - 13x_3 - 11x_4 = 1; \end{cases}$$

$$\text{н) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 7; \end{cases} \quad \text{о) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2; \end{cases}$$

$$\text{п) } \begin{cases} x_1 + 20x_2 + 3x_3 + 20x_4 = 0, \\ 5x_1 + 100x_2 + 14x_3 + 89x_4 = 3, \\ 4x_1 + 80x_2 + 11x_3 + 69x_4 = 3; \end{cases}$$

$$\text{р) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 10x_3 + 50x_4 = 1, \\ 3x_1 + 16x_2 - 30x_3 + 167x_4 = 0, \\ 2x_1 + 11x_2 - 20x_3 + 117x_4 = -1; \end{cases}$$

$$\text{с) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 11x_3 + 90x_4 = 0, \\ 4x_1 + 21x_2 + 44x_3 + 400x_4 = 1, \\ 5x_1 + 26x_2 + 55x_3 + 490x_4 = 1. \end{cases}$$

4.7. При каких значениях параметра a система линейных уравнений совместна

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + (a + 9)x_3 = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 = a + 3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 4, \\ x_1 + 8x_2 + (a - 7)x_3 = 5; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 2x_1 - x_3 + 3x_4 = 10, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 8, \\ 8x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 18, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = a; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + ax_4 = 5; \end{cases} \quad \text{е) } \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2, \\ -11x_1 + 2x_2 + x_3 + 12x_4 = a; \end{cases}$$

$$\text{ж) } \begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3, \\ -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 - 15x_2 + 4x_3 + 8x_4 = a; \end{cases} \quad \text{з) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 5, \\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -4, \\ 8x_1 - 10x_2 + 2x_3 + 2x_4 = a; \end{cases}$$

$$\text{и) } \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -4, \\ 4x_1 + 15x_2 - 16x_3 + 17x_4 = a? \end{cases}$$

4.8. При каких значениях параметра a система линейных уравнений совместна? Решите системы линейных уравнений при найденных значениях параметра:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 0 \cdot x_2 + 11x_3 + 5x_4 + 90x_5 = 0, \\ 4x_1 + 0 \cdot x_2 + 44x_3 + 21x_4 + 400x_5 = 1, \\ 5x_1 + 0 \cdot x_2 + 55x_3 + 27x_4 + 530x_5 = a; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - 10x_2 + 0 \cdot x_3 + 5x_4 + 50x_5 = 1, \\ 3x_1 - 30x_2 + 0 \cdot x_3 + 16x_4 + 167x_5 = 0, \\ -x_1 + 10x_2 + 0 \cdot x_3 - 7x_4 - 84x_5 = a; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + 20x_2 + 3x_3 + 0 \cdot x_4 + 20x_5 = 0, \\ 5x_1 + 100x_2 + 14x_3 + 0 \cdot x_4 + 89x_5 = 1, \\ 11x_1 + 220x_2 + 30x_3 + 0 \cdot x_4 + 187x_5 = a; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x_1 - 22x_2 + 4x_3 + 40x_4 + 0 \cdot x_5 = 1, \\ 3x_1 - 66x_2 + 11x_3 + 127x_4 + 0 \cdot x_5 = 0, \\ -3x_1 + 66x_2 - 10x_3 - 134x_4 + 0 \cdot x_5 = a. \end{cases}$$

4.9. При каких значениях параметра a однородная система линейных уравнений, заданных матрицей A , имеет ненулевое решение:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & a+6 & 5 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2+a & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2+a & 2 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}?$$

4.10. Найдите базис линейного пространства векторов, ортогональных векторам \vec{a} и \vec{b} . Запишите ответ в векторном виде.

$$\text{а) } \vec{a} = (1; -2; 0; 34), \vec{b} = (3; -5; 0; 79);$$

$$\text{б) } \vec{a} = (1; 2; 0; 42), \vec{b} = (3; 7; 0; 109);$$

$$\text{в) } \vec{a} = (1; -3; 0; -31), \vec{b} = (2; -5; 0; -107).$$

4.11. Найдите ближайшую к точке A точку $M(x_1; x_2; x_3)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 12, \end{cases} \quad A = (0; 0; -4);$$

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ -4x_1 + 8x_2 + 2x_3 = -12, \end{cases} \quad A = (0; -4; 0); \\ \text{в)} \quad & \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -10, \\ -3x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 30, \end{cases} \quad A = (0; 0; 2); \\ \text{г)} \quad & \begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 10, \end{cases} \quad A = (0; 4; 0). \end{aligned}$$

4.12. Предприятие выпускает 3 вида изделий с использованием двух видов сырья. Для продукции ценовой вектор \vec{p} , вектор наличного сырья \vec{s} , нормы расходов сырья даны элементами матрицы A . Требуется определить максимальную стоимость продукции P и оптимальный вектор-план выпуска продукции $\vec{q} = (q_1; q_2; q_3)$ при полном использовании всего сырья, т. е. надо найти максимум $P = \vec{p} \cdot \vec{q}^T$, если \vec{q} — решение системы $A \cdot \vec{q}^T = \vec{s}^T$. При решении следует учесть, что все величины q_1, q_2, q_3 неотрицательны.

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \vec{p} = (6; 20; 100), \vec{s} = (38; 96), A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 18 \end{pmatrix}; \\ \text{б)} \quad & \vec{p} = (7; 20; 100), \vec{s} = (38; 96), A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 2 & 3 & 18 \end{pmatrix}; \\ \text{в)} \quad & \vec{p} = (8; 30; 100), \vec{s} = (28; 65), A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 19 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

§ 5. Собственные значения и собственные векторы матрицы

5.1. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

5.2. Найдите $|\cos \varphi|$, где φ — угол между собственными векторами, соответствующими различным собственным значениям:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{в)} \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5.3. Найдите собственные векторы и собственные значения матрицы:

$$\text{а)} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

5.4. При каком значении параметра a матрица A имеет собственный вектор \vec{v} , соответствующий собственному значению λ :

$$\text{а)} A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{v} = (-3; 1; a-1), \lambda = 5;$$

$$\text{б)} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \vec{v} = (2; 3; a-1), \lambda = 2;$$

$$\text{в)} A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \vec{v} = (1; 3; a-2), \lambda = 3?$$

5.5. Проверьте, что вектор \vec{x} является собственным вектором матрицы A и найдите соответствующее ему собственное значение λ :

$$\text{а)} A = \begin{pmatrix} -15 & -5 & 23 & 4 \\ -33 & -13 & 49 & 14 \\ -13 & -5 & 21 & 4 \\ -18 & -5 & 23 & 7 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} A = \begin{pmatrix} 15 & 20 & 23 & -52 \\ 7 & 16 & 39 & -56 \\ 11 & 20 & 27 & -52 \\ 11 & 20 & 33 & -58 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} A = \begin{pmatrix} 20 & -4 & 28 & -24 \\ 40 & 2 & 54 & -64 \\ 16 & 2 & 6 & -16 \\ 26 & -3 & 23 & -28 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.6. Какие из векторов $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ являются собственными векторами матрицы A ? Найдите их собственные значения:

$$\text{а)} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -5 & 13 & 7 \\ -6 & 14 & 6 \\ 8 & -17 & -6 \end{pmatrix};$$

$$\text{б)} \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -11 \\ 12 & -1 & 16 \\ 6 & -1 & 9 \end{pmatrix}.$$

5.7. Найдите собственный вектор матрицы A , который соответствует большему собственному значению, имеет длину a и составляет тупой угол с указанной осью:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a = \sqrt{136}, Ox;$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}, a = \sqrt{54}, Oz;$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}, a = \sqrt{264}, Oy.$$

5.8. Найдите множество собственных векторов матрицы A , соответствующих заданному собственному значению, решив соответствующую однородную систему линейных уравнений:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 11 & 5 & 90 \\ 4 & 46 & 21 & 400 \\ 5 & 55 & 28 & 490 \\ 7 & 77 & 37 & 712 \end{pmatrix}, \lambda = 2;$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 4 & -10 & 5 & 50 \\ 3 & -27 & 16 & 167 \\ 2 & -20 & 14 & 117 \\ 4 & -40 & 21 & 220 \end{pmatrix}, \lambda = 3;$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 8 & 40 \\ 3 & 20 & 25 & 133 \\ 2 & 14 & 16 & 93 \\ 4 & 28 & 31 & 146 \end{pmatrix}, \lambda = -1.$$

5.9. Матрица A имеет три собственных вектора $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ с соответствующими собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Для матрицы $f(A)$ найдите собственные векторы и собственные значения:

$$\text{а) } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3, f(A) = A^2 + A;$$

$$\text{б) } \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3, f(A) = A^2 - A.$$

ОТВЕТЫ К ГЛАВЕ 2

§1

1.1. а) $C = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 4 \\ -12 & -1 & -7 \\ 5 & 2 & -8 \end{pmatrix};$

б) $C = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -17 & 6 \\ 4 & -9 & -4 & -1 \\ 1 & -1 & -10 & 0 \end{pmatrix}.$

1.2. а) $X = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 14 \\ -7 & 1 & 8 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix};$

б) $X = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -30 & -6 & -2 & -25 \\ -13 & 13 & -22 & 16 \\ -9 & -5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$

1.3. $f(A) = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$

1.4. а) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 22 & 11 \\ -19 & -1 \end{pmatrix};$

б) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 9 & -5 & -9 \\ 25 & 15 & -12 \end{pmatrix};$

в) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 14 & 22 \\ 17 & -9 \\ 16 & 8 \end{pmatrix};$

г) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 13 & -4 \\ 21 & 1 \end{pmatrix};$

д) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 15 \\ 17 & 13 \end{pmatrix};$

е) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 11 & -14 & 10 \\ 7 & -6 & 7 \end{pmatrix};$

ж) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 0 & -8 & 6 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix};$

з) $A \cdot B = (-12);$

и) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix};$

к) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 31 \\ -14 \\ 18 \end{pmatrix};$

л) $A \cdot B = (-6 \ -17 \ -1);$

м) $A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & 13 & 18 \\ 3 & 18 & 26 \\ -15 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

1.5. а) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 9 & 8 \end{pmatrix};$

б) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 8 & 24 & 16 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 32 \\ 1 & 0 & 24 \\ 1 & 3 & 16 \end{pmatrix}.$

1.6. а) $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B = A \cdot X;$

б) $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = X \cdot A;$

в) $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = X \cdot A;$

г) $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = X \cdot A.$

1.7. а) $A^3 = \begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix};$

б) $A^5 = \begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix};$

в) $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A^{15} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix};$ г) $A^{10} = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$ д) $A = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}.$

§2

- 2.1. а) 2; б) 1; в) 2; г) 3; д) 3; е) 2; ж) 3; з) 3; и) 3; к) 2.
 2.2. а) 10; б) -31; в) -10; г) 8; д) 87; е) 10.
 2.3. а) $M_{32}=8$; б) $M_{13}=24$.
 2.4. а) $A_{23}=80$; б) $A_{43}=-16$.
 2.5. а) $2a-8b+c+5d$; б) $-x-y-z+4t$.
 2.6. а) $8x+15y+12z-19t$; б) $3a-b+2c+d$.
 2.7. а) 40; б) -30; в) 18; г) -36; д) -40;
 е) -150; ж) -10; з) 5; и) -720.
 2.8. а) $a=-1$; б) $a=-9$; в) $a=5$; г) $a=2$.
 2.9. а) $a=4$; б) $a=-2$.
 2.10. а) $a \neq -\frac{9}{7}$; б) $a \neq 8,8$. 2.11. а) $a=3$; б) $a=-2$.
 2.12. $x \in (-\infty; 2) \cup (2,5; \infty)$. 2.13. $|p| < 4$.

§3

- 3.1. а) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$; в) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$;
 д) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; ж) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -7 & -3 \\ -1 & 10 & 6 \end{pmatrix}$;
 з) $\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -3 & 12 & 10 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; и) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -1,5 & 2,5 & -1 \\ 9 & -13 & 5 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} -10 & 3 & 8 \\ -11 & 3 & 9 \\ 14 & -4 & -11 \end{pmatrix}$.
 3.2. а) $a=-2, b=2, c=4$; б) $a=-1, b=3, c=2$; в) $a=3, b=-1, c=-3$;
 г) $a=1, b=9, c=-4$; д) $a=-5, b=-2, c=3$; е) $a=5, b=4, c=-3$.
 3.3. а) $X = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 24 \\ -12 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -23 & 43 & -4 \\ -10 & 14 & 1 \end{pmatrix}$;
 в) $X = -\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & -6 \\ 9 & 18 & -45 \end{pmatrix}$; г) $X = -\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; д) $X = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 17 & 7 \\ -19 & -8 \end{pmatrix}$;
 е) $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1,5 & -1,5 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}$; ж) $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; з) $X = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$;
 и) $X = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 10 & -2 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}$; к) $X = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 10 & 11 & -3 \end{pmatrix}$; л) $X = \begin{pmatrix} 35 & -22 \\ 59 & -37 \end{pmatrix}$;
 м) $X = \begin{pmatrix} -50 & -76 \\ 40 & 61 \end{pmatrix}$.
 3.4. а) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

§4

4.1. а) $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 2$; б) $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 2$;

в) $x_1 = -1, x_2 = 3, x_3 = 1$; г) $x_1 = -7, x_2 = 7, x_3 = 5$;

4.2. $x = -1, y = 3, z = 2$. 4.3. $x = 1, y = 5, z = 2$.

4.4. а) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \\ 1 \end{pmatrix};$ г) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -76 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -76 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix};$

д) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -570 \\ 0 \\ 320 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -570 \\ 0 \\ 320 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

е) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 870 \\ 0 \\ -720 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -33 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 870 \\ 0 \\ -720 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -33 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

ж) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -280 \\ 0 \\ -160 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 40 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -280 \\ 0 \\ -160 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 40 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

з) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 240 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 35 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 240 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 35 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$

и) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$ к) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};$

л) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix};$

м) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -0,5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

н) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

$$\text{о)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{п)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 24 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -21 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 24 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -21 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

4.5. а) Совместна; б) несовместна; в) несовместна.

$$4.6. \text{ а)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{д)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -1,5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{е)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{з)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{и)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{к)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\text{л)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{м)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{н)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{о)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -9 \\ 1 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{п)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -20 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{р)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 35 \\ -17 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{с)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 110 \\ -40 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 4.7. а) $a \neq -6$; б) $a = 2$; в) $a \neq 5$; г) $a = 0$; д) $a \neq 5$;
е) $a = -4$; ж) $a = 11$; з) $a = 18$; и) $a = -2$.

$$4.8. \text{ а) } a = 2, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ 0 \\ -40 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } a = 5, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ 0 \\ -17 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } a = 3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -20 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -11 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } a = 3, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -68 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- 4.9. а) $a = 2$; б) $a = -4$; в) $a = 3$.

4.10. а) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 23 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -76 \\ 17 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$ в) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 166 \\ 45 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

4.11. а) $x_1 = 6 - 5t, x_2 = 0, x_3 = t; t = 1, (1; 0; 1);$

б) $x_1 = 2t + 3, x_2 = t, x_3 = 0; t = -2, (-1; -2; 0);$

в) $x_1 = 3t - 10, x_2 = t, x_3 = 0; t = 3, (-1; 3; 0);$

г) $x_1 = 2t + 5, x_2 = 0, x_3 = t; t = -2, (1; 0; -2).$

4.12. а) $P = 518, \vec{q} = (3; 0; 5);$ б) $P = 526, \vec{q} = (18; 20; 0);$

в) $P = 350, \vec{q} = (10; 9; 0).$

§ 5

5.1 а) $\lambda = 1: (1; 1), \lambda = 3: (1; -1);$ б) $\lambda = 3: (1; 1), \lambda = 5: (1; -1);$

в) $\lambda = -2: (3; -4), \lambda = 5: (1; 1);$ г) $\lambda = -1: (1; -1), \lambda = 5: (1; 2).$

5.2. а) $\frac{1}{\sqrt{10}};$ б) $\frac{4}{\sqrt{65}};$ в) $\frac{3}{\sqrt{130}};$ г) $\frac{3}{\sqrt{58}}.$

5.3. а) $\lambda_1 = 2, (1; 1; 0); \lambda_2 = 3, (2; 1; 0), (0; 0; 1);$

б) $\lambda_1 = 2, (1; 0; 0), (0; 1; 1); \lambda_2 = 4, (1; 1; -1);$

в) $\lambda_1 = 1, (2; -1; 2); \lambda_2 = 3, (1; -2; -1); \lambda_3 = 5, (0; 1; 0);$

г) $\lambda_1 = 2, (0; 1; 0); \lambda_2 = 3, (1; 3; 1); \lambda_3 = 5, (3; 1; -3).$

5.4. а) $a = 3;$ б) $a = 4;$ в) $a = 3.$

5.5. а) $\lambda = 2;$ б) $\lambda = -4;$ в) $\lambda = -12.$

5.6. а) $\vec{u}_2, \lambda = -1,$ и $\vec{u}_3, \lambda = 2;$ б) $\vec{u}_1, \lambda = -2,$ и $\vec{u}_3, \lambda = 1.$

5.7. а) $\lambda = -2, \lambda = 1, \lambda = 4, t(3; 4; 3), (-6; -8; -6);$

б) $\lambda = 1, \lambda = 5, t(1; 1; 2), (-3; -3; -6);$

в) $\lambda = -2, \lambda = 1, \lambda = 6, t(5; 4; 5), (-10; -8; -10).$

5.8. а) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ -40 \\ 1 \end{pmatrix};$ б) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ -17 \\ 1 \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 64 \\ 0 \\ -13 \\ 1 \end{pmatrix}.$

5.9. а) Собственными векторами матрицы $f(A)$ являются векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3.$ Им соответствуют собственные значения $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 12.$

б) Собственными векторами матрицы $f(A)$ являются векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3.$

Им соответствуют собственные значения $\lambda_1 = 12, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 6.$

II. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Глава 3

Вычисление пределов, производная функции, исследование функций

Справочный материал и примеры решения задач

1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - x^3 + 2x - 6}{5x^4 - x}$.

Решение. Для вычисления указанных видов пределов рациональных функций целесообразно поделить числитель и знаменатель дроби на аргумент в максимальной входящей в выражение степени, в данном случае на x^4 . В результате получаем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - x^3 + 2x - 6}{5x^4 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} - \frac{6}{x^4}}{5 - \frac{1}{x^3}} = \frac{3}{5}.$$

2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 5x^3 + 2x}{x^4 - x}$.

Решение. Числитель и знаменатель данной рациональной функции имеют пределы, равные нулю. В таких случаях целесообразно разложить оба выражения на множители, а затем можно соответствующие многочлены поделить на $x - 1$. Получаем:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 - 5x^3 + 2x}{x^4 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x^3 - 2x^2 - 2x)}{(x-1)(x^3 + x^2 + x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 2x}{x^3 + x^2 + x} = -\frac{1}{3}.$$

3. При вычислении различных пределов удобно пользоваться таблицей эквивалентностей. Напомним, что бесконечно малые функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными (это записывается как $f(x) \sim g(x)$) при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Таблица эквивалентности некоторых функций при $x \rightarrow 0$

$$\begin{array}{lll} \sin x \sim x, & \arcsin x \sim x, & 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \\ \operatorname{tg} x \sim x, & \operatorname{arctg} x \sim x, & e^x - 1 \sim x, \\ \ln(1+x) \sim x, & \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}, & a^x - 1 \sim x \ln a, \\ (1+x)^a - 1 \sim ax, & \text{в частности } \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}. & \end{array}$$

4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - 1 + \cos 2x}{\sqrt{1-4x} - 1 + \ln(1-4x)}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - 1 + \cos 2x}{\sqrt{1-4x} - 1 + \ln(1+3x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - (1 - \cos 2x)}{(\sqrt{1-4x} - 1) + \ln(1+3x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{x} - \frac{1 - \cos 2x}{x}}{\frac{\sqrt{1-4x} - 1}{x} + \frac{\ln(1+3x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5-0}{-2+3} = 5. \end{aligned}$$

5. Таблица производных основных элементарных функций

$$\begin{array}{ll} 1. (x^n)' = nx^{n-1}. & 9. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \\ 2. (a^x)' = a^x \ln a, a > 0. & 10. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \\ 3. (e^x)' = e^x. & 11. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \\ 4. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1. & 12. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}. \\ 5. (\ln x)' = \frac{1}{x}. & 13. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}. \\ 6. (\sin x)' = \cos x. & \\ 7. (\cos x)' = -\sin x. & \\ 8. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}. & \end{array}$$

6. Правила дифференцирования

$$\begin{aligned} (f(x) + g(x))' &= f'(x) + g'(x); \\ (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x); \\ (cf(x))' &= cf'(x), \quad c = \text{const}; \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}; \\ (f(g(x)))' &= f'(t)\Big|_{t=g(x)} \cdot g'(x). \end{aligned}$$

7. Формулы Маклорена для элементарных функций

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

Задача 1. Вычислить производную сложной функции $y = \sin^3 x$.

Решение. Вычисляем по формуле для производной сложной функции.

Сначала выделим внутреннюю функцию $g(x) = \sin x$ и внешнюю функцию $f(t) = t^3$. Получаем:

$$g'(x) = \cos x, \quad f'(t) = 3t^2, \quad (\sin^3 x)' = 3t^2|_{t=\sin x} \cdot \cos x = 3 \sin^2 x \cos x.$$

Задача 2. Вычислить производную функции $y(x)$, заданной в параметрической форме: $x = 2 \cos t$, $y = 4 \sin t$.

Решение. Производная параметрически заданной функции $x = f(t)$, $y = g(t)$ вычисляется по формуле

$$y'(x) = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

В нашем примере получаем $y'(x) = \frac{4 \cos t}{-2 \sin t} = -2 \operatorname{ctg} t$.

Задача 3. Вычислить производную функции $y(x)$, заданной в неявной форме $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение. В случае неявного задания функции $F(x, y) = 0$ для нахождения ее производной нужно:

- 1) вычислить производную по переменной x функции $F(x, y(x))$,
- 2) приравнять эту производную нулю,
- 3) решить полученное уравнение относительно $y'(x)$.

В нашем случае получаем $x^3 + (y(x))^3 - 3xy(x) = 0$,

$$3x^2 + 3y^2 y'(x) - 3y - 3xy'(x) = 0.$$

Отсюда получим, что $y' = \frac{x^2 - y}{x - y^2}$ при $x \neq y^2$.

Задача 4. Найти приближенное значение $\sqrt[3]{8,12}$.

Решение. Для решения задачи используем то, что

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df(x_0), \quad df(x_0) = f'(x_0)\Delta x.$$

Здесь $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 8$, $\Delta x = 0,12$, $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Получаем

$$\sqrt[3]{8,12} \approx \sqrt[3]{8} + \frac{0,12}{3\sqrt[3]{8^2}} = 2,01.$$

Задача 5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$ с помощью правила Лопиталя.

Решение. Согласно правилу Лопиталя для неопределенностей $\left\{ \frac{0}{0} \right\}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}{\cos x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x (\cos x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{-\cos^2 x} = -2.$$

Задача 6. Провести исследование функции $y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.

Решение. 1. Функция определена и непрерывна всюду, кроме точки $x = 1$. Она равна нулю в точке $x = 0$.

2. Вычислим первую производную данной функции: $y' = \frac{x^3(x^3 - 4)}{(x^3 - 1)^2}$.

3. Нахождение интервалов монотонности и точек экстремума функции.

Приравнивая первую производную функции нулю, находим ее критические точки (с учетом тех точек, где производная не существует): $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[3]{4}$, $x_3 = 1$. Данные точки разбивают область определения функции на четыре промежутка монотонности: $(-\infty; 0)$, $(0; 1)$, $(1; \sqrt[3]{4})$, $(\sqrt[3]{4}; +\infty)$. Так как $y' > 0$ при $x \in (-\infty; 0) \cup (\sqrt[3]{4}; +\infty)$ и $y' < 0$ при $x \in (0; 1) \cup (1; \sqrt[3]{4})$, то на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(\sqrt[3]{4}; +\infty)$ функция возрастает, а на промежутках $(0; 1)$ и $(1; \sqrt[3]{4})$ — убывает. Точка $x = 0$ является точкой локального максимума ($y_{\max} = y(0) = 0$), а точка $x = \sqrt[3]{4}$ — точкой локального минимума, $y_{\min} = y(\sqrt[3]{4}) = \frac{4\sqrt[3]{4}}{3}$.

4. Найдем промежутки выпуклости и точки перегиба графика функции. Для этого исследуем знак второй производной:

$$y'' = \frac{6x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3}.$$

Так как $y'' > 0$ при $x \in (-\infty; -\sqrt[3]{2}) \cup (1; +\infty)$ и $y'' < 0$ при $x \in (-\sqrt[3]{2}; 0) \cup (0, 1)$, то на промежутках $(-\infty; -\sqrt[3]{2})$ и $(1; +\infty)$ график функции является выпуклым вниз, а на промежутках $(-\sqrt[3]{2}; 0)$ и $(0, 1)$ график функции является выпуклым вверх. При этом точка $x = -\sqrt[3]{2}$ области определения функции, при переходе через которую вторая производная меняет знак, задает точку перегиба, $y(-\sqrt[3]{2}) = \frac{-2\sqrt[3]{2}}{3}$. Точка $x = 1$ не задает точку перегиба, поскольку она не входит в область определения функции.

5. Найдем асимптоты графика.

Вертикальной асимптотой является прямая $x = 1$, поскольку

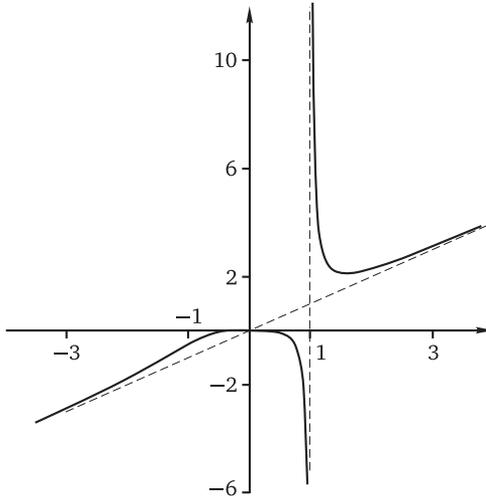
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4}{x^3 - 1} = \infty.$$

Найдем наклонные асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}$. Уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = kx + b$. Для определения ее параметров последовательно вычислим два предела:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x(x^3 - 1)} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4}{x^3 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^3 - 1} = 0.$$

В результате получаем, что наклонной асимптотой является прямая $y = x$. Исследование функции закончено.



§1. Предел последовательности, предел функции

Вычислите пределы последовательностей (1.1–1.37).

$$1.1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+3n)^3 - 27n^3}{(1+4n)^2 + 2n^2}.$$

$$1.2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3-2n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}.$$

$$1.3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2 - 3n + 1}{3n^2 + n - 5} \right)^2.$$

$$1.4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n^5 - 3n^2 + 9}{2n^5 + 2n^3 + 5} \right)^3.$$

$$1.5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3 + 3n^2 + 5n + 1}}{n + 7}.$$

$$1.6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4n^2 + 1} + n)^2}{\sqrt[3]{n^6 + 3}}.$$

$$1.7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[3]{3n^2} + \sqrt[4]{4n^8 + 1}}{(n + \sqrt{n}) \sqrt{7 - n + n^2}}.$$

$$1.8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} - \sqrt[3]{27n^6 + n^4}}{(n + \sqrt[4]{n}) \sqrt{4 + n^2}}.$$

$$1.9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 5} + \sqrt[3]{8n^3 + 2}}{\sqrt[5]{n^5 + 1}}.$$

$$1.10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - 1} - \sqrt[3]{n^3 + 2}}{7n + \sqrt[4]{n^4 + 1}}.$$

$$1.11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^n - 3 \cdot 5^{n+1}}{100 \cdot 2^n + 2 \cdot 5^n}.$$

$$1.12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} 6^{n+1}}.$$

$$1.13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^{50}}{(2n-1)^{48} (n+2)^2}.$$

$$1.14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)^{98} (2n-1)^2}{(2n+4)^{100}}.$$

$$1.15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^6 (9n-4)^4}{(3n-3)^{10}}.$$

$$1.16. \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 - n + 2}}.$$

$$1.17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(3n^2 + 2n + 1)}{n^2 + 3}.$$

$$1.18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1)}{n^2}.$$

$$1.19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + n}{n^2 + 5}.$$

$$1.20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$$

$$1.21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5+n^2}{n+1} + \frac{2-n^2}{n-1} \right).$$

$$1.22. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3+n^2}{n+2} + \frac{5-n^2}{n-2} \right).$$

$$1.23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4-n^2}{n+3} + \frac{1+n^2}{n-3} \right).$$

$$1.24. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{5+4n^2} - 2n).$$

$$1.25. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{1+n+9n^2} - \sqrt{2+n+9n^2}).$$

$$1.26. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{1+5n+n^2} - \sqrt{3+n+n^2}).$$

$$1.27. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2-3n+2n^2} - \sqrt{7+5n+2n^2}).$$

$$1.28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 2n - 7} - n}{4n + 3}.$$

$$1.29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 - 7n + 3} - n}{3n - 4}.$$

$$\begin{aligned}
 1.30. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1} \right)^n. & 1.31. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2+n+1}{5n^2+3n+2} \right)^{n^2+1}. \\
 1.32. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{n-2} \right)^n. & 1.33. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+3} \right)^{n+2}. \\
 1.34. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (n+2)(\ln(2n+4) - \ln(2n+3)). \\
 1.35. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (n+3)(\ln(3n+7) - \ln(3n+5)). \\
 1.36. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+n+3}{n^2+2n-1} \right)^{3n+1}. & 1.37. \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2+2n+5}{2n^2+n+1} \right)^n.
 \end{aligned}$$

Вычислите пределы функций (1.38–1.75).

$$\begin{aligned}
 1.38. \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+4}{x^2+x-3}. & 1.39. \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+2}{x^2-1}. \\
 1.40. \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{2x^2+x-3}. & 1.41. \quad & \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x+6}{x^3+8}. \\
 1.42. \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}. & 1.43. \quad & \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+2x-3}{x^3+5x^2+6x}. \\
 1.44. \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+3x^2+7x+5}{x^2-x-2}. & 1.45. \quad & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}. \\
 1.46. \quad & \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}. & 1.47. \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}. \\
 1.48. \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}. & 1.49. \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}. \\
 1.50. \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-x+4}{3x^2-2}. & 1.51. \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2+x+3}{x^3-1}. \\
 1.52. \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4-2x+1}{x^2-3}. & 1.53. \quad & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}. \\
 1.54. \quad & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}. \\
 1.55. \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x^{10}-10x^2}{2x^{10}+5x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^{10}-10x^2}{2x^{10}+5x^2}. \\
 1.56. \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x^{11}+15x^3}{2x^{11}-5x^3} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{16x^{11}+15x^3}{2x^{11}-5x^3}. \\
 1.57. \quad & \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{32x^{10}+4x^{15}}-3x^4}{x^2+8x^4} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32x^{10}+4x^{15}}-3x^4}{x^2+8x^4}. \\
 1.58. \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right). & 1.59. \quad & \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^2+x-2} \right).
 \end{aligned}$$

$$1.60. \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 5x + 6} + \frac{1}{x - 2} \right).$$

$$1.62. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+6}}{\sqrt{x-4} - 1}.$$

$$1.64. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}.$$

$$1.66. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x).$$

$$1.67. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 - 3x - 4}).$$

$$1.68. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x^2 - 3x + 1}).$$

$$1.69. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 6x + 4} + x).$$

$$1.70. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{19x}.$$

$$1.72. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}.$$

$$1.74. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{2x+1} \right)^x.$$

1.76. Найдите порядок малости функций при $x \rightarrow 0$:

а) $f(x) = x \sin 5x$;

б) $f(x) = \sin^2 5x \ln(1 + 3x)$;

в) $f(x) = (\sqrt[3]{1+2x} - 1)^4 \cos \pi x$; г) $f(x) = \frac{x^5}{1+x^7} \operatorname{arctg} x$;

д) $f(x) = (e^x - 1) \ln(\cos x)$; е) $f(x) = (3^x - 1) \ln(1 + \sin 5x)$;

ж) $f(x) = (e^{x^2} - 1) \ln(1 + e^x)$; з) $f(x) = \frac{\sqrt{1+2x^3} - 1}{x}$.

1.77. При каком значении параметра C функции $f(x)$ и $g(x)$ являются эквивалентными при $x \rightarrow x_0$:

а) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^5} - \frac{4}{(x-1)^5(x+3)}$, $g(x) = \frac{C}{(x-1)^4}$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = \frac{(x+3)^4}{x+5} + \frac{(x+3)^4}{x+1}$, $g(x) = C(x+3)^5$, $x_0 = -3$;

в) $f(x) = \frac{3}{(x-2)(x-5)^3} - \frac{1}{(x-5)^3}$, $g(x) = \frac{C}{(x-5)^2}$, $x_0 = 5$;

г) $f(x) = \frac{(x+1)^6}{x-2} + \frac{(x+1)^6}{x+4}$, $g(x) = C(x+1)^7$, $x_0 = -1$?

1.78. Докажите, что

а) $x^3 - x^2 - x + 1 = o(x-1)$ при $x \rightarrow 1$;

б) $\sqrt[3]{x^7} + \sin x^2 = o(\sqrt[5]{x^8})$ при $x \rightarrow 0$;

$$1.61. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{7-3x}}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$1.63. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{x^2 - 1}.$$

$$1.65. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x} - x).$$

$$1.71. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x^2)}{7x^2 + x}.$$

$$1.73. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2 + x^3}.$$

$$1.75. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{3x+1} \right)^{6x+5}.$$

в) $x^3 - 2x^4 = o(\sin^2 2x)$ при $x \rightarrow 0$;

г) $\frac{3x+1}{5x^3-x} = o\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)$ при $x \rightarrow \infty$;

д) $7x - 2x^2 = O(x)$ при $x \rightarrow 0$;

е) $x \sin \sqrt{x} = O(x^{3/2})$ при $x \rightarrow 0$;

ж) $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = O(1)$ при $x \rightarrow 0$;

з) $\frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} = O\left(\frac{1}{x}\right)$ при $x \rightarrow \infty$.

Вычислите пределы, используя замены функций на эквивалентные (1.79–1.115).

1.79. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^3)}{(e^{2x^2}-1)\sin 3x}$.

1.80. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{\ln(\cos 5x)}$.

1.81. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x}$.

1.82. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{e^{4-x} - 1}{\sqrt{2x-7} - 1}$.

1.83. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+x-3x^2+2x^3)}{\ln(1+3x-4x^2+x^3)}$.

1.84. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\sqrt{\frac{2+x}{2-7x}} - 1 \right)$.

1.85. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\sqrt[3]{\frac{3+5x}{3-4x}} - 1 \right)$.

1.86. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 3x}$.

1.87. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{e^{2x^2} - 1}$.

1.88. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x+x^2} - 1}{3x}$.

1.89. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{3 \operatorname{arctg} x}$.

1.90. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\sqrt{1-3x^2} - 1}$.

1.91. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos x} - 1}{\sin^2 x}$.

1.92. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 2x}$.

1.93. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 2x}{\sqrt{\cos 5x} - 1}$.

1.94. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2+1} - e}{\ln(\cos 2x)}$.

1.95. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+\sin 2x)}{\sqrt{1-6x^2} - 1}$.

1.96. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{e^{x-1} - 1}$.

1.97. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(3x-8)}{\sqrt{x-2} - 1}$.

1.98. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\ln x}$.

1.99. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2-x-1} - 1}{\ln(x-1)}$.

1.100. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{\frac{x+1}{3}}$.

1.101. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{2x+1}$.

1.102. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$.

1.103. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{\sin x}{\sin 3} \right)^{\frac{1}{x-3}}$.

1.104. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 2x}}$.

1.105. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin^2 x)^{\frac{1}{\ln(\cos x)}}$.

1.106. $\lim_{x \rightarrow 0} (2 - \cos x)^{\frac{1}{\ln(1+2x^2)}}$.

1.107. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 2x)^{\frac{1}{\sqrt{1-6x}-1}}$.

1.108. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$.

1.109. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^{2x+1}$.

1.110. $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

1.111. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\sin 3x}}$.

1.112. $\lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{\frac{2}{x-3}}$.

1.113. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

1.114. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+7} \right)^{f\left(\frac{1}{n}\right)}$, если $f(x) \sim \frac{5}{x^2}$ при $x \rightarrow 0$.

1.115. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4+2x^2}{4-x^2} \right)^{f\left(\frac{1}{x}\right)}$, если $f(x) \sim 4x^2$ при $x \rightarrow \infty$.

§ 2. Производная функции, заданной явно

2.1. Используя определение производной, вычислите пределы:

а) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$;

б) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos a - \cos x}{x - a}$;

в) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3^{2+\Delta x} - 9}{\Delta x}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{x - 1}$;

д) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(2 \operatorname{tg}(x + \Delta x)) - \cos(2 \operatorname{tg} x)}{4\Delta x}$;

е) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(\operatorname{tg} x) - f(1)}{x - \frac{\pi}{4}}$,

если $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, $f(1) = 3$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$, $f'(1) = 5$;

ж) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) \operatorname{tg} x - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4x - \pi}$,

если $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, $f(1) = 3$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$, $f'(1) = 5$.

Найдите производную функции (2.2–2.45).

2.2. $y = \frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2x^2} + \frac{4}{5\sqrt{x}}$.

2.3. $y = 2x^3 \ln x$.

2.4. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

2.5. $y = \frac{2x^2 - 5x + 6}{3x^4 + x + 1}$.

2.6. $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

2.8. $y = \sqrt{1 + x^2}$.

2.10. $y = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$.

2.12. $y = \sqrt[3]{2x^3 + x + 3}$.

2.14. $y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

2.16. $y = \log_2^3(2x + 2)^4$.

2.18. $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

2.20. $y = \sqrt{\ln(x^2 + \cos x)}$.

2.22. $y = \ln(\arcsin \sqrt{x})$.

2.24. $y = x^3(3x - 7x^2)^4$.

2.26. $y = (\sqrt{1 + x^2} - 3x^2) \operatorname{arctg}(2x^3)$.

2.27. $y = e^{x^2} \sqrt{x^3 + 4x^2 - 7}$.

2.28. $y = x \cdot \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$.

2.29. $y = \frac{3}{5(2 - \sin x)^3}$.

2.31. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

2.33. $y = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$.

2.35. $y = \log_{8x^2+x+2}(e^{4x} + \sqrt{1 + e^{8x}})$.

2.36. $y = \ln \sqrt{\frac{x}{1+x}}$.

2.38. $y = \ln \sqrt{\frac{e^{3x}}{e^{3x} + 1}}$.

2.40. $y = x \sqrt{2 + \sin^2 3x}$.

2.42. $y = (x + 1)^{\operatorname{tg} x}$.

2.44. $y = e^{x^2} (\cos x)^{\sqrt{x}}$.

2.7. $y = \frac{x \ln x - 5 \cos x + 1}{2x^3 + 1}$.

2.9. $y = \sqrt[11]{6 + 5\sqrt{2x}}$.

2.11. $y = (3 + 2x^4 - 5x^3)^4$.

2.13. $y = \ln(x^2 + 3x - \sqrt{x})$.

2.15. $y = \sin^2 3x$.

2.17. $y = e^{x \ln(3x+1)}$.

2.19. $y = \ln^2(1 + \cos 2x)$.

2.21. $y = \cos(4x^2 \ln x)$.

2.23. $y = e^{\sqrt{(x^2+x) \sin x}}$.

2.25. $y = (3x^4 - 5x) \ln(x + \sqrt{x})$.

2.30. $y = \frac{1 - \cos 4x}{1 + \cos 4x}$.

2.32. $y = \frac{x \operatorname{arctg} x}{1 + x^2}$.

2.34. $y = \frac{x \sqrt{1 - x^2}}{1 + x^2}$.

2.37. $y = \frac{e^{-x^2}}{1 + \sqrt{x}}$.

2.39. $y = x^2 \arcsin \sqrt{1 - x^2}$.

2.41. $y = (x^2 + 1)^x$.

2.43. $y = (3x^2 + 3x - 2)^{\operatorname{arctg} x}$.

2.45. $y = x^2 (\operatorname{tg} x)^{3x-2}$.

2.46. Чему равно значение $f(a)$, если известно, что

$$f(x) = g(h(x)) \quad \text{и}$$

а) $g(a) = b, h(a) = c;$ **б)** $g(b) = c, h(a) = b?$

2.47. Чему равно значение $f'(a)$, если известно, что

$$f(x) = g(h(x)) \quad \text{и}$$

а) $g'(a) = \alpha, h'(a) = \beta;$ **б)** $g'(b) = \alpha, h'(a) = \beta, h(a) = b?$

2.48. Найдите $g'(1)$, если $g(x) = f(f(f(x)))$, где

а) $f(x) = x^6 - x + 1;$ **б)** $f(x) = x^3 + 1.$

2.49. Вычислите дробь $\frac{h'(x)}{g'(3^x)}$, если $h(x) = g(3^x)$.

2.50. Вычислите дробь $\frac{h'(x)}{g'(x)}$, если $g(x) = \ln h(x)$.

2.51. Найдите при $x = 2$ значение сложной функции $f(x) = g(h(x))$ и ее производной, если $g(1) = 2, h(1) = 1, g'(x) = \pi x^{\pi-1}$ и $h'(x) = 3x^2$.

2.52. Найдите значения параметров a и b , при которых функция $y = f(x)$ будет дифференцируема на всей числовой прямой:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 3, \\ ax^2 + 10x - 5b, & x \geq 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 1, & x \geq 0, \\ (x+a)e^{-bx}, & x < 0. \end{cases}$$

2.53. Для функции y найдите предел эластичности $E_x(y)$ при $x \rightarrow \infty$, если эластичность функции $y = y(x)$ вычисляется по формуле

$$E_x(y) = \frac{dy}{y} : \frac{dx}{x} = \frac{y' \cdot x}{y}.$$

Проверьте ответ, найдя эластичность функции $z = C \cdot x^n$, эквивалентной y при $x \rightarrow \infty$.

$$\text{а) } y = \frac{x^5 + 3}{x^2 + x}; \quad \text{б) } y = \frac{x^3 - x}{x^4 + 1}.$$

2.54. Для функции y найдите предел эластичности $E_x(y)$ при $x \rightarrow \infty$, если эластичность функции $y = y(x)$ вычисляется по формуле

$$E_x(y) = \frac{dy}{y} : \frac{dx}{x} = \frac{y' \cdot x}{y}.$$

Проверьте ответ, найдя эластичность функции $z = C \cdot x^n$, эквивалентной y при $x \rightarrow 0$.

$$\text{а) } y = \frac{x^{10} + 3}{x^6 + x^4}; \quad \text{б) } y = \frac{2 - x^4}{x^7 + x^3}.$$

2.55. К графику функции $y = 0,5(x - 2)^6$ в точке $M(3; 0,5)$ проведена касательная. На касательной взяты точки A и B с разностью проекций на ось Ox , равной 5. Найдите

- а) разность их проекций на ось Oy ;
 б) квадрат расстояния между точками A и B .

2.56. Прямая l получена зеркальным отражением касательной к графику функции $y = 0,5(x - 2)^6$ в точке $M(3; 0,5)$ относительно прямой $y = x$. Найдите квадрат расстояния между точками A и B , находящимися на прямой l , если разность их проекций на ось Ox равна 6.

2.57. Напишите уравнение касательной к параболе $y = x^2 - x$, проходящей через точку с координатами $(2; 1)$.

2.58. В какой точке на параболе $y = x^2$ касательная

- а) параллельна прямой $y = 4x - 1$;
 б) перпендикулярна прямой $2x - 6y + 3 = 0$;
 в) составляет с прямой $3x - y + 1 = 0$ угол 45° ?

2.59. Напишите уравнение касательной, которая перпендикулярна прямой $2x - 6y + 5 = 0$, к графику функции $y = x^3 + 3x^2 - 5$.

2.60. Напишите уравнение прямой, которая проходит через начало координат и касается гиперболы $y = \frac{x+9}{x+5}$.

2.61. Найдите производные указанного порядка от следующих функций:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = (x^2 + 1)^3, y''; & \text{б) } y = xe^{x^2}, y''; \\ \text{в) } y = \sqrt{9 - x^2}, y''; & \text{г) } y = \cos^2 x, y'''; \\ \text{д) } y = \frac{1}{1-x}, y^{(5)}; & \text{е) } y = x^3 \ln x, y^{(4)}; \\ \text{ж) } y = 3^{2x+5}, y^{(5)}; & \text{з) } y = (x^2 + 1) \ln x, y^{(5)}; \\ \text{и) } y = \ln(2x + 4), y^{(n)}; & \text{к) } y = \frac{x}{x+1}, y^{(n)}; \\ \text{л) } y = \sin(3x + 1), y^{(n)}. & \end{array}$$

2.62. Найдите $f''(1)$, если $f(x) = g(h(x))$ и $h(1) = 2$, $h'(2) = 3$, $h'(1) = 4$, $g(1) = 3$, $g(2) = 10$, $g'(5) = 3$, $g'(3) = 4$, $g'(2) = 2$, $h''(1) = 5$, $g''(5) = 4$, $g''(2) = -1$.

2.63. Найдите $h^{(7)}(x)$, если $h^{(5)}(x) = 4^{-\sin x}$.

§ 3. Производная функций, заданных параметрически или неявно

3.1. Напишите уравнения касательных к графикам следующих функций, заданных параметрически, в точке, соответствующей $t = t_0$:

а) $y = 2t^2 - 3t + 1$, $x = -t^2 + 2t + 4$, $t_0 = 2$;

б) $y = 2t^2 + 4t - 10$, $x = 4t^2 - 12t + 7$, $t_0 = 2$;

в) $y = -t^2 + 5t + 3$, $x = 2t^2 - 3t$, $t_0 = -1$;

г) $y = 5t^2 - 2t - 5$, $x = t^2 + 4t - 1$, $t_0 = -1$;

д) $x = \frac{t}{1+t^3}$, $y = \frac{t^2}{1+t^3}$, $t_0 = 1$;

е) $x = \frac{1+\ln t}{t^2}$, $y = \frac{3+2\ln t}{t}$, $t_0 = 1$;

ж) $x = \frac{t+1}{t}$, $y = \frac{t-1}{t}$, $t_0 = -1$;

з) $x = \frac{1}{t+1}$, $y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2$, $t_0 = -\frac{1}{2}$.

3.2. Найдите производные второго порядка y''_{xx} функции $y = f(x)$, заданной параметрически:

а) $x = t^3$, $y = t^2$;

б) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$;

в) $x = \frac{t^2}{1+t^3}$, $y = \frac{t^3}{1+t^3}$;

г) $x = \frac{e^t}{1+t}$, $y = (t-1)e^t$;

д) $x = \ln(1+t^2)$, $y = \operatorname{arctg} t$;

е) $x = \frac{1}{t^2}$, $y = \frac{1}{1+t^2}$.

3.3. Зависимость y от x задана параметрически ($x = x(t)$ и $y = y(t)$), найдите при заданных условиях

а) $\frac{d^{11}y}{dx^{11}}$ при $t = 2$; $\frac{d^{10}y}{dx^{10}} = \frac{e^t}{t}$ и $\frac{dx}{dt} = \frac{e^t}{t^3}$;

б) $\frac{d^8y}{dx^8}$ при $t = \frac{\pi}{3}$; $\frac{d^7y}{dx^7} = \sin^{10} t$ и $\frac{dx}{dt} = \sin^9 t$.

3.4. Найдите значение производной $y'(M)$ функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением

а) $e^x + \sqrt{x+y} = y + 1$, $M(0; 1)$;

б) $\ln(x+y^2) + \operatorname{arctg} x = 0$, $M(0; 1)$;

в) $\sqrt{xy} + \ln y = x^5$, $M(1; 1)$;

г) $e^{y^2-1} + x^2(y+0,5) = 7$, $M(2; 1)$.

3.5. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке M , к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением:

а) $xy + \ln y = 1$, $M(1; 1)$;

б) $x^2 + 2xy - y^2 = 7$, $M(2; 1)$.

в) $x^2 + xy + y^2 = 3$, $M(1; 1)$;

3.6. Напишите уравнение нормали, проведенной в точке M , к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно:

а) $y^{2x} + 3xy^2 - 2x - 12y + 9 = 0$, $M(2; 1)$;

б) $x^{y-1} - 2x^2y^3 + 3x + 20y - 28 = 0$, $M(1; 2)$;

в) $x^{1+\ln y} + 4x^2y^3 + 3x + 12y - 20 = 0$, $M(1; 1)$;

г) $y^{x-y} + 5xy^3 - 7x - 21y + 24 = 0$, $M(2; 1)$.

3.7. Найдите вторые производные y''_{xx} функции $y = y(x)$, заданной неявно:

а) $y = \sin(x + y)$;

б) $e^{x-y} = x + y$;

в) $e^{2y} - 2\ln x - 1 = 0$;

г) $x^2 + 2xy - y^2 = 16$;

д) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$;

е) $y = 2x \cdot \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

3.8. Зависимость $y = f(x)$ задана неявно уравнением. Найдите параметр b в уравнении $y = kx + b$ касательной к графику $y = f(x)$ в точке A , если:

а) $x \cdot g(y) + y \cdot h(x) - 15 = 0$, $A(2; 3)$, $g(3) = -3$, $g'(3) = -4$, $h(2) = 7$, $h'(2) = 2$;

б) $x \cdot g(y) + y \cdot h(x) + 28 = 0$, $A(3; 2)$, $g(2) = -6$, $g'(2) = 2$, $h(3) = -5$, $h'(3) = 4$.

§ 4. Дифференциал функции и приближенные вычисления

4.1. Найдите первый и второй дифференциал функции

а) $y = (1 + x + x^2)e^{-x}$;

б) $y = 3x - 1 + \operatorname{tg} 4x$;

в) $y = x(\sin \ln x + \cos \ln x)$;

г) $y = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$.

4.2. Найдите d^2y в точке $(x_0; y_0)$ для функции $y = y(x)$, заданной неявно:

а) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$, $(1; 1)$;

б) $2\ln(y - x) + \sin xy = 0$, $(0; 1)$;

в) $x^3y + \arcsin(y - x) = 1$, $(1; 1)$;

г) $3(y - x + 1) + \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = 0$, $(1; 0)$.

4.3. Заменяя приращение функции дифференциалом, найдите приближенно значение x , если

а) $g(-5) = -3$, $g(x) = -2,96$ и $g'(-5) = 2$;

б) $g(5) = 2$, $g(x) = 2,04$ и $g'(5) = -4$;

в) $g(-5) = 2$, $g(x) = 2,04$ и $g'(-5) = -4$;

г) $g(-3) = 5$, $g(x) = 5,04$ и $g'(-3) = -2$.

4.4. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y = f(x)$ в точке $x = a$:

а) $f(x) = x^5, a = 2,001$; б) $f(x) = \sqrt{4x - 3}, a = 0,98$;

в) $f(x) = \sqrt{x^3}, a = 1,02$; г) $f(x) = x^3, a = 2,999$;

д) $f(x) = e^{x-3} - 2x, a = 2,98$; е) $f(x) = \sqrt{4x+1}, a = 1,97$;

ж) $f(x) = -x - \ln(x+2), a = -1,03$;

з) $f(x) = e^{x^2-x}, a = 1,2$.

4.5. Используя понятие дифференциала функции, вычислите приближенно:

а) $1,015^5$; б) $\sqrt{3,98}$; в) $\sqrt[3]{1,02}$;

г) $\sqrt[3]{124}$; д) $\sqrt[4]{80,5}$; е) $\arctg 1,04$.

4.6. Вычислите приближенно с использованием дифференциала, на сколько за 3 года изменится начальный вклад, составляющий 980 рублей, если годовая процентная ставка составляет 0,1%?

4.7. На сколько увеличится объем шара, если его радиус $R = 15$ см увеличить на 0,2 см? Вычислите приближенно с использованием дифференциала.

4.8. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема. Докажите, что

$$f(x + at) - f(x) = k \cdot t + o(t)$$

при $t \rightarrow 0$ ($a \neq 0$). Найдите k .

4.9. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема. Докажите, что

$$f(x + at) - f(x) \sim k \cdot t$$

при $t \rightarrow 0$ ($a \neq 0$). Найдите k .

4.10. Известно, что $f(x + at) - f(x) \sim k \cdot t$ при $t \rightarrow 0$ ($k \neq 0, a \neq 0$). Докажите, что функция $f(x)$ дифференцируема, и найдите $f'(x)$.

§ 5. Формула Тейлора

5.1. Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ по целым неотрицательным степеням двучлена $x + 3$ до члена третьего порядка включительно.

5.2. Разложите функцию $f(x) = \frac{1}{x-2}$ по целым неотрицательным степеням двучлена $x - 1$ до члена четвертого порядка включительно.

5.3. Найдите три члена разложения функции $f(x) = \sqrt{x}$ по целым неотрицательным степеням разности $x - 1$.

5.4. Функцию $f(x)$ в окрестности точки $x = 0$ приближенно замените многочленом третьей степени:

а) $f(x) = e^{2x-x^2}$;

б) $f(x) = e^{\sin x}$.

5.5. Напишите разложение многочлена четвертой степени $P(x)$, используя формулу Тейлора:

а) по степеням $x - 10$; найдите $P''(10)$, если $P(10) = 4$, $P'(10) = 1$, $P'''(10) = 18$, $P^{(4)}(10) = 48$ и $P(11) = 11$;

б) по степеням $x - 11$; найдите $P'''(11)$, если $P(11) = 5$, $P'(11) = 4$, $P''(11) = 6$, $P^{(4)}(11) = 72$ и $P(10) = 5$;

в) по степеням $x - 2$; найдите $P(-1)$, если $P(2) = -1$, $P'(2) = 0$, $P''(2) = 2$, $P'''(2) = -12$, $P^{(4)}(2) = 24$.

5.6. При каких значениях параметров a и b выполнено равенство $ae^x - \frac{b}{1-x} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$?

5.7. Ограничившись тремя отличными от нуля членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите Cx^n , если при $x \rightarrow 0$

а) $6 \cos 2x - 6 - 12x^2 = Cx^n + o(x^n)$;

б) $4e^{-x^3} - 4 + 4x^3 = Cx^n + o(x^n)$;

в) $15 \sin 2x - 30x + 20x^3 = Cx^n + o(x^n)$;

г) $8\sqrt{1+x^2} - 8 - 4x^2 = Cx^n + o(x^n)$.

5.8. Используя табличное разложение соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите разложение функции $y = f(x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$. Ограничьтесь в разложении первым отличным от нуля членом.

а) $f(x) = \sqrt{1+4x^2} + 2x^4 - 2x^2 - 1$;

б) $f(x) = e^{-2x} - 2x^2 + 2x - 1$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{1-6x} + 4x^2 + 2x - 1$;

г) $f(x) = e^{4x} - 8x^2 - 4x - 1$.

5.9. Используя разложения по формуле Маклорена для элементарных функций, найдите, ограничившись в разложении первым отличным от нуля членом, приближенное значение

а) $f(0,5)$, где $f(x) = 3 \sin x - \sin 3x$;

б) $f(0,3)$, где $f(x) = 2 \cos 2x - 2 \cos x$;

в) $f(0,5)$, где $f(x) = \sqrt{1-2x^2} + x^2 - 1$;

г) $f(0,2)$, где $f(x) = \sqrt[3]{1+3x} - 1 - x$.

5.10. Ограничившись тремя отличными от нуля членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите указанное приближенное значение:

а) $f(0,5)$, где $f(x) = 3 \cos 2x - 3 + 6x^2$;

б) $f(0,5)$, где $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - 2 - x^2$;

в) $f(0,4)$, где $f(x) = e^{2x} - 1 - 2x$.

г) $f(0,5)$, где $f(x) = 6 \ln(1+x^2) - 6x^2 + 3x^4$.

5.11. Используя формулу Маклорена, найдите $f^{(4)}(0)$:

а) $f(x) = \frac{1}{1-x+x^2} - \cos x^2$;

б) $f(x) = \sin^2 x - \frac{x^2}{x^2+1}$;

в) $f(x) = \ln(1-x+x^2) + x - \frac{x^2}{2}$.

5.12. Применяя формулу Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 и сохраняя члены до второго порядка малости включительно относительно Δx , найдите приближенное значение выражения

а) $2f(x_0 + 2\Delta x) - 3f(x_0) + f(x_0 - 4\Delta x)$;

б) $2f(x_0 + 3\Delta x) - 5f(x_0) + 3f(x_0 - 2\Delta x)$;

в) $f(x_0 + 4\Delta x) - 3f(x_0) + 2f(x_0 - 2\Delta x)$;

г) $4f(x_0 + 3\Delta x) - 7f(x_0) + 3f(x_0 - 4\Delta x)$.

5.13. Используя стандартное разложение функции y по формуле Маклорена по степеням $t = \frac{1}{x}$, найдите наклонные асимптоты графика функции

а) $f(x) = x^3 \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - x^2$, $y = \ln(1+t)$;

б) $f(x) = x^2(e^{\frac{2x+1}{x}} - e^2)$, $y = e^t$;

в) $f(x) = \sqrt[10]{x^{20} + 10x^{19}} - x^2$, $y = (1+t)^\alpha$;

г) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+4}}$, $y = (1+t)^\alpha$.

§ 6. Вычисление пределов с помощью производной

Используя правило Лопиталья, вычислите пределы (6.1–6.15).

6.1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\sin 2x}$.

6.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

6.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\arcsin 2x}$.

6.4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt[3]{2x} - 2}$.

6.5. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x}$.

6.6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5}{e^{\frac{x}{100}}}$.

6.7. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x.$

6.8. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x).$

6.9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3}.$

6.10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{x^3}.$

6.11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}.$

6.12. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$

6.13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 5x}.$

6.14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^2 \arcsin x}.$

6.15. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{\frac{3}{x}} - 1}.$

Используя стандартные разложения элементарных функций по формуле Маклорена, вычислите пределы (6.16–6.22).

6.16. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$

6.17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$

6.18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}.$

6.19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2} \cos x}{x^4}.$

6.20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}.$

6.21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} (\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}).$

6.22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{7/4} (\sqrt[4]{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - 2\sqrt[4]{x}).$

6.23. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$. Используя формулу Тейлора или правило Лопиталья, найдите

а) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 2\Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - 5\Delta x)}{3\Delta x}$, если $f(x_0) = 3$, $f'(x_0) = 6$;

б) $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + 5\Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - 7\Delta x)}{2\Delta x}$, если $f(x_0) = 4$, $f'(x_0) = 8$.

§ 7. Исследование функций и построение графиков

7.1. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)$ на указанном отрезке:

а) $f(x) = x^3 - 12x + 7$ на отрезке $[0; 3]$;

б) $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$ на отрезке $[-3; 1]$;

в) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 6$ на отрезке $[0; 2]$;

г) $f(x) = x^2 + 4|x - 1| - 4$ на отрезке $[-1; 2]$;

д) $f(x) = x^2 + 6|x - 2| - 12$ на отрезке $[-1; 3]$;

е) $f(x) = x^2 + 8|x - 3| - 24$ на отрезке $[-1; 4]$.

7.2. Найдите точку минимума функции $f(x^3 - 9x^2 + 24x + 10)$, если $f(x)$ — монотонно убывающая функция, не имеющая критических точек.

7.3. Найдите точку максимума функции $f(5 + 45x - 3x^2 - x^3)$, если $f(x)$ — монотонно убывающая функция, не имеющая критических точек.

7.4. Функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную вторую производную при всех $x \in (-\infty; +\infty)$. График функции $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = 1 - x$ при $x \rightarrow -\infty$ и $y = 2x + 1$ при $x \rightarrow +\infty$. Кроме того, $(x - 2) \cdot f''(x) < 0$ при всех $x \neq 2$. Изобразите эскиз графика $y = f(x)$ и оцените возможные значения $f(2)$.

7.5. Функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную вторую производную при всех $x \in (-\infty; +\infty)$. График функции $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = x + 3$ при $x \rightarrow -\infty$ и $y = 2x - 2$ при $x \rightarrow +\infty$. Кроме того, $(x + 1) \cdot f''(x) > 0$ при всех $x \neq -1$. Изобразите эскиз графика $y = f(x)$ и оцените возможные значения $f(-1)$.

7.6. Найдите сумму ординат всех точек пересечения асимптот графика

$$\text{а) } y = \frac{2x^3 - 3x^2}{x^2 - 3x + 2};$$

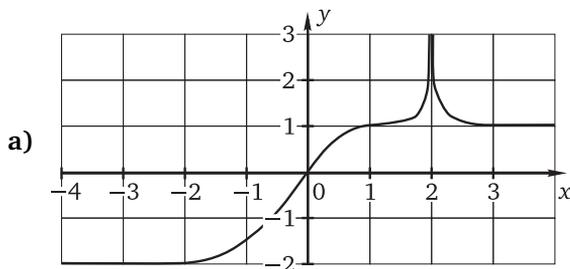
$$\text{б) } y = \frac{3x^2 - 2x^3}{x^2 + 2x - 8}.$$

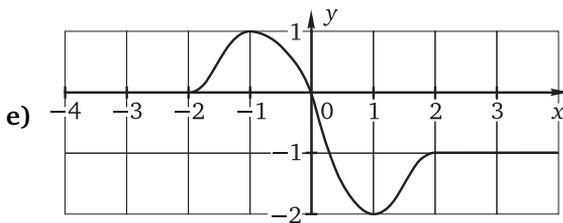
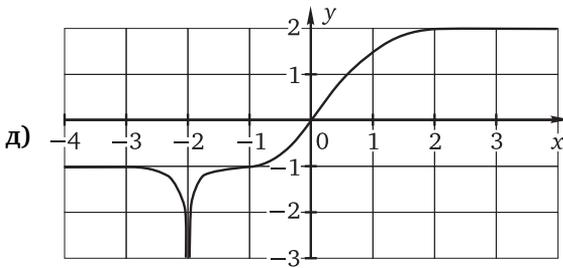
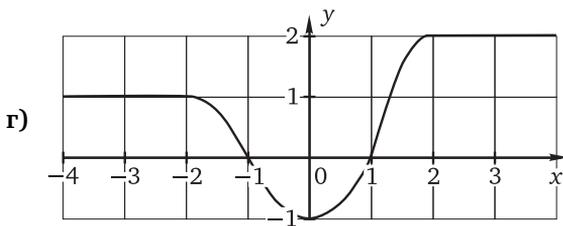
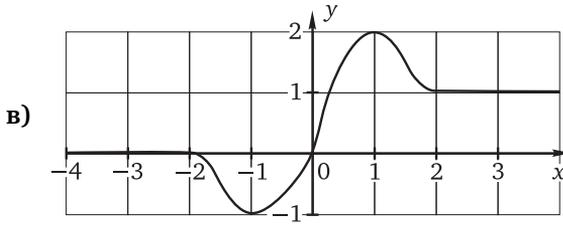
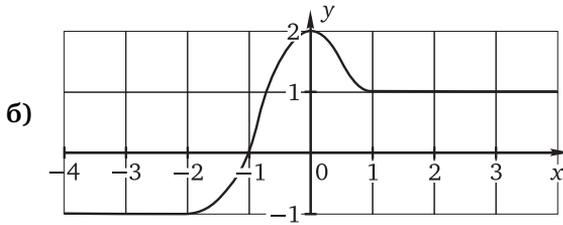
7.7. При каких значениях параметров a и b график функции $y = f(x)$ имеет указанную асимптоту?

$$\text{а) } f(x) = \frac{ax^2 + 4}{x + b}; y = 2x - 2 \text{ при } x \rightarrow \infty;$$

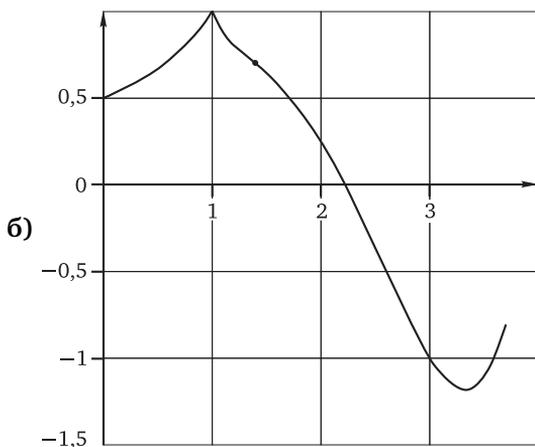
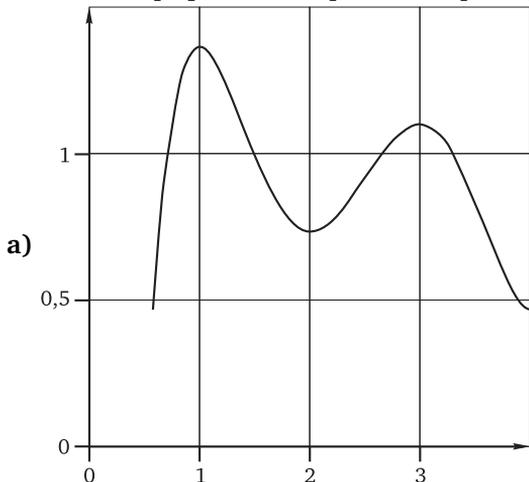
$$\text{б) } f(x) = \frac{ax^2 - 5}{x + b}; y = 3x + 3 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

7.8. Исследуйте поведение непрерывной функции $y = f(x)$ и изобразите эскиз ее графика по графику ее производной $y = f'(x)$, если $f(0) = 1$.





7.9. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке, выясните вид графиков ее первой и второй производных.



Проведя необходимое исследование, постройте графики следующих функций (7.10—7.47).

7.10. $y = (x + 1)(x - 2)^2$.

7.11. $y = (x - 1)^2(x + 3)$.

7.12. $y = x^2(x + 1)^2$.

7.13. $y = x(x - 2)^3$.

7.14. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

7.15. $y = \frac{5}{x^6} - \frac{6}{x^5}$.

7.16. $y = -4x + 1 + \frac{1}{(x - 2)^4}$.

7.17. $y = -5x + 4 - \frac{1}{(x - 1)^5}$.

7.18. $y = \frac{x^2}{x^3 - 1}.$

7.20. $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}.$

7.22. $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}.$

7.24. $y = \frac{27 - 2x^3}{6x^2}.$

7.26. $y = \frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 4}.$

7.28. $y = \frac{x^4}{(x + 1)^3}.$

7.30. $y = \frac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}.$

7.32. $y = \frac{x^4}{x^3 + 1}.$

7.34. $y = e^{2x - x^2}.$

7.36. $y = \frac{e^x}{x + 1}.$

7.38. $y = (x - 2)e^{\frac{2}{x}}.$

7.40. $y = x e^{-x^2}.$

7.42. $y = x \ln x.$

7.44. $y = \frac{\ln x}{x}.$

7.46. $y = x + \arctg x.$

7.19. $y = \frac{4x^2 + 3x}{2x + 2}.$

7.21. $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}.$

7.23. $y = \frac{x^3}{(x - 2)^2}.$

7.25. $y = \frac{x^2}{(x + 4)^2}.$

7.27. $y = \frac{x^2 - 3x - 18}{x - 9}.$

7.29. $y = \frac{x^3 - x^2}{(x + 1)^2}.$

7.31. $y = \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^4.$

7.33. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$

7.35. $y = x e^{-x}.$

7.37. $y = (x + 1)e^{\frac{1}{x}}.$

7.39. $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$

7.41. $y = x^2 e^{-x^2}.$

7.43. $y = x^2 \ln x.$

7.45. $y = (x - 1)\sqrt[3]{x^2}.$

7.47. $y = x - \arctg 2x.$

Ответы к главе 3

§1

- | | | | | |
|---|-------------------------------|----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| 1.1. $\frac{3}{2}$. | 1.2. $-\frac{2}{9}$. | 1.3. $\frac{25}{9}$. | 1.4. 64. | 1.5. 2. |
| 1.6. 9. | 1.7. $\sqrt{2}$. | 1.8. -3. | 1.9. 3. | 1.10. $\frac{1}{8}$. |
| 1.11. $-\frac{15}{2}$. | 1.12. $\frac{1}{6}$. | 1.13. 4. | 1.14. 1. | 1.15. $\frac{1}{9}$. |
| 1.16. 8. | 1.17. 0. | 1.18. 1. | 1.19. $\frac{1}{2}$. | 1.20. $\frac{4}{3}$. |
| 1.21. -2. | 1.22. -4. | 1.23. 6. | 1.24. $\frac{5}{4}$. | 1.25. $-\frac{1}{6}$. |
| 1.26. 2. | 1.27. $-\frac{4}{\sqrt{2}}$. | 1.28. $\frac{1}{2}$. | 1.29. $\frac{1}{3}$. | 1.30. 0. |
| 1.31. 0. | 1.32. e^5 . | 1.33. e^{-2} . | 1.34. $\frac{1}{2}$. | 1.35. $\frac{2}{3}$. |
| 1.36. e^{-3} . | 1.37. $e^{\frac{1}{2}}$. | 1.38. -5. | 1.39. ∞ . | 1.40. 0. |
| 1.41. $\frac{1}{4}$. | 1.42. $\frac{3}{2}$. | 1.43. $\frac{4}{3}$. | 1.44. $-\frac{4}{3}$. | 1.45. $\frac{2}{3}$. |
| 1.46. -12. | 1.47. 1. | 1.48. $\frac{5}{3}$. | 1.49. 5. | 1.50. $\frac{1}{3}$. |
| 1.51. 0. | 1.52. $\frac{\infty}{8}$. | 1.53. 1. | 1.54. -1. | 1.55. 1. |
| 1.56. 5. | 1.57. $\frac{13}{8}$. | 1.58. -1. | 1.59. $\frac{1}{3}$. | 1.60. -1. |
| 1.61. 1. | 1.62. $\frac{1}{4}$. | 1.63. $-\frac{1}{8}$. | 1.64. $\frac{1}{4}$. | 1.65. 2. |
| 1.66. $+\infty$. | 1.67. 3. | 1.68. $-\frac{3}{2}$. | 1.69. -3. | 1.70. $\frac{3}{19}$. |
| 1.71. 0. | 1.72. $\frac{2}{3}$. | 1.73. 8. | 1.74. 0. | 1.75. e^2 . |
| 1.76. а) x^2 ; б) x^3 ; в) x^4 ; г) x^6 ; д) x^3 ; е) x^2 ; ж) x^2 ; з) x^2 . | | | | |
| 1.77. а) $\frac{1}{4}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{1}{3}$; г) $-\frac{2}{9}$. | | | | |
| 1.79. $\frac{1}{2}$. | 1.80. $-\frac{4}{25}$. | | | |
| 1.81. 4. | 1.82. -1. | 1.83. $-\frac{1}{2}$. | 1.84. 2. | 1.85. 1. |
| 1.86. $\frac{2}{3}$. | 1.87. 1. | 1.88. $\frac{1}{6}$. | 1.89. $\frac{1}{18}$. | 1.90. -6. |
| 1.91. $-\frac{1}{6}$. | 1.92. $-\frac{1}{8}$. | 1.93. $-\frac{8}{25}$. | 1.94. $-\frac{e}{2}$. | 1.95. $-\frac{4}{3}$. |
| 1.96. $\frac{1}{5}$. | 1.97. 6. | 1.98. 3. | 1.99. $\frac{3}{2}$. | 1.100. $e^{-\frac{2}{3}}$. |
| 1.101. e^{10} . | 1.102. $e^{\frac{3}{2}}$. | 1.103. $e^{\text{ctg}3}$. | 1.104. $e^{-\frac{1}{8}}$. | 1.105. e^{-2} . |
| 1.106. $e^{\frac{1}{4}}$. | 1.107. $e^{-\frac{2}{3}}$. | 1.108. e^2 . | 1.109. e^{10} . | 1.110. e^{-8} . |
| 1.111. $e^{-1/3}$. | 1.112. e^6 . | 1.113. e^3 . | 1.114. e^{-10} . | 1.115. e^2 . |

§ 2

2.1. а) $\cos x$; б) $\sin a$; в) $9 \ln 3$; г) $2 \ln 2$; д) $-\frac{\sin(2 \operatorname{tg} x)}{2 \cos^2 x}$;

е) $f' \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \right) \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} \right)^{-2} = f'(1) \cdot 2 = 10$;

ж) $\left(f' \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} + f \left(\frac{\pi}{4} \right) \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} \right)^{-2} \right) : 4 = 2$.

2.2. $2x^2 - \frac{5}{x^3} - \frac{2}{5x\sqrt{x}}$.

2.3. $6x^2 \ln x + 2x^2$.

2.4. $\frac{ad - cb}{(cx + d)^2}$.

2.5. $\frac{-12x^5 + 45x^4 - 72x^3 + 2x^2 + 4x - 11}{(3x^4 + x + 1)^2}$.

2.6. $\frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$.

2.7. $\frac{x^3(-4 \ln x + 10 \sin x + 2) + x^2(30 \cos x - 6) + 5 \sin x + \ln x + 1}{(2x^3 + 1)^2}$.

2.8. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

2.9. $\frac{5}{11} (6 + 5\sqrt{2x})^{-10/11} (2x)^{-1/2}$.

2.10. $-2 \frac{x^2}{1-x^6} \cdot 3 \sqrt{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$.

2.11. $4(3 + 2x^4 - 5x^3)^3 (8x^3 - 15x^2)$.

2.12. $\frac{1}{3} (6x^2 + 1)(2x^3 + x + 3)^{-2/3}$.

2.13. $(4x^{3/2} + 6\sqrt{x} - 1)/(2x^{5/2} + 6x^{3/2} - 2x)$. 2.14. $(1 + x^2)^{-1/2}$.

2.15. $3 \sin 6x$. 2.16. $192 \frac{\log_2^2(2x+2)}{(x+1) \ln 2}$.

2.17. $e^{x \ln(3x+1)} \left(\ln(3x+1) + \frac{3x}{3x+1} \right)$. 2.18. $-2 \frac{x}{1-x^4} \cdot \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

2.19. $-4 \ln(1 + \cos 2x) \cdot \frac{1}{1 + \cos 2x} \cdot \sin 2x$.

2.20. $\frac{1}{2} (\ln(x^2 + \cos x))^{-1/2} \cdot \frac{1}{x^2 + \cos x} \cdot (2x - \sin x)$.

2.21. $-4 \sin(4x^2 \ln x) \cdot (2x \ln x + x)$. 2.22. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\arcsin \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$.

2.23. $\frac{1}{2} e^{\sqrt{(x^2+x) \sin x}} ((x^2 + x) \sin x)^{-1/2} (x^2 \cos x + x(2 \sin x + \cos x) + \sin x)$.

2.24. $x^3(3x - 7x^2)^3(-77x + 21)$.

2.25. $(12x^3 - 5) \ln(x + \sqrt{x}) + (3x^4 - 5x) \cdot (2\sqrt{x} + 1) \cdot \frac{1}{2x^{3/2} + 2x}$.

2.26. $\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - 6x \right) \operatorname{arctg}(2x^3) + (\sqrt{1+x^2} - 3x^2) 6x^2 \cdot \frac{1}{1+4x^6}$.

2.27. $e^{x^2} (2x \sqrt{x^3 + 4x^2 - 7} + (1,5x^2 + 4x)(x^3 + 4x^2 - 7)^{-1/2})$.

2.28. $\arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}}$.

2.29. $\frac{9}{5} \frac{1}{(2 - \sin x)^4} \cos x$.

2.30. $8 \sin 4x \cdot \frac{1}{(1 + \cos 4x)^2}$.

2.31. $(1 - x^2) \frac{1}{(1 + x^2)^2}$.

2.32. $((1 - x^2) \operatorname{arctg} x + x) \frac{1}{(1 + x^2)^2}$.

2.33. $-3x(x^2 + 1)^{-5/2}$.

- 2.34. $(1 - 3x^2)(1 + x^2)^{-2}(1 - x^2)^{-1/2}$.
- 2.35. $y' = \left(4 \ln(x^2 + x + 2) \cdot e^{4x} (1 + e^{8x})^{-1/2} - \ln(e^{4x} + \sqrt{1 + e^{8x}}) \cdot (2x + 1) \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1} \right) \cdot \ln^{-2}(x^2 + x + 1)$.
- 2.36. $\frac{1}{2x^2 + 2x}$. 2.37. $-\frac{1}{2}e^{-x^2} \cdot \frac{4x^2 + 4x^{3/2} + 1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{x})^2}$.
- + 2.38. $3e^{3x} \frac{1}{2e^{6x} + 2e^{3x}}$. 2.39. $2x \arcsin \sqrt{1 - x^2} - x|x|(1 - x^2)^{-1/2}$.
- 2.40. $x^{\sqrt{2 + \sin^2(3x)}} (\sin^2(3x) + 1,5x \ln x \cdot \sin(6x) + 2) (2 + \sin^2(3x))^{-1/2}$.
- 2.41. $(x^2 + 1)^x \left(2x^2 \frac{1}{x^2 + 1} + \ln(x^2 + 1) \right)$.
- 2.42. $(x + 1)^{\operatorname{tg} x} \left(\ln(x + 1) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{x + 1} \right)$.
- 2.43. $(3x^2 + 3x - 2)^{\operatorname{tg} x} \left((6x + 3) \cdot \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{3x^2 + 3x - 2} + \ln(3x^2 + 3x - 2) \cdot \cos^{-2} x \right)$.
- 2.44. $\frac{1}{2}e^{x^2} \cos^{\sqrt{x}}(x) (4x^{3/2} - 2x \cdot \operatorname{tg} x + \ln \cos x) x^{-1/2}$.
- 2.45. $x \cdot \operatorname{tg}^{3x-2} x \cdot (3x \ln \operatorname{tg} x + x(3x - 2) \operatorname{ctg} x \cos^{-2} x + 2)$.
- 2.46. а) Неизвестно; б) с. 2.47. а) Неизвестно; б) $\alpha \cdot \beta$.
- 2.48. а) 125; б) $8748 = (3 \cdot 9^2) \cdot (3 \cdot 2^2) \cdot (3 \cdot 1^2)$.
- 2.49. $3^x \ln 3$. 2.50. $h(x)$. 2.51. $f(2) = 2^{3\pi} + 1$; $f'(2) = 3\pi 2^{3\pi-1}$.
(Указание: найдите сначала функции $g(x)$ и $h(x)$ отдельно.)
- 2.52. а) $a = -2$, $b = 3$; б) $a = 1$, $b = 0,5$. 2.53. а) 3; б) -1.
- 2.54. а) 4; б) -3. 2.55. а) $y_B - y_A = k \cdot (x_B - x_A) = 3 \cdot 5 = 15$; б) 250.
- 2.56. 40.
- 2.57. $y = x - 1$, $y = 5x - 9$.
- 2.58. а) (2; 4); б) $\left(-\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$; в) (-1; 1) и $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{16}\right)$.
- 2.59. $3x + y + 6 = 0$. 2.60. $x + 25y = 0$.
- 2.61. а) $y'' = 6(5x^4 + 6x^2 + 1)$; б) $y'' = 2e^{x^2} (2x^3 + 3x)$;
в) $y'' = -9(9 - x^2)^{-\frac{3}{2}}$; г) $y''' = 4 \sin 2x$;
д) $y^{(5)} = 120(1 - x)^{-6}$; е) $y^{(4)} = \frac{6}{x}$; ж) $y^{(5)} = 3^{2x+5} 2^5 \ln^5 3$;
з) $y^{(5)} = \frac{24 + 4x^2}{x^5}$; и) $y^{(n)} = (-1)^{n+1} \frac{2^n (n-1)!}{(2x+4)^n}$;
к) $y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$; л) $y^{(n)} = 3^n \sin\left(3x + 1 + \frac{\pi n}{2}\right)$.
- 2.62. -6. 2.63. $4^{-\sin x} (\ln^2 4 \cos^2 x + \ln 4 \sin x)$.

§ 3

- 3.1. а) $y = -2,5x + 13$; б) $y = 3x + 9$; в) $y = -x + 2$; г) $y = -6x - 22$;
д) $y = -x + 1$; е) $y = x + 2$; ж) $y = -x + 2$; з) $y = 2x - 3$.
- 3.2. а) $y''_{xx} = -\frac{2}{9t^4}$; б) $y''_{xx} = -\frac{1}{4 \sin^4(t/2)}$; в) $y''_{xx} = \frac{6}{t} \left(\frac{1+t^3}{2-t^3} \right)^3$;

$$\text{г)} y''_{xx} = \frac{2(1+t)^3}{te^t}; \quad \text{д)} y''_{xx} = -\frac{1+t^2}{4t^3}; \quad \text{е)} y''_{xx} = -\frac{2t^6}{(1+t^2)^3}.$$

3.3. а) 2 ($t^2 - t$ при $t=2$); б) 5 ($10 \cos t$ при $t = \frac{\pi}{3}$).

3.4. а) 3; б) -1; в) 3; г) -1.

3.5. а) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$; б) $y = -3x + 7$; в) $y = -x + 2$.

3.6. а) $y = 4x - 7$; б) $y = \frac{1}{7}x + \frac{13}{7}$; в) $y = 2x - 1$; г) $y = -5x + 11$.

3.7. а) $y''_{xx} = -\frac{y}{(1 - \cos(x+y))^3}$; б) $y''_{xx} = \frac{4(x+y)}{(x+y+1)^3}$;

в) $y''_{xx} = -\frac{3+2\ln x}{x^2(1+2\ln x)^2}$; г) $y''_{xx} = \frac{32}{(x-y)^3}$;

д) $y''_{xx} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$; е) $y''_{xx} = 0$.

3.8. а) -3; б) 8.

§ 4

4.1. а) $d^2y = (1 - 3x + x^2)e^{-x} dx^2$; б) $d^2y = 32 \sin 4x \cos^{-3} 4x dx^2$;

в) $d^2y = -\frac{2 \sin \ln x}{x} dx^2$; г) $d^2y = -\left(\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}} + \frac{x}{1-x^2}\right) dx^2$.

4.2. а) $d^2y = -\frac{1}{3} dx^2$; б) $d^2y = -\frac{1}{4} dx^2$; в) $d^2y = 0$; г) $d^2y = \frac{3}{8} dx^2$.

4.3. а) -4,98; б) 4,99; в) -5,01; г) -3,02.

4.4. а) 32,08; б) 0,96; в) 1,03; г) 26,073;

д) -4,98; е) 2,98; ж) 1,06; з) 1,2.

4.5. а) 1,075; б) 1,995; в) 1,007; г) $4\frac{74}{75}$; д) 2,995; е) 0,805.

4.6. 2,94 руб. 4.7. 565,2 см³. 4.8. $k = af'(x)$. 4.9. $k = -af'(2x)$.

4.10. $\frac{k}{a}$.

§ 5

5.1. $f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x+3) - \frac{1}{27}(x+3)^2 - \frac{1}{81}(x+3)^3 + o((x+3)^3)$.

5.2. $f(x) = -1 - (x-1) - (x-1)^2 - (x-1)^3 - (x-1)^4 + o((x-1)^4)$.

5.3. $f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.

5.4. а) $f(x) = 1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$; б) $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$.

5.5. а) $P''(10) = 2$; б) $P'''(11) = 12$; в) 143.

5.6. $a = 1, b = 1$.

5.7. а) $4x^4$; б) $2x^6$; в) $4x^5$; г) $-x^4$.

5.8. а) $4x^6$; б) $-\frac{4}{3}x^3$; в) $-\frac{8}{3}x^3$; г) $\frac{32}{3}x^3$.

5.9. а) $f(x) \approx 4x^3, 0,5$; б) $f(x) \approx -3x^2, -0,27$;

в) $f(x) \approx -\frac{1}{2}x^4, -\frac{1}{32}$; г) $f(x) \approx -x^2, -0,04$.

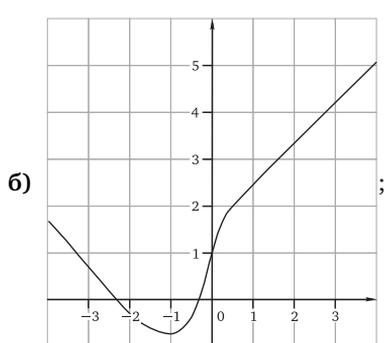
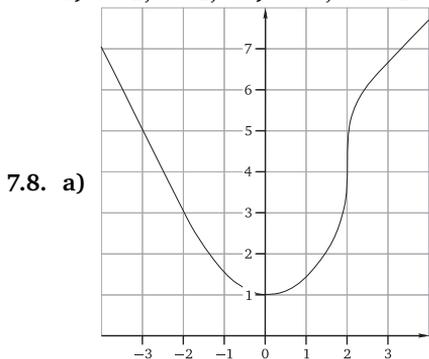
- 5.10. а) $f(x) \approx 2x^4, \frac{1}{8}$; б) $f(x) \approx -\frac{1}{4}x^4, -\frac{1}{64}$;
 в) $f(x) \approx 2x^2, 0,32$; г) $f(x) \approx 2x^6, \frac{1}{32}$.
- 5.11. а) $f(x) = x - x^3 - \frac{x^4}{2} + o(x^4), f^{(4)}(0) = -12$;
 б) $f(x) = \frac{2}{3}x^4 + o(x^4), f^{(4)}(0) = 16$;
 в) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + o(x^4), f^{(4)}(0) = 6$.
- 5.12. а) $12f''(x_0)\Delta x^2$; б) $15f''(x_0)\Delta x^2$;
 в) $12f''(x_0)\Delta x^2$; г) $42f''(x_0)\Delta x^2$.
- 5.13. а) $y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{3}$; б) $y = e^2x + \frac{e^2}{2}$; в) $y = x - 4,5$;
 г) $y = x + 2$ при $x \rightarrow +\infty$; $y = -x + 2$ при $x \rightarrow -\infty$.

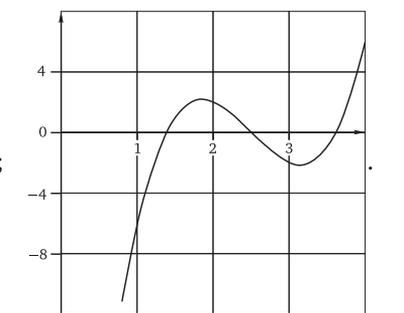
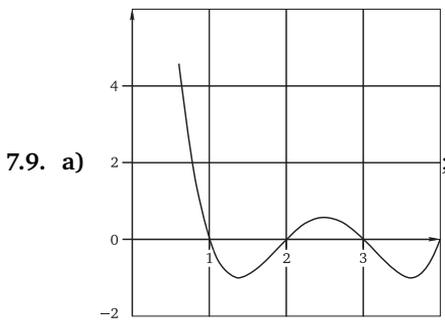
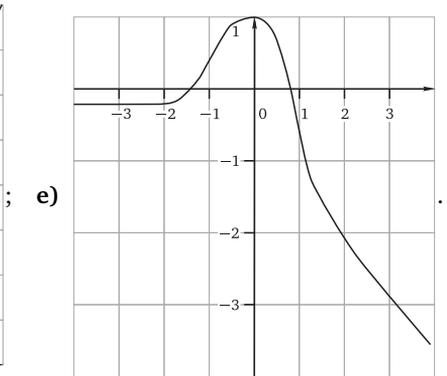
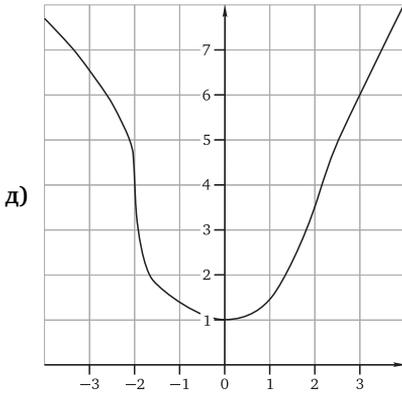
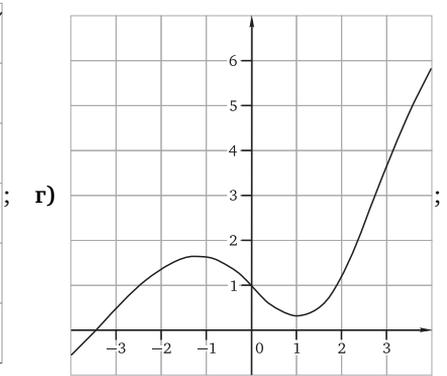
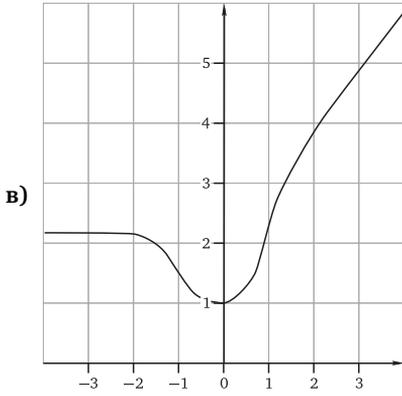
§6

- 6.1. 0. 6.2. $\frac{1}{3}$. 6.3. $\frac{3}{2}$. 6.4. $\frac{3}{2}$. 6.5. $\frac{1}{3}$.
 6.6. 0. 6.7. 0. 6.8. 0. 6.9. $-\frac{1}{2}$. 6.10. -4.
 6.11. 2. 6.12. $\frac{1}{2}$. 6.13. $\frac{9}{50}$. 6.14. $-\frac{4}{3}$. 6.15. $\frac{2}{3}$.
 6.16. 0. 6.17. 2. 6.18. $-\frac{1}{12}$. 6.19. $\frac{1}{3}$. 6.20. $\frac{1}{3}$.
 6.21. $-\frac{1}{4}$. 6.22. $-\frac{3}{16}$. 6.23. а) -6; б) -8.

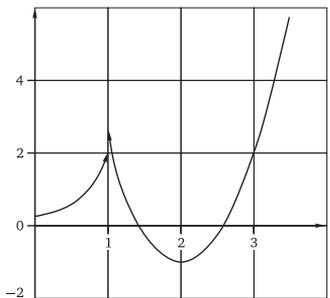
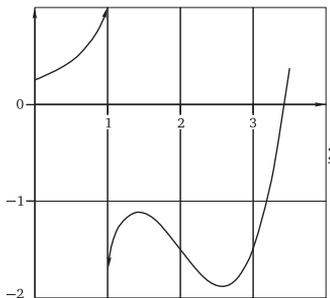
§7

- 7.1. а) 16; б) 688; в) 58; г) $y_{\min} = -3, y_{\max} = 5$;
 д) $y_{\min} = -8, y_{\max} = 7$; е) $y_{\min} = -15, y_{\max} = 9$.
 7.2. $x = 2$ ($x = 4$ точка максимума). 7.3. $x = -5$ ($x = 3$ точка минимума).
 7.4. $f(2) \in (-1; 5)$. 7.5. $f(-1) \in (-4; 2)$.
 7.6. а) 12 ($5 + 7, y = 2x + 3, x = 1, x = 2$);
 б) 18 ($15 + 3, y = -2x + 7, x = -4, x = 2$).
 7.7. а) $a = 2, b = 1$; б) $a = 3, b = -1$.





б)



7.10. $y' = 3x(x - 2)$, $y'' = 6x - 6$, точка минимума $x = 2$, точка максимума $x = 0$, точка перегиба при $x = 1$.

7.11. $y' = (3x + 5)(x - 1)$, $y'' = 6x + 2$, точка минимума $x = 1$, точка максимума $x = -\frac{5}{3}$, точка перегиба при $x = -\frac{1}{3}$.

7.12. $y' = 2x(2x^2 + 3x + 1)$, $y'' = 12x^2 + 12x + 2$, точка минимума $x = -1$, $x = 0$, точка максимума $x = -\frac{1}{2}$, точки перегиба при $x = \frac{-6 \pm \sqrt{3}}{6}$.

7.13. $y' = (x - 2)^2(4x - 2)$, $y'' = 12x^2 - 36x + 24$, точка минимума $x = \frac{1}{2}$, точки перегиба при $x = 1$ и $x = 2$.

7.14. $y = 0$ — горизонтальная асимптота, $y' = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$, $y'' = \frac{-2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$, точка минимума $x = -1$, точка максимума $x = 1$, точки перегиба при $x = \pm\sqrt{3}$, $x = 0$.

7.15. $y = 0$ — горизонтальная асимптота, $x = 0$ — вертикальная асимптота, $y' = 30\frac{x-1}{x^7}$, $y'' = 30\frac{7-6x}{x^8}$, точка минимума $x = 1$, точка перегиба при $x = \frac{7}{6}$.

7.16. $y = -4x + 1$ — наклонная асимптота, $x = 2$ — вертикальная асимптота, $y' = -4 - \frac{4}{(x-2)^5}$, $x_{\min} = 1$, $y(1) = -2$, $y'' = \frac{20}{(x-2)^6}$.

7.17. $y = -5x + 4$ — наклонная асимптота, $x = 1$ — вертикальная асимптота, $y' = \frac{5}{(x-1)^6} - 5$, $x_{\max} = 2$, $y(2) = -7$, $x_{\min} = 0$, $y(0) = 5$, $y'' = -\frac{30}{(x-1)^7}$.

7.18. $y = 0$ — горизонтальная асимптота, $x = 1$ — вертикальная асимптота, $y' = \frac{-x^4 - 2x}{(x^3 - 1)^2}$, $y'' = 2\frac{x^6 + 7x^3 + 1}{(x^3 - 1)^3}$, точка минимума $x = -\sqrt[3]{2}$, точка максимума $x = 0$, точки перегиба при $x = \sqrt[3]{\frac{-7 \pm 3\sqrt{2}}{2}}$.

7.19. $y = 2x - \frac{1}{2}$ — наклонная асимптота, $y' = \frac{4x^2 + 8x + 3}{2(x+1)^2}$, $y'' = \frac{1}{(x+1)^3}$, точка минимума $x = -\frac{1}{2}$, точка максимума $x = -\frac{3}{2}$.

7.20. $y = x$ — наклонная асимптота, $x = 0$ — вертикальная асимптота,

$$y' = \frac{x^3 - 8}{x^3}, y'' = \frac{24}{x^4}, \text{ точка минимума } x = 2.$$

7.21. $y = x$ — наклонная асимптота, $x = \pm 2$ — вертикальные асимптоты,

$$y' = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, y'' = \frac{8x(x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}, \text{ точка минимума } x = 2\sqrt{3}, \text{ точка}$$

максимума $x = -2\sqrt{3}$, точка перегиба при $x = 0$.

7.22. $y = x$ — наклонная асимптота, $y' = \frac{x^2(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2}$, $y'' = \frac{2x(3 - x^2)}{(x^2 + 1)^3}$, точка перегиба при $x = 0$; $\pm\sqrt{3}$.

7.23. $y = x + 4$ — наклонная асимптота, $x = 2$ — вертикальная асимптота,

$$y' = \frac{x^2(x - 6)}{(x - 2)^3}, y'' = \frac{24x}{(x - 2)^4}, \text{ точка минимума } x = 6, \text{ точка перегиба при } x = 0.$$

7.24. $y = -\frac{1}{3}x$ — наклонная асимптота, $x = 0$ — вертикальная асимптота,

$$y' = \frac{-x^3 - 27}{3x^3}, y'' = \frac{27}{x^4}, \text{ точка минимума } x = -3.$$

7.25. $y = 1$ — горизонтальная асимптота, $x = -4$ — вертикальная

асимптота, $y' = \frac{8x}{(x + 4)^3}$, $y'' = \frac{16(2 - x)}{(x + 4)^4}$, точка минимума $x = 0$, точка перегиба при $x = 2$.

7.26. $y = 2x + 11$ — наклонная асимптота, $x = 4$ — вертикальная

асимптота, $y' = \frac{2x^2 - 16x - 7}{(x - 4)^2}$, $y'' = \frac{78}{(x - 4)^3}$, точка минимума $x = \frac{8 + \sqrt{78}}{2}$,

точка максимума $x = \frac{8 - \sqrt{78}}{2}$.

7.27. $y = x + 6$ — наклонная асимптота, $x = 9$ — вертикальная асимптота,

$$y' = \frac{x^2 - 18x + 45}{(x - 9)^2}, y'' = \frac{72}{(x - 9)^3}, \text{ точка минимума } x = 15, \text{ точка максимума } x = 3.$$

7.28. $y = x - 3$ — наклонная асимптота, $x = -1$ — вертикальная асимптота,

$$y' = \frac{x^3(x + 4)}{(x + 1)^4}, y'' = \frac{12x^2}{(x + 1)^5}, \text{ точка минимума } x = 0, \text{ точка максимума } x = -4.$$

7.29. $y = x - 3$ — наклонная асимптота, $x = -1$ — вертикальная асимптота,

$$y' = \frac{x(x^2 + 3x - 2)}{(x + 1)^3}, y'' = \frac{10x - 2}{(x + 1)^4}, \text{ точка минимума } x = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}, \text{ точка}$$

максимума $x = 0$, $x = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$, точка перегиба при $x = \frac{1}{5}$.

7.30. $y = x + 5$ — наклонная асимптота, $x = 1$ — вертикальная асимптота,

$$y' = \frac{(x + 1)^2(x - 5)}{(x - 1)^3}, y'' = \frac{24(x + 1)}{(x - 1)^4}, \text{ точка минимума } x = 5, \text{ точка перегиба}$$

при $x = -1$.

7.31. $y = 1$ — горизонтальная асимптота, $x = 1$ — вертикальная асимптота,

$$y' = -8\frac{(x + 1)^3}{(x - 1)^5}, y'' = 16\frac{(x + 1)^2(x + 4)}{(x - 1)^6}, \text{ точка минимума } x = -1, \text{ точка}$$

перегиба при $x = -4$.

7.32. $y = x$ — наклонная асимптота, $x = -1$ — вертикальная асимптота,

$$y' = \frac{x^6 + 4x^3}{(x^3 + 1)^2}, y'' = -6 \frac{x^2(x^3 - 2)}{(x^3 + 1)^3}, \text{ точка максимума } x = -\sqrt[3]{4}, \text{ точка}$$

минимума $x = 0$, точка перегиба при $x = \sqrt[3]{2}$.

7.33. $x = \pm 1$ — вертикальные асимптоты, $y' = \frac{x^2 - 3}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}},$

$$y'' = \frac{2x(9 - x^2)}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}}, \text{ точка минимума } x = \sqrt{3}, \text{ точка максимума } x = -\sqrt{3},$$

точки перегиба при $x = 0; \pm 3$.

7.34. $y = 0$ — горизонтальная асимптота, $y' = 2(1 - x)e^{2x - x^2},$

$$y'' = 2(2x^2 - 4x + 1)e^{2x - x^2}, \text{ макс: } x = 1, \text{ точки перегиба при } x = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

7.35. $y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \rightarrow +\infty$, $y' = (1 - x)e^{-x},$

$$y'' = (x - 2)e^{-x}, \text{ макс: } x = 1, \text{ точка перегиба при } x = 2.$$

7.36. $y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \rightarrow -\infty$, $x = -1$ —

вертикальная асимптота, $y' = \frac{xe^x}{(x+1)^2}, y'' = \frac{(x^2+1)e^x}{(x+1)^3},$ точка минимума $x = 0$.

7.37. $y = x + 2$ — наклонная асимптота, $x = 0$ — вертикальная асимптота

при $x \rightarrow 0+0$, $y' = \left(\frac{x^2 - x - 1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}, y'' = \left(\frac{3x + 1}{x^4}\right)e^{\frac{1}{x}},$ точка минимума

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ макс: } x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \text{ точка перегиба при } x = -\frac{1}{3}.$$

7.38. $y = x + 7$ — наклонная асимптота, $x = 0$ — вертикальная асимптота

при $x \rightarrow 0+0$, $y' = \left(\frac{x^2 - 9x + 18}{x^2}\right)e^{\frac{9}{x}}, y'' = \left(\frac{45x - 144}{x^4}\right)e^{\frac{9}{x}},$ точка минимума

$x = 6$, точка максимума $x = 3$, точка перегиба при $x = 3, 2$.

7.39. $x = 0$ — вертикальная асимптота при $x \rightarrow 0+0$, $y' = (2x - 1)e^{\frac{1}{x}},$

$$y'' = \left(\frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}}, \text{ точка минимума } x = \frac{1}{2}.$$

7.40. $y = 0$ — горизонтальная асимптота, $y' = (1 - 2x^2)e^{-x^2},$

$$y'' = (4x^3 - 6x^2)e^{-x^2}, \text{ точка минимума } x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ точка максимума } x = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

точки перегиба при $x = 0; \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.

7.41. $y = 0$ — горизонтальная асимптота, $y' = 2(x - x^3)e^{-x^2},$

$$y'' = 2(2x^4 - 5x^2 + 1)e^{-x^2}, \text{ точка минимума } x = 0, \text{ точка максимума } x = \pm 1,$$

точки перегиба при $x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}}$.

7.42. $y' = \ln x + 1, y'' = \frac{1}{x},$ точка минимума $x = \frac{1}{e}.$

7.43. $y' = x(2 \ln x + 1), y'' = 2 \ln x + 3,$ точка минимума $x = e^{-\frac{1}{2}},$ точка перегиба при $x = e^{-\frac{3}{2}}.$

7.44. $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x \rightarrow +\infty$, $x=0$ — вертикальная асимптота при $x \rightarrow 0+0$, $y' = \frac{1-\ln x}{x^2}$, $y'' = \frac{2\ln x-3}{x^3}$, точка максимума $x=e$, точка перегиба при $x=e^{3/2}$.

7.45. $y' = \frac{5x-2}{3\sqrt[3]{x}}$, $y'' = \frac{10x+2}{9\sqrt[3]{x^4}}$, точка минимума $x = \frac{2}{5}$, точка максимума $x=0$, точка перегиба при $x = -\frac{1}{5}$.

7.46. $y = x + \frac{\pi}{2}$ — наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$, $y = x - \frac{\pi}{2}$ — наклонная асимптота при $x \rightarrow -\infty$, $y' = \frac{x^2+2}{x^2+1}$, $y'' = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$, точка перегиба при $x=0$.

7.47. $y = x - \frac{\pi}{2}$ — наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$, $y = x + \frac{\pi}{2}$ — наклонная асимптота при $x \rightarrow -\infty$, $y' = \frac{4x^2-1}{4x^2+1}$, $y'' = \frac{16x}{(4x^2+1)^2}$, точка минимума $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, точка максимума $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, точка перегиба при $x=0$.

Глава 4

Интеграл

Справочный материал и примеры решения задач

1. Основные свойства неопределенного интеграла

- | | |
|--|---|
| 1. $\int f'(x) dx = f(x) + C$ | 2. $\int af(x) dx = a \int f(x) dx, a \neq 0$ |
| 3. $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ | |

2. Таблица первообразных элементарных функций

- | |
|---|
| 1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$ |
| 2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ |
| 3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$ |
| 4. $\int e^x dx = e^x + C$ |
| 5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ |
| 6. $\int \cos x dx = \sin x + C$ |
| 7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$ |
| 8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ |
| 9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$ |
| 10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C, a \neq 0$ |
| 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{ a } + C, a \neq 0$ |
| 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln x + \sqrt{x^2 + a} + C, a \neq 0$ |

3. Метод замены переменной.

Данный метод имеет две основные модификации, которые мы проиллюстрируем на следующих примерах.

1. *Метод подведения под знак дифференциала.*

Вычислить интеграл $\int \sin^3 x \cos x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos x dx &= \int \sin^3 x (\sin x)' dx = \int \sin^3 x d \sin x = \{u = \sin x\} = \\ &= \int u^3 du = \frac{u^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C. \end{aligned}$$

2. *Метод подстановки.*

Вычислить интеграл $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$.

Решение. Выполним подстановку $x = u^2$, $dx = 2u du$, $u = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{(1+u^2)^2 u}{1+u} du = \\ &= 2 \int \frac{u^3+u}{1+u} du = 2 \int \left(u^2 - u + 2 - \frac{2}{1+u} \right) du = \\ &= 2 \int (u^2 - u + 2) du - 4 \int \frac{1}{1+u} du = \\ &= \frac{2u^3}{3} - u^2 + 4u - 4 \ln |1+u| + C = \\ &= \frac{2(\sqrt{x})^3}{3} - x + 4\sqrt{x} - 4 \ln(1 + \sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

4. Метод интегрирования по частям.

В основе данного метода лежит формула

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx.$$

Вычислим следующий интеграл с помощью данного метода.

$$\begin{aligned} \int 2x^2 \ln 3x dx &= \int \left(\frac{2x^3}{3} \right)' \ln(3x) dx = \left(\frac{2x^3}{3} \right) \ln 3x - \int \left(\frac{2x^3}{3} \right) \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{2x^3 \ln 3x}{3} - \frac{2}{3} \int x^2 dx = \frac{2x^3 \ln 3x}{3} - \frac{2x^3}{9} + C. \end{aligned}$$

Формулу интегрирования по частям также используют и в следующем виде:

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x).$$

Рассмотрим ее применение при вычислении предыдущего интеграла:

$$\begin{aligned} \int 2x^2 \ln 3x \, dx &= \int \ln 3x \, d\left(\frac{2x^3}{3}\right) = \left(\frac{2x^3}{3}\right) \ln 3x - \int \left(\frac{2x^3}{3}\right) d \ln 3x = \\ &= \left(\frac{2x^3}{3}\right) \ln 3x - \int \left(\frac{2x^3}{3}\right) \frac{1}{x} dx = \frac{2x^3 \ln 3x}{3} - \frac{2}{3} \int x^2 dx = \\ &= \frac{2x^3 \ln 3x}{3} - \frac{2x^3}{9} + C. \end{aligned}$$

§1. Неопределенный интеграл

1.1. Вычислив производную $(\cos x^5)'$, найдите $\int x^4 \sin x^5 \, dx$.

1.2. Вычислив производную $(\ln(1-x^4))'$, найдите $\int \frac{x^3}{1-x^4} \, dx$.

Найдите неопределенные интегралы (1.3–1.53).

1.3. $\int \left(x^4 + 3\sqrt[5]{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$.

1.4. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{4-x^2}}\right) dx$.

1.5. $\int \frac{5x^8+1}{x^4} dx$.

1.6. $\int \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1} dx$.

1.7. $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$.

1.8. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$.

1.9. $\int \sqrt[3]{3-7x} dx$.

1.10. $\int \frac{6x-1}{\sqrt{1-3x}} dx$.

1.11. $\int \frac{2x+3}{2x+1} dx$.

1.12. $\int \frac{1-3x}{3+2x} dx$.

1.13. $\int \frac{3 \operatorname{arctg}^2 x}{x^2+1} dx$.

1.14. $\int \frac{3 \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx$.

1.15. $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$.

1.16. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$.

1.17. $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$.

1.18. $\int x^2 \sqrt[5]{x^3-8} dx$.

1.19. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$.

1.20. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$.

1.21. $\int \sqrt{3+\cos 5x} \sin 5x dx$.

1.22. $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^4} dx$.

1.23. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$.

1.24. $\int \frac{3\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}+x} dx$.

1.25. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

1.26. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

1.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}.$

1.28. $\int \frac{x dx}{2x^2+3}.$

1.29. $\int \frac{2 \arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

1.30. $\int e^{-(x^2+1)} x dx.$

1.31. $\int \sin(\ln x) \frac{dx}{x}.$

1.32. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}.$

1.33. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}.$

1.34. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+8}}.$

1.35. $\int x \sin 3x dx.$

1.36. $\int x^2 \sin x dx.$

1.37. $\int (x^2+2x+3) \cos x dx.$

1.38. $\int (x+1)e^{-x} dx.$

1.39. $\int (x+1) \cos 3x dx.$

1.40. $\int (6x+3) \cos 2x dx.$

1.41. $\int (2x+2)e^{2x} dx.$

1.42. $\int x^2 e^{-x} dx.$

1.43. $\int x^2 \cos x dx.$

1.44. $\int (3x+1) \sin 5x dx.$

1.45. $\int (2x+3) \cos 3x dx.$

1.46. $\int (2x+5)e^{3x} dx.$

1.47. $\int (2x+3) \ln x dx.$

1.48. $\int (4x^3+x^2) \ln x dx.$

1.49. $\int (4x^3+6x-7) \ln x dx.$

1.50. $\int x \ln(3x+2) dx.$

1.51. $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}.$

1.52. $\int x \operatorname{arctg} x dx.$

1.53. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx.$

1.54. Найдите первообразную функции $f(x)$, график которой проходит через заданную точку M . Используйте указанную замену переменной:

а) $f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4}, M\left(\frac{1}{\sqrt{2}}; -1\right), \frac{1}{x^2} - 1 = t^2;$

б) $f(x) = \frac{1}{x^3 \cdot \sqrt[3]{2-x^3}}, M(1; 1), \frac{2}{x^3} - 1 = t^3;$

в) $f(x) = \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{1+x^2}}, M(1; 0), \frac{1}{x^2} + 1 = t^2;$

г) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(4+x^2)^3}}, M(1; 0), \frac{4}{x^2} + 1 = t^{\frac{2}{3}}.$

1.55. Известно, что $\int \frac{\pi^{3/2} \cos x}{x^2 + \pi^2} dx = F(x) + C$ и $g(x) = F(x^2)$. Найдите $g'(\sqrt{\pi})$.

1.56. Известно, что $\int \frac{5^x}{x^2 + 9} dx = F(x) + C$ и $g(x) = F(x^2)$. Найдите $g'(2)$.

1.57. Известно, что $\int \frac{g(x)}{x^2 + 3x + 2} dx = a \cdot G(x, b) + c \cdot G(x, d) + C$, где $G(x, x_0)$ — первообразная функции $\frac{g(x)}{x - x_0}$. Найдите a, b, c, d , если $b > d$.

1.58. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{f(x)}{x^2 + x - 6} dx$, если

$$\int \frac{f(x)}{x - a} dx = F(x; a) + C,$$

где $F(x; a)$ — заданная функция переменных x и a , $C = \text{const}$.

1.59. Найдите неопределенный интеграл $\int \frac{x \cdot f(x)}{x^2 + x - 6} dx$, если

$$\int \frac{f(x)}{x - a} dx = F(x; a) + C,$$

где $F(x; a)$ — заданная функция переменных x и a , $C = \text{const}$.

§ 2. Определенный интеграл

Вычислите определенные интегралы (2.1—2.19).

$$2.1. \int_1^3 x^3 dx.$$

$$2.2. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4} \right) dx.$$

$$2.3. \int_0^1 \sqrt{1+x} dx.$$

$$2.4. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$2.5. \int_1^2 \frac{x dx}{1+x^2}.$$

$$2.6. \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 1}}.$$

$$2.7. \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}.$$

$$2.8. \int_{-2}^1 x^2 \sqrt{1-x^3} dx.$$

$$2.9. \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{5-4x}}.$$

$$2.10. \int_4^5 x \sqrt{x^2 - 16} dx.$$

$$2.11. \int_0^1 x(2-x^2)^5 dx.$$

$$2.12. \int_3^4 \frac{x dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

$$2.13. \int_0^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{2x+1})\sqrt{2x+1}}.$$

$$2.14. \int_1^{\sqrt[7]{2}} \frac{x^6 dx}{1+(x^7-1)^2}.$$

$$2.15. \int_0^1 \frac{x dx}{x^4+1}.$$

$$2.16. \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2+1)^2}.$$

$$2.17. \int_0^1 \frac{x^3+1}{(x^4+4x+2)^2} dx.$$

$$2.18. \int_1^e \frac{1+\ln^3 x}{x} dx.$$

$$2.19. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

2.20. Сделайте рисунок и вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

а) $y=3x-x^2$ и $y=-x$;

б) $y=x^2-2x+2$ и $y=2+4x-x^2$;

в) $y=2x^2-4x+3$ и $y=3+4x$;

г) $y=x^2$ и $y=2x-x^2$.

2.21. Выразите через определенный интеграл и найдите

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(f' \left(\frac{5n+1}{n} \right) + f' \left(\frac{5n+2}{n} \right) + f' \left(\frac{5n+3}{n} \right) + \dots + f' \left(\frac{6n}{n} \right) \right),$$

если функция $f(x)$ имеет непрерывную первую производную и $f(n) = n!$ при $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.22. Выразите через определенный интеграл и найдите предел:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n e^{\sin \frac{k}{n}} \cdot \left(\sin \frac{k}{n} - \sin \frac{k-1}{n} \right)$;

б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 3 \sqrt[3]{\operatorname{tg} \frac{k\pi}{4n}} \cdot \left(\operatorname{tg} \frac{k\pi}{4n} - \operatorname{tg} \frac{(k-1)\pi}{4n} \right)$;

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{2n} \left(\ln \frac{k}{n} \right) \cdot \left(\ln \frac{k}{n} - \ln \frac{k-1}{n} \right)$.

2.23. Функция $f(x)$ непрерывна на указанном отрезке и $F'(x) = f(x)$. Чему равен определенный интеграл:

$$\text{а) } \int_3^7 f(2x+1) dx, [0; 15];$$

$$\text{б) } \int_2^4 f(3x-2) dx, [0; 11];$$

$$\text{в) } \int_1^3 f(4x+2) dx, [-1; 19];$$

$$\text{г) } \int_2^5 f(3x-4) dx, [-1; 19]?$$

2.24. Известно, что $\int_0^{\pi/6} \sin 3x \cdot f(\cos 3x) dx = -1$. Найдите $\int_0^1 f(x) dx$.

2.25. Пусть $\int f(x) dx = F(x) + C$. Найдите

$$\text{а) } \int_0^2 f(\ln(2x+1)) \frac{1}{(2x+1)} dx; \quad \text{б) } \int_{-2}^2 f(x^3)x^2 dx;$$

$$\text{в) } \int_{0,5}^1 f\left(\frac{1}{x^2}\right) \frac{dx}{x^3}; \quad \text{г) } \int_0^{\pi/2} f(1 + \sin 2x) \cos 2x dx.$$

2.26. Найдите множество всех возможных значений $f(180)$, если:

а) $f(0) = 0$ и $1 \leq f'(x) \leq 2$ при всех $x \in [0; 180]$;

б) $f(400) = 500$ и $1 \leq f'(x) \leq 2$ при всех $x \in [180; 400]$;

в) $f(0) = 0$, $f(400) = 500$ и $1 \leq f'(x) \leq 2$ при всех $x \in [0; 400]$.

2.27. Найдите множество всех возможных значений $f(2)$, если $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ и $1 \leq f''(x) \leq 6x^2 + 1$ при всех $x \in [0; 2]$.

2.28. Известно, что $F'(x) = f(x)$ и $G(x)$ — первообразная функции $\cos 2x \cdot f(\sin 2x)$. Найдите $G\left(\frac{\pi}{4}\right)$, если $F(0) = 2$, $F(1) = 3$ и $G(0) = 2$.

2.29. Известно, что $G'(x) = \sin 3x \cdot f(\cos 3x)$ и $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$. Найдите $F(0)$, если $G(0) = 2$, $G\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ и $F(1) = 3$.

2.30. Известно, что $F'(x) = x^3 g'(x)$ и $G'(x) = x^2 g(x)$. Найдите $F(2)$, если $F(0) = 1$, $g(0) = 1$, $G(0) = 1$, $g(2) = 2$, $G(2) = 2$.

2.31. Известно, что $F'(x) = \sin x \cdot g'(x)$ и $G'(x) = \cos x \cdot g(x)$. Найдите $F(\pi)$, если $F(0) = 1$, $G(0) = 1$, $G(\pi) = 3$.

2.32. Функция $f(x)$ непрерывна и монотонна на отрезке $[0; 6]$.

Найдите интервал $(A; B)$ возможных значений $I(f) = \int_0^6 f(x) dx$ при указанных условиях и приведите графический пример функции $f(x)$

такой, чтобы:

$$1) I(f) \approx A; \quad 2) I(f) \approx B; \quad 3) I(f) = \frac{A+B}{2}.$$

а) $f(0) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 4, f(6) = 5$ и f возрастает;

б) $f(0) = 5, f(1) = 4, f(3) = 3, f(4) = 2, f(6) = 0$ и f убывает.

2.33. Найдите экстремумы функции

$$F(x) = \int_a^x \frac{t^4 - 3t^3 + 2t^2}{g^2(t) + 1} dt$$

($g(x)$ — непрерывная функция).

2.34. Известно, что $f(x)$ — непрерывная функция. Кроме того, $f(0) = 2, f(1) = 3, G(x) = \int_a^{2x+1} f(t) dt$ и $G'(x) = g(x)$. Найдите $g(0)$.

2.35. Известно, что $f(x)$ — непрерывная функция. Кроме того, $f(2) = 2, f(4) = 3, G(x) = \int_a^{x^2} f(t) dt$ и $G'(x) = g(x)$. Найдите $g(2)$.

2.36. Известно, что $G'(x) = \cos(x) \cdot g(x)$. Найдите $\int_0^{\pi} \sin x \cdot g'(x) dx$, если $G(0) = 1, G(\pi) = 3$.

2.37. Найдите $\int_1^3 x^2 f(x^3) dx$, если

$$\int_1^3 f(x^3) dx = 3, \quad \int_1^3 f(x) dx = 6 \quad \text{и} \quad \int_3^{27} f(x) dx = 9.$$

2.38. Найдите $\int_0^2 x f(4 - x^2) dx$, если

$$\int_0^2 f(4 - x^2) dx = 2, \quad \int_0^2 f(x) dx = 4 \quad \text{и} \quad \int_0^4 f(x) dx = 6.$$

2.39. Найдите $\int_2^3 e^{-4t^2} dt$, если $\int_0^x e^{-t^2} dt = F(x)$, где $F(x)$ — заданная функция.

2.40. Известно, что $G'(x) = x^2 g(x)$. Найдите $\int_0^2 x^3 g'(x) dx$, если $g(0) = 1, G(0) = 1, g(2) = 2, G(2) = 2$.

2.41. Известно, что $G'(x) = \sin x \cdot g(x)$. Найдите $\int_0^{\pi} \cos x \cdot g'(x) dx$, если $G(0) = 1$, $G(\pi) = 3$.

§ 3. Несобственный интеграл

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость (3.1–3.29).

$$3.1. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

$$3.2. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x}.$$

$$3.3. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$3.4. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}.$$

$$3.5. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$3.6. \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2+4} dx.$$

$$3.7. \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx.$$

$$3.8. \int_0^{+\infty} \frac{3x^2}{x^3+1} dx.$$

$$3.9. \int_e^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

$$3.10. \int_2^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}.$$

$$3.11. \int_1^{+\infty} \frac{x^4 dx}{(x^5+1)^4}.$$

$$3.12. \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx.$$

$$3.13. \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$3.14. \int_{-\infty}^{-2} \frac{dx}{x \sqrt{x^2-1}}.$$

$$3.15. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+6x+11}.$$

$$3.16. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

$$3.17. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}.$$

$$3.18. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

$$3.19. \int_0^1 \frac{dx}{x}.$$

$$3.20. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x}.$$

$$3.21. \int_0^1 \frac{dx}{x^2}.$$

$$3.22. \int_0^1 \frac{dx}{x^p}.$$

$$3.23. \int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

$$3.24. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$3.25. \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}.$$

$$3.26. \int_0^2 \frac{x dx}{(x^2-1)^{4/5}}.$$

$$3.27. \int_0^{0,5} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$3.28. \int_0^1 \frac{2x dx}{\sqrt{1-x^4}}.$$

$$3.29. \int_0^1 x \ln x dx.$$

Исследуйте сходимость несобственных интегралов (3.30—3.37).

$$3.30. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}. \quad 3.31. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}. \quad 3.32. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}}.$$

$$3.33. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x+\sqrt{x}+1}. \quad 3.34. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^4+x^3+1}. \quad 3.35. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}+x+1}.$$

$$3.36. \int_1^{\infty} \frac{\sin x \, dx}{x^2+1}. \quad 3.37. \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx.$$

3.38. Известно, что $\Phi(x) = \int_0^x f(t, 0, 1) \, dt$, где

$$f(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \frac{(x-a)^2}{2\sigma^2},$$

и

$$\Phi(0,5) \approx 0,1915, \quad \Phi(1) \approx 0,3413,$$

$$\Phi(1,5) \approx 0,4332, \quad \Phi(2) \approx 0,4772,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 0,5.$$

Найдите параметры a или σ , если:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^5 f(x, a, 4) \, dx \approx 0,9332; \quad \text{б) } \int_2^{\infty} f(x; a; 6) \, dx \approx 0,9772;$$

$$\text{в) } \int_{-\infty}^2 f(x; 6; \sigma) \, dx \approx 0,1587; \quad \text{г) } \int_2^{\infty} f(x; -2; \sigma) \, dx \approx 0,3085.$$

Ответы к главе 4

§1

- 1.1. $-\frac{1}{5} \cos x^5 + C.$ 1.2. $-\frac{1}{4} \ln|1 - x^4| + C.$
- 1.3. $\frac{1}{5}x^5 + \frac{5}{2}x^5\sqrt{x} - \frac{1}{x} + C.$ 1.4. $2 \operatorname{arctg} x - 3 \arcsin \frac{x}{2} + C.$
- 1.5. $x^5 - \frac{1}{3x^3} + C.$ 1.6. $x^3 + \operatorname{arctg} x + C.$
- 1.7. $x - \operatorname{arctg} x + C.$ 1.8. $x - \frac{1}{x} - 2 \ln|x| + C.$
- 1.9. $-\frac{3}{28}(3 - 7x)^{4/3} + C.$ 1.10. $\frac{4}{9}(1 - 3x)^{3/2} - \frac{2}{3}(1 - 3x)^{1/2} + C.$
- 1.11. $x + \ln|1 + 2x| + C.$ 1.12. $-\frac{3}{2}x + \frac{11}{4} \ln|3 + 2x| + C.$
- 1.13. $\operatorname{arctg}^3 x + C.$ 1.14. $\operatorname{tg}^3 x + C.$
- 1.15. $2\sqrt{\ln x} + C.$ 1.16. $\frac{2}{3}(1 + \ln x)^{3/2} + C.$
- 1.17. $\frac{1}{4}(1 + x^3)^{4/3} + C.$ 1.18. $\frac{5}{18}(x^3 - 8)^{6/5} + C.$
- 1.19. $\frac{1}{2 \cos^2 x} + C.$ 1.20. $e^{\operatorname{tg} x} + C.$
- 1.21. $-\frac{2}{15}(3 + \cos 5x)^{3/2} + C.$ 1.22. $-\frac{1}{9(x^3 + 3x + 1)^3} + C.$
- 1.23. $x - 2\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x} + 1)^2 + C.$ 1.24. $\ln(2x\sqrt{x} + x) + C.$
- 1.25. $\sqrt{x^2 + 1} + C.$ 1.26. $\frac{1}{2} \arcsin x^2 + C.$
- 1.27. $\frac{1}{\sqrt{5}} \arcsin\left(x\sqrt{\frac{5}{7}}\right) + C.$ 1.28. $\frac{1}{4} \ln(2x^2 + 3) + C.$
- 1.29. $\arcsin^2 x - \sqrt{1 - x^2} + C.$ 1.30. $-\frac{1}{2}e^{-(x^2+1)} + C.$
- 1.31. $-\cos \ln x + C.$ 1.32. $\operatorname{arctg}(x + 2) + C.$
- 1.33. $\arcsin \frac{x+1}{2} + C.$ 1.34. $\ln(x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 8}) + C.$
- 1.35. $-\frac{1}{3}x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C.$ 1.36. $2x \sin x - x^2 \cos x + 2 \cos x + C.$
- 1.37. $(x + 1)^2 \sin x + 2(x + 1) \cos x + C.$
- 1.38. $-(x + 2)e^{-x} + C.$ 1.39. $\frac{x+1}{3} \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C.$
- 1.40. $(3x + 1,5) \sin 2x + 1,5 \cos 2x + C.$ 1.41. $(x + 0,5)e^{2x} + C.$
- 1.42. $-(x^2 + 2x + 2)e^{-x} + C.$ 1.43. $x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C.$
- 1.44. $\frac{3}{25} \sin 5x - \frac{1}{5}(3x + 1) \cos 5x + C.$ 1.45. $\frac{1}{3}(2x + 3) \sin 3x + \frac{2}{9} \cos 3x + C.$
- 1.46. $\frac{1}{9}e^{3x}(6x + 13) + C.$ 1.47. $(x^2 + 3x) \ln x - \frac{1}{2}x^2 - 3x.$
- 1.48. $-\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}(3x^4 + x^3) \ln x + C.$

- 1.49. $(x^4 + 3x^2 - 7x) \ln x - \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 7x + C.$
- 1.50. $\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{9}\right) \ln(3x+2) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{3} + C.$ 1.51. $x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C.$
- 1.52. $\frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C.$ 1.53. $-\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$
- 1.54. а) $-\frac{1}{3}t^3 + C = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} - 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3};$ б) $-\frac{1}{4}t^2 + C = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{x^3} - 1\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{5}{4};$
 в) $-t + C = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + \sqrt{2};$ г) $\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{3}} + C = -\frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{4+x^2}} + \frac{1}{4\sqrt{5}}.$
- 1.55. -1. 1.56. 100. 1.57. 1, -1, -1, -2.
- 1.58. $\frac{1}{5}(F(x; 2) - F(x; -3)) + C.$ 1.59. $\frac{1}{5}(2F(x; 2) + 3F(x; -3)) + C.$

§ 2

- 2.1. 20. 2.2. $\frac{21}{8}.$ 2.3. $\frac{2}{3}(\sqrt{8} - 1).$ 2.4. $\frac{\pi}{6}.$
- 2.5. $\frac{1}{2} \ln \frac{5}{2}.$ 2.6. $4 - 2\sqrt{2}.$ 2.7. 2. 2.8. 6.
- 2.9. 1. 2.10. 9. 2.11. $\frac{1}{2} \int_1^2 t^5 dt = \frac{63}{12}.$
- 2.12. $\frac{1}{2} \int_9^{16} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_3^4 dz = 1.$ 2.13. $\int_1^3 \frac{dt}{1+t} = \ln 2.$
- 2.14. $\frac{1}{7} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{28}.$ 2.15. $\frac{\pi}{8}.$
- 2.16. $\frac{1}{4}.$ 2.17. $\frac{5}{56}.$ 2.18. $\frac{5}{4}.$ 2.19. $\frac{\pi}{12}.$
- 2.20. а) $\frac{32}{3};$ б) 9; в) $\frac{64}{3};$ г) $\frac{1}{3}.$
- 2.21. $600 = 6! - 5!.$
- 2.22. а) $e^{\sin 1} - 1 \approx 1,3198;$ б) 0,75; в) $0,2402 \approx \frac{1}{2} \ln^2 2.$
- 2.23. а) $\frac{1}{2}F(15) - \frac{1}{2}F(7);$ б) $\frac{1}{3}F(10) - \frac{1}{3}F(4);$
 в) $\frac{1}{4}F(14) - \frac{1}{4}F(6);$ г) $\frac{1}{3}F(11) - \frac{1}{3}F(2).$
- 2.24. 3.
- 2.25. а) $\frac{1}{2}(F(\ln 5) - F(0));$ б) $\frac{1}{3}(F(8) - F(-8));$
 в) $-\frac{1}{2}(F(1) - F(4));$ г) $\frac{1}{2}(F(2) - F(1)).$
- 2.26. а) [180; 360]; б) [60; 280]; в) [180; 280].
- 2.27. [4; 12] $(1+x \leq f'(x) \leq 1+x+2x^3 \Rightarrow x + \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2}).$
- 2.28. 2,5. 2.29. 6. 2.30. 14. 2.31. -1.

- 2.32. а) $A=15, B=21$; б) $A=12, B=20$.
 2.33. $x_{\max}=1, x_{\min}=2$. 2.34. $6=2 \cdot 3$. 2.35. $12=4 \cdot 3$. 2.36. -2 .
 2.37. $5 = \frac{6+9}{3}$. 2.38. $3 = \frac{-6}{-2}$. 2.39. $\frac{1}{2}(F(6) - F(4))$. 2.40. 13.
 2.41. -2 .

§ 3

- 3.1. 1. 3.2. Расходится. 3.3. Расходится.
 3.4. $\frac{1}{p-1}$ при $p > 1$. Расходится при $p \leq 1$.
 3.5. $\frac{1}{2}$. 3.6. $\frac{\pi}{4}$. 3.7. $\frac{\pi^2}{8}$. 3.8. Расходится. 3.9. $\frac{1}{2}$. 3.10. $\frac{1}{3}$.
 3.11. $\frac{1}{120}$. 3.12. 1. 3.13. 2. 3.14. $-\frac{\pi}{6}$. 3.15. $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. 3.16. π .
 3.17. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 3.18. 2. 3.19. Расходится.
 3.20. Расходится. 3.21. Расходится.
 3.22. $\frac{1}{1-p}$ при $p < 1$, расходится при $p \geq 1$. 3.23. Расходится. 3.24. $\frac{\pi}{2}$.
 3.25. Расходится. 3.26. $2,5(\sqrt[5]{3} + 1)$. 3.27. $\frac{1}{\ln 2}$. 3.28. $\frac{\pi}{2}$. 3.29. $-\frac{1}{4}$.
 3.30. Сходится. 3.31. Сходится. 3.32. Сходится. 3.33. Расходится.
 3.34. Сходится. 3.35. Сходится. 3.36. Сходится. 3.37. Сходится.
 3.38. а) $a = -1$; б) $a = 14$; в) $\sigma = 4$; г) $\sigma = 8$.

Глава 5

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Справочный материал и примеры решения задач

В зависимости от вида правой части простейшие дифференциальные уравнения первого порядка $y' = f(x, y)$, разрешенные относительно производной, в зависимости от вида правой части можно разделить на несколько категорий. Проведем классификацию таких уравнений:

- а) уравнения с разделяющимися переменными $f(x, y) = g(x)h(y)$;
- б) линейные уравнения $f(x, y) = a(x)y + b(x)$;
- в) уравнение Бернулли $f(x, y) = a(x)y + b(x)y^n$, где $n \neq 1$;
- г) однородные уравнения $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Задача 1. Решить уравнение $y' + 3x^2y = 0$.

Сразу можно заметить, что одним из решений уравнения является функция $y = 0$ (так называемое тривиальное решение). Далее будем искать решения, отличные от тривиального. Согласно приведенной классификации данное уравнение может быть отнесено к уравнениям с разделяющимися переменными, где $f(x, y) = -3x^2y$, $g(x) = -3x^2$, $h(y) = y$. Для решения уравнения с разделяющимися переменными необходимо выполнить преобразования, в результате которых одна часть уравнения будет содержать только x , а другая — только y :

$$y' = -3x^2y, \quad \frac{dy}{dx} = -3x^2y, \quad \frac{dy}{y} = -3x^2 dx.$$

Проинтегрируем обе части последнего уравнения

$$\int \frac{dy}{y} = -3 \int x^2 dx, \quad \ln|y| = -x^3 + C_0, \quad y = \pm e^{C_0} e^{-x^3}.$$

Учитывая, что множитель $\pm e^{C_0}$ является постоянной величиной, полученное решение можно записать в более простом виде $y = Ce^{-x^3}$ (постоянная C может быть как положительной, так и отрицательной). В случае если $C = 0$, получим найденное вначале тривиальное

решение $y = 0$. Таким образом, равенство $y = Ce^{-x^3}$ определяет все решения данного дифференциального уравнения.

Задача 2. Решить задачу Коши $y' + 3x^2y = 2xe^{-x^3}$, $y(0) = 9$.

Приведенное уравнение относится к классу линейных уравнений, где

$$f(x, y) = -3x^2y + 2xe^{-x^3}, \quad a(x) = -3x^2, \quad b(x) = 2xe^{-x^3}.$$

Решение линейного уравнения можно выполнить методом вариации произвольной постоянной. Для этого на первом шаге решим вспомогательное уравнение с разделяющимися переменными, положив $b(x) = 0$, то есть уравнение $y' + 3x^2y = 0$. Его решение известно из предыдущего пункта 2: $y = Ce^{-x^3}$. На втором шаге считаем постоянную интегрирования C функцией от x и решение исходного уравнения будем искать в виде $y = C(x)e^{-x^3}$. Теперь решение задачи сводится к нахождению неизвестной функции $C = C(x)$. Подставив функцию $y = C(x)e^{-x^3}$ в исходное уравнение, получим

$$C'e^{-x^3} - 3x^2Ce^{-x^3} + 3x^2C(x)e^{-x^3} = 2xe^{-x^3}, \quad C'e^{-x^3} = 2xe^{-x^3}.$$

В результате получаем уравнение для нахождения неизвестной функции $C(x)$: $C' = 2x$, решение которого имеет вид $C = x^2 + C_1$. Таким образом, общее решение исходного уравнения $y = (x^2 + C_1)e^{-x^3}$.

Использование начального условия $y(0) = 9$ позволяет найти значение неизвестной постоянной C_1 . Подставив в найденное общее решение $x = 0$ и $y = 9$, получим, что $C_1 = 9$. Таким образом, решение задачи Коши имеет вид $y = (x^2 + 9)e^{-x^3}$.

Задача 3. Решить уравнение $xy' - 2y + x^3y^2 = 0$.

Чтобы определить, к какому классу принадлежит данное уравнение, разделим его на x . Получим, что $y' = \frac{2y}{x} - x^2y^2$. Данное уравнение является уравнением Бернулли, где $f(x, y) = \frac{2y}{x} - x^2y^2$, $a(x) = \frac{2}{x}$, $b(x) = -x^2$ и $n = 2$. Очевидно, что $y = 0$ является решением данного уравнения. Далее будем считать, что $y \neq 0$. Чтобы решить уравнение Бернулли, надо обе его части разделить на y^n и сделать замену $z = \frac{1}{y^{n-1}}$:

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{y} - x^2, \quad z = \frac{1}{y}.$$

Учитывая, что $z' = -\frac{y'}{y^2}$, получим линейное уравнение для функции $z = z(x)$: $z' = -\frac{2z}{x} + x^2$. Чтобы найти его решение, сначала решим соответствующее уравнение с разделяющимися переменными $z' = -\frac{2z}{x}$. После разделения переменных и интегрирования получим, что $z = \frac{C}{x^2}$. Считая далее, что $C = C(x)$, получим уравнение для функции $C(x)$ (см. задачу 2)

$$\frac{C'}{x^2} - \frac{2C}{x^3} = -\frac{2C}{x^3} + x^2, \quad \frac{C'}{x^2} = x^2, \quad C' = x^4.$$

Откуда следует, что

$$C(x) = \frac{x^5}{5} + C_1, \quad z = \frac{\frac{x^5}{5} + C_1}{x^2}$$

и окончательно

$$y = \frac{x^2}{\frac{x^5}{5} + C_1} \quad \text{и} \quad y = 0.$$

Задача 4. Решить уравнение $y' = \frac{y^2 - x^2}{xy}$.

Поскольку в данном случае выполнено условие $f(tx, ty) = f(x, y)$, это уравнение относится к однородным уравнениям. Чтобы его решить, сделаем замену $y = t(x)x$. После подстановки в уравнение получим, что

$$t'x + t = \frac{t^2x^2 - x^2}{tx^2}, \quad t'x + t = \frac{t^2 - 1}{t}, \quad t'x = -\frac{1}{t}.$$

Решая последнее уравнение методом разделения переменных, получаем $\frac{t^2}{2} = -\ln|x| + C$. Подставляя $t = \frac{y}{x}$, получим решение в виде неявной функции $\left(\frac{y}{x}\right)^2 = 2C - 2\ln|x|$.

Задача 5. Найти решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами $y'' - 7y' + 10y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -1$ и $y'(0) = -11$.

Чтобы решить уравнение, составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$. Его корнями являются $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = 5$. Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1e^{\lambda_1x} + C_2e^{\lambda_2x} = C_1e^{2x} + C_2e^{5x}.$$

Используя начальные условия для нахождения постоянных C_1 и C_2 , приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = -1, \\ 2C_1 + 5C_2 = -11. \end{cases}$$

Решением системы являются $C_1 = 2$ и $C_2 = -3$. Тогда решением дифференциального уравнения, удовлетворяющим начальным условиям, является функция $y = 2e^{2x} - 3e^{5x}$.

Задача 6. Решить линейное однородное уравнение с постоянными коэффициентами $y'' - 6y' + 34y = 0$.

Чтобы решить данное уравнение, опять составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 34 = 0$. Его корнями являются $\lambda = 3 + 5i$ и $\lambda = 3 - 5i$. Тогда общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = (C_1 \sin(x \operatorname{Im} \lambda) + C_2 \cos(x \operatorname{Im} \lambda))e^{x \operatorname{Re} \lambda} = (C_1 \sin 5x + C_2 \cos 5x)e^{3x}.$$

Задача 7. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 4x + 3y, \\ \dot{y} = x + 6y. \end{cases}$$

Чтобы решить систему линейных уравнений, найдем собственные значения и собственные векторы матрицы коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$. Для этого составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 3 \\ 1 & 6 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 21 = 0.$$

Его корнями являются $\lambda = 3$ и $\lambda = 7$. Для каждого из найденных собственных значений решим однородную систему линейных уравнений $(A - \lambda E)\vec{x} = 0$. Для собственного значения $\lambda = 3$ собственные векторы имеют вид $\vec{u}_1 = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$. А для собственного значения $\lambda = 7$ собственные векторы имеют вид $\vec{u}_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тогда общее решение системы дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{u}_1 e^{3x} + \vec{u}_2 e^{7x} = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7x},$$

или

$$x = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{7x} \quad \text{и} \quad y = -C_1 e^{3x} + C_2 e^{7x}.$$

§1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

1.1. Найдите общие решения дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными:

а) $xy' + y = 0$;

б) $x^2y' + y = 0$;

в) $(x+1)y' + xy = 0$;

г) $(2x+1)y' = 2y$;

д) $yy' + x = 0$;

е) $xyy' = 1 - x^2$;

ж) $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$;

з) $xy \, dy = \sqrt{y^2 + 1} \, dx$;

и) $x^2y^2y' + 1 = y$.

1.2. Решите задачу Коши:

а) $y' = y, y(-2) = 4$;

б) $xy' - 2y = 0, y(2) = 12$;

в) $y' = \frac{y}{x+1}, y(2) = 6$;

г) $(1+x^2)y' + y = 0, y(1) = 1$.

1.3. Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданному условию

а) $\frac{(y+1)'}{x} + e^y = 0, y = 0$ при $x = 1$;

б) $y' = -y^2, y = 0$ при $x = 2$;

в) $y' + y^2e^x = 0, y = 1$ при $x = 0$;

г) $2y'\sqrt{x} = y, y = 1$ при $x = 4$;

д) $x^2y' + y^2 = 0, y = 1$ при $x = -1$.

1.4. Решите однородные дифференциальные уравнения:

а) $xy' = x + 2y$;

б) $(x+y) \, dy + (x-y) \, dx = 0$;

в) $x^2 \, dy + (y^2 - 2xy) \, dx = 0$;

г) $(xy - x^2)y' = y^2$;

д) $(x^2 + y^2)y' = 2xy$.

1.5. Решите линейные дифференциальные уравнения:

а) $y' - \frac{3y}{x} = x$;

б) $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$;

в) $xy' + y = \ln x + 1$;

г) $xy' - 2y = 2x^4$;

д) $x^2y' + xy + 1 = 0$;

е) $(xy + e^x) \, dx - x \, dy = 0$;

ж) $x \ln x \, dy = (2y + \ln x) \, dx$.

1.6. Решите уравнения Бернулли:

а) $y'x + y = -xy^2$;

б) $y' + 2y = y^2e^x$;

в) $y' - xy = -y^3e^{-x^2}$;

г) $x^2y' = y^2 + xy$;

д) $y' + xy = xy^3$.

1.7. Решите задачу Коши:

а) $x^2y' = 2xy - 3, y = 1$ при $x = -1$;

$$\text{б) } y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}, y = 1 \text{ при } x = -1;$$

$$\text{в) } 3y^2 y' + y^3 = x + 1, y = -1 \text{ при } x = 1.$$

Решите системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (1.8–1.13).

$$1.8. \begin{cases} \dot{x} = 2x + y, \\ \dot{y} = 3x + 4y. \end{cases}$$

$$1.9. \begin{cases} \dot{x} = x - y, \\ \dot{y} = -4x + y. \end{cases}$$

$$1.10. \begin{cases} \dot{x} = -x + 8y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

$$1.11. \begin{cases} \dot{x} = x + y, \\ \dot{y} = -2x + 3y. \end{cases}$$

$$1.12. \begin{cases} \dot{x} = x - 3y, \\ \dot{y} = 3x + y. \end{cases}$$

$$1.13. \begin{cases} \dot{x} = -x - 5y, \\ \dot{y} = x + y. \end{cases}$$

$$1.14. \begin{cases} \dot{x} = x - y + z, \\ \dot{y} = x + y - z, \text{ (одно из собственных чисел равно 1).} \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$$

$$1.15. \begin{cases} \dot{x} = x - 2y - z, \\ \dot{y} = -x + y + z, \\ \dot{z} = x - z. \end{cases}$$

$$1.16. \begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z, \\ \dot{y} = x + 2y - z, \text{ (одно из собственных чисел равно 1).} \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$$

$$1.17. \begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z, \\ \dot{y} = x + y + z, \text{ (одно из собственных чисел равно 1).} \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$$

Решите линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами (1.18–1.26).

$$1.18. y'' + y' - 2y = 0.$$

$$1.19. y'' + 4y' + 3y = 0.$$

$$1.20. y'' - 2y' = 0.$$

$$1.21. 2y'' - 5y' + 2y = 0.$$

$$1.22. y'' - 4y' + 5y = 0.$$

$$1.23. y'' + 2y' + 10y = 0.$$

$$1.24. y'' + 4y = 0.$$

$$1.25. y''' - 8y = 0.$$

$$1.26. y^{(4)} - y = 0.$$

Найдите решения уравнений, удовлетворяющие указанным условиям (1.27–1.30).

1.27. $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$.

1.28. $y'' + 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.

1.29. $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

1.30. $y'' + 2y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

1.31. Найдите общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

а) $3y^2y' = g'(x)$; б) $3y^2y' = 2xg'(x^2)$; в) $y' = \frac{g'(x)}{(\arccos y)'}$.

1.32. Решите задачу Коши:

а) $3y^2y' = g'(x)$, $y(7) = 2$, если $g(7) = 3$;

б) $3y^2y' = 2xg'(x^2)$, $y(2) = -2$, если $g(2) = -2$, $g(4) = 1$;

в) $y' = \frac{g'(x)}{(\arccos y)'}$, $y(3) = 0$, если $g(3) = -2$.

1.33. Найдите общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{g\left(\frac{y}{x}\right)}{g'\left(\frac{y}{x}\right)},$$

если

а) $g(z) = \arcsin z$;

б) $g(z) = \operatorname{arctg} z$.

1.34. Проверьте, что общее решение $y(x)$ линейного дифференциального уравнения $y' + p(x)y = q(x)$ имеет вид $y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x)$, где $y_0(x)$ — частное решение исходного уравнения, а $\tilde{y}(x)$ — общее решение уравнения $y' + p(x)y = 0$.

1.35. Используя результат предыдущей задачи, найдите общее решение $y(x)$ линейного дифференциального уравнения:

а) $y' + 3y = (4^{\sin x})' + 3 \cdot 4^{\sin x}$;

б) $y' - \frac{g'(x)}{g(x)}y = (\cos x^3)' - \frac{g'(x)}{g(x)} \cos x^3$.

1.36. При каких значениях k_1 и k_2 функция $C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}$ является общим решением уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$?

1.37. Найдите общее решение $y(x)$ линейного дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 3y' + 2y = (e^{x^2})'' - 3(e^{x^2})' + 2e^{x^2}$.

1.38. Найдите решение задачи Коши: $y'' - 4y = (x^2g(x))'' - 4x^2g(x)$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$, если $g(x) \in C^2(\mathbb{R})$.

Ответы к главе 5

§1

- 1.1. а) $y = \frac{C}{x}$; б) $y = Ce^{\frac{1}{x}}$; в) $y = C(x+1)e^{-x}$; г) $y = C(2x+1)$;
 д) $x^2 + y^2 = C$; е) $x^2 + y^2 = \ln(Cx^2)$; ж) $y = 2 + C \cos x$;
 з) $x = 0, \ln|x| = C + \sqrt{y^2 + 1}$; и) $y = 1, \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + C$.
- 1.2. а) $y = 4e^{x+2}$; б) $y = 3x^2$; в) $y = 2(x+1)$; г) $y = e^{\frac{\pi}{4} - \arctg x}$.
- 1.3. а) $2(y+2)e^{-y} = x^2 + 3$; б) $y = 0$; в) $y = e^{-x}$;
 г) $y = e^{\sqrt{x-2}}$; д) $y = -x$.
- 1.4. а) $x + y = Cx^2$; б) $\ln(x^2 + y^2) = C - 2 \arctg \frac{y}{x}$; в) $x(y-x) = Cy, y = 0$;
 г) $y = Ce^{y/x}$; д) $y^2 - x^2 = Cy, y = 0$.
- 1.5. а) $y = Cx^3 - x^2$; б) $y = \frac{C - e^{-x^2}}{2x^2}$; в) $y = \ln x + \frac{C}{x}$; г) $y = Cx^2 + x^4$;
 д) $xy = C - \ln|x|$; е) $y = e^x(\ln|x| + C)$; ж) $y = C \ln^2 x - \ln x$.
- 1.6. а) $y = \frac{1}{x \ln Cx}$; б) $y(e^x + Ce^{2x}) = 1, y = 0$; в) $y^2 = \frac{e^{x^2}}{2x + C}$;
 г) $y = \frac{x}{C - \ln x}$; д) $y^2 = \frac{1}{1 + Ce^{x^2}}$.
- 1.7. а) $y = 2x^2 + \frac{1}{x}$; б) $y = \frac{2x}{1 - 3x^2}$; в) $y^3 = x - 2e^{1-x}$.
- 1.8. $x = C_1 e^t + C_2 e^{5t}, y = -C_1 e^t + 3C_2 e^{5t}$.
- 1.9. $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}, y = 2C_1 e^t - 2C_2 e^{3t}$.
- 1.10. $x = 2C_1 e^{3t} - 4C_2 e^{-3t}, y = C_1 e^t + C_2 e^{5t}$.
- 1.11.
$$\begin{cases} x = e^{2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t), \\ y = e^{2t}((C_1 + C_2) \cos t + (C_2 - C_1) \sin t). \end{cases}$$
- 1.12.
$$\begin{cases} x = e^t(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t), \\ y = e^t(C_1 \sin 3t - C_2 \cos 3t). \end{cases}$$
- 1.13.
$$\begin{cases} x = (2C_2 - C_1) \cos 2t - (2C_1 + C_2) \sin 2t, \\ y = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t. \end{cases}$$
- 1.14.
$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \\ y = C_1 e^t - 3C_3 e^{-t}, \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} - 5C_3 e^{-t}. \end{cases}$$
- 1.15.
$$\begin{cases} x = C_1 + 3C_2 e^{2t}, \\ y = -2C_2 e^{2t} + C_3 e^{-t}, \\ z = C_1 + C_2 e^{2t} - 2C_3 e^{-t}. \end{cases}$$
- 1.16.
$$\begin{cases} x = C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}, \\ y = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \\ z = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{3t}. \end{cases}$$
- 1.17.
$$\begin{cases} x = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}, \\ y = C_1 e^t - 2C_2 e^{2t} + C_3 e^{5t}, \\ z = -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t} + 3C_3 e^{5t}. \end{cases}$$

- 1.18. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. 1.19. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$. 1.20. $y = C_1 + C_2 e^{2x}$.
1.21. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\frac{x}{2}}$. 1.22. $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.
1.23. $y = e^{-x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. 1.24. $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.
1.25. $y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos x \sqrt{3} + C_3 \sin x \sqrt{3})$.
1.26. $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$.
1.27. $y = 4e^x + e^{4x}$. 1.28. $y = e^{-x}$. 1.29. $y = \sin 2x$. 1.30. $y = 1$.
1.31. а) $y = \sqrt[3]{g(x) + C}$; б) $y = \sqrt[3]{g(x^2) + C}$; в) $y = \cos(g(x) + C)$.
1.32. а) $y = \sqrt[3]{g(x) + 5}$; б) $y = \sqrt[3]{g(x^2) - 9}$;
в) $y = \cos\left(g(x) + 2 + \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.
1.33. а) $y = x \sin Cx$; б) $y = x \operatorname{tg} Cx$.
1.35. а) $y = 4^{\sin x} + Ce^{-3x}$; б) $y = \cos x^3 + Cg(x)$. 1.36. $\{k_1, k_2\} = \{1, 2\}$.
1.37. $y = e^{x^2} + C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. 1.38. $y = x^2 g(x) + 2,5e^{2x} + 0,5e^{-2x}$.

III. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 6

Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Справочный материал и примеры решения задач

1. Вычисление частных производных.

Частная производная функции нескольких переменных

$$w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

по переменной x_k вычисляется по обычным правилам дифференцирования с той лишь особенностью, что все остальные переменные рассматриваются как постоянные.

В качестве примера вычислим частные производные функции

$$w = f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

При вычислении $\frac{\partial w}{\partial x}$, считая y постоянной, получим

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

При вычислении $\frac{\partial w}{\partial y}$, считая x постоянной, получим

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Задача 1. Найти приближенное значение $\sqrt{4,05^2 + 3,07^2}$.

Решение. Искомое число будем рассматривать как значение функции $w = \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке (x, y) , где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$,

$x_0 = 4$, $y_0 = 3$ и $\Delta x = 0,05$, $\Delta y = 0,07$. Воспользуемся следующей формулой:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) = \\ = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Получим

$$df(x, y) = \frac{x\Delta x + y\Delta y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ df(x_0, y_0) = \frac{4\Delta x + 3\Delta y}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{4}{5} \cdot 0,05 + \frac{3}{5} \cdot 0,07 \approx 0,08,$$

тогда $\sqrt{4,05^2 + 3,07^2} \approx \sqrt{4^2 + 3^2} + 0,08 = 5,08$.

§ 1. Область определения, линии уровня функции нескольких переменных

Изобразите область определения функции (1.1–1.10).

1.1. $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 9}}$.

1.2. $z = \arcsin(x + y)$.

1.3. $z = \sqrt{xy} + \arcsin \frac{x}{2}$.

1.4. $z = \ln(4 - x^2 - y^2)$.

1.5. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

1.6. $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2)}$.

1.7. $z = \arcsin \frac{y}{x^2}$.

1.8. $z = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - x}{2x - x^2 - y^2}}$.

1.9. $u = \frac{x + y + z}{\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}}$.

1.10. $u = \sqrt{x + y + z}$.

Постройте линии уровня функции (1.11–1.20).

1.11. $z = \frac{y}{x}$.

1.12. $z = x^2 - y^2$.

1.13. $z = x^2 + y^2$.

1.14. $z = \frac{1}{x^2 + 2y^2}$.

1.15. $z = \sqrt{xy}$.

1.16. $z = \frac{y - x^2}{x^2}$.

1.17. $z = x^2y + y$.

1.18. $z = e^{\frac{2x}{x^2 + y^2}}$.

1.19. $z = \min(x^2, y)$.

1.20. $z = \max(x + y, 2x - 3y)$.

§ 2. Частные производные. Производная сложной функции. Градиент. Производная по направлению

Найдите частные производные первого порядка (2.1–2.26).

$$2.1. z = x^3 + 2y^3 - 7x^2y^4.$$

$$2.2. z = \frac{x^2y}{x+y}.$$

$$2.3. z = \frac{x^2}{y} + \frac{y}{x^2}.$$

$$2.4. z = \sqrt{2xy + y^2}.$$

$$2.5. z = x\sqrt[3]{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}.$$

$$2.6. z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

$$2.7. z = \sqrt{x}e^{y/x}.$$

$$2.8. z = xe^{-xy}.$$

$$2.9. z = \arctg \frac{y}{x}.$$

$$2.10. z = xy e^{x+2y}.$$

$$2.11. z = e^{3x^2+2y^2-xy}.$$

$$2.12. z = x^2e^{x^2-2xy+1}.$$

$$2.13. z = x^3 \log_2(x^2 - 2xy + 3).$$

$$2.14. z = y^2 \cos(2y^2 - 4xy + 2).$$

$$2.15. z = xye^{3x^2-6xy+3}.$$

$$2.16. z = y^2 \log_5(y^3 - 3xy + 7).$$

$$2.17. z = 2x^2y \cos(2x^3 - 6xy + 4).$$

$$2.18. u = yx^3 + xz^2 + y^2z.$$

$$2.19. u = \frac{x}{\sqrt{x+y^2+z^3}}.$$

$$2.20. u = \left(\frac{x}{y}\right)^z.$$

$$2.21. u = x^{y/z}.$$

$$2.22. u = x^2y - \sqrt{xy + z^2}.$$

$$2.23. u = \sin(x+2y) + 2\sqrt{xyz}.$$

$$2.24. u = \ln(3-x^2) + xy^2z.$$

$$2.25. u = x^2 - \arctg(y+z^3).$$

$$2.26. u = x^3y^2z + 3x - 5y + z + 2.$$

2.27. Проверьте, что функция z удовлетворяет данному уравне-

нию:

$$a) \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}, z = y \ln(x^2 - y^2);$$

$$б) x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{2}, z = \sqrt{x} \sin \frac{y}{x};$$

$$в) x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}, z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y});$$

$$г) x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0, z = \frac{y^2}{3x} + xy;$$

$$д) x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = xy + z, z = xy + xe^{y/x}.$$

2.28. Проверьте, что функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ удовлетворяет уравнению $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1$.

2.29. Найдите u'_x и u'_y , если $u = f(t)$ и $t = \frac{y}{x}$.

2.30. Найдите u'_x и u'_y , если $u = f(t)$ и $t = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2.31. Найдите u'_x , u'_y и u'_z , если $u = f(t)$ и $t = xy^2z^3$.

2.32. Найдите u'_x , u'_y и u'_z , если $u = f(t)$ и $t = xy + \frac{z^2}{x}$.

2.33. Найдите $\frac{dz}{dt}$, если

а) $z = x^2y^3$, $x = t^3 + 2$ и $y = 3t^4 - 1$;

б) $z = x \sin \frac{x}{y}$, $x = 1 + 3t$ и $y = \sqrt{1 + t^2}$;

в) $z = e^{3x+2y}$, $x = \cos t$ и $y = t^2$;

г) $z = \frac{y^2 - 1}{x}$, $x = 1 - e^{2t}$ и $y = e^t$;

д) $z = e^{xy} \ln(x + y)$, $x = 2t^2$ и $y = 1 - 2t^2$;

е) $z = \ln(x + \ln y)$, $x = e^{2t^2}$ и $y = \ln t$.

2.34. Найдите $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{dz}{dt}$, если

а) $z = e^{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{t}}}$ и $x = \sin t$, $y = \operatorname{tg} t$;

б) $z = \ln(x + \sqrt{t^2 + y^2})$ и $x = t^2 + 1$, $y = e^t$;

в) $z = x^2 e^{\frac{y}{t}}$ и $x = \ln(t^2 + 1)$, $y = t^3$;

г) $z = \operatorname{arctg} \frac{xt}{y}$ и $x = \operatorname{tg} t$, $y = e^{t^2+1}$;

д) $z = e^{xy}$ и $y = \varphi(x)$;

е) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ и $y = x^2$;

ж) $z = \ln(x^3y^2)$ и $y = e^{x^2+3}$.

2.35. Найдите производные z'_u и z'_v функции $z = z(x, y)$, где $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$:

а) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $x = u^2v$, $y = \frac{u}{v^3}$;

б) $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$, $x = u \sin v$, $y = u \cos v$;

в) $z = x^3 + y^3$, $x = \ln \sqrt{u^2 + v^2}$, $y = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$;

г) $z = \sqrt{xy}$, $x = \ln u$, $y = \ln v$;

д) $z = \ln \frac{x}{y}$, $x = \sin \frac{u}{v}$, $y = \sqrt{\frac{u}{v}}$.

2.36. Дана функция $y(x) = (1 + x^2)^{e^{-x} - e + 1}$. Записав $y = u^v$, где $u = 1 + x^2$, $v = e^{-x} - e + 1$, найдите $y'(x)$ как производную сложной функции. В ответе укажите $y'(-1)$.

2.37. Найдите в указанной точке производную функции $y = y(x)$, заданной неявно:

а) $x^5 + 2xy^2 - y^3 - 1 = 0$, (1; 2);

б) $e^{x^4 - y^2} - y^2 + 15 = 0$, (2; 4);

в) $(1 + 2x)e^{y/x} - x = 0$, (-1; 0).

Найдите в указанной точке первые частные производные функции $z = z(x, y)$, заданной неявно (2.38–2.42).

2.38. $z^3 + 3xyz + 1 = 0$, (0; 1).

2.39. $e^z - xyz - 2 = 0$, (1; 0).

2.40. $x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0$, $(1; 1; \frac{1}{3})$.

2.41. $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz + 2y - 3 = 0$, (1; 1; -2).

2.42. $z - x = y \operatorname{ctg}(z - x)$, $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$.

2.43. Найдите производную функции z по направлению \vec{l} в точке M :

а) $z = x^3y - 5xy^2 + 8$, $\vec{l} = (1; 1)$, $M(1; 1)$;

б) $z = \ln \frac{x^2 + y^2}{xy}$, $\vec{l} = (6; 8)$, $M(1; 2)$;

в) $z = x^2 + xy + 2x + 2y$, $\vec{l} = (3; 4)$, $M(1; 1)$.

2.44. Найдите производную функции u в точке A по направлению \vec{AB} , где

а) $u = xy - \frac{x}{z}$, $A(-4; 3; -1)$, $B(1; 4; -2)$;

б) $u = x + \ln(y^2 + z^2)$, $A(2; 1; 1)$, $B(0; 2; 0)$;

в) $u = x^2y - \ln(xy + z^2)$, $A(1; 5; -2)$, $B(1; 7; -4)$.

2.45. Найдите производную функции $z = 3x^4 + y^3 + xy$ в точке $M(1; 2)$ по направлению луча, образующего с осью Ox угол 135° .

2.46. Найдите производную функции $u = x^2 - 3yz + 4$ по направлению луча, образующего одинаковые углы со всеми координатными осями, в точке $M(1; 2; -1)$.

2.47. Найдите производную функции z по направлению \vec{l} в точке M , если

а) $z = f(x^2 + xy + 2x + 2y - 1)$, $f'(5) = -2\sqrt{13}$, $\vec{l} = (3; 2)$, $M(1; 1)$;

б) $z = f(y^2 - xy + 3x - 2y - 2)$, $f'(1) = 2\sqrt{5}$, $\vec{l} = (2; -4)$, $M(2; 3)$.

2.48. Найдите единичный вектор \vec{l} , по направлению которого производная заданной функции в точке M достигает наибольшего значения:

а) $z = x^2 - xy + y^2$, $M(-1; 2)$;

$$\text{б) } z = x - 3y + \sqrt{3xy}, M(3; 1);$$

$$\text{в) } u = xz^y, M(-3; 2; 1).$$

2.49. Дана функция z , точка A и вектор \vec{l} . При каком значении параметра a производная функции в точке A по направлению \vec{l} будет максимальна?

$$\text{а) } z = 3x^2y + x + y^3, A(1; 2), \vec{l} = a\vec{i} + 30\vec{j};$$

$$\text{б) } z = 2xy^3 - x^2 + 2y, A(-1; -2), \vec{l} = a\vec{i} + 11\vec{j}.$$

2.50. Найдите приближенно производную функции $f(P)$ в точке A по направлению вектора \overrightarrow{AB} , если $f(A) = 5$, $f(B) = 5,06$ и длина AB равна $0,03$.

2.51. Найдите приближенно значение $f(B)$, если $f(A) = 6$, длина отрезка AB равна $0,02$, $\text{grad } f(A) = (6; -8)$, а косинус угла между вектором $\text{grad } f(A)$ и вектором \overrightarrow{AB} равен $\frac{2}{5}$.

2.52. Найдите приближенно значение $f(B)$, если $f(A) = -8$, длина отрезка AB равна $0,06$, $\text{grad } f(A) = (12; 5)$, а косинус угла между вектором $\text{grad } f(A)$ и вектором \overrightarrow{AB} равен $-\frac{1}{3}$.

§ 3. Первый и второй дифференциал.

Касательная плоскость

3.1. Найдите приращение Δf и дифференциал df функции в точке $(1; 1)$, если $f(x, y) = x^2y$.

3.2. Найдите приращение Δf и дифференциал df функции в точке $(1; 1)$, если $f(x, y) = x^2 + xy - y^2$.

3.3. Найдите первый дифференциал функции f в данной точке:

$$\text{а) } f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, (1; 1);$$

$$\text{б) } f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}, (2; 1);$$

$$\text{в) } f(x, y, z) = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, (1; 0; 1);$$

$$\text{г) } f(x, y, z) = \text{arctg } \frac{xy}{z^2}, (3; 2; 1);$$

$$\text{д) } f(x, y, z) = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^z, (1; 1; 1).$$

3.4. Найдите первый дифференциал функции f :

$$\text{а) } f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}; \quad \text{б) } f(x, y) = \ln(3x + 2y);$$

$$\text{в) } f(x, y) = (y^3 + 2x^2y + 3)^4; \quad \text{г) } f(x, y) = x + y^2 + \ln(x + y^2);$$

$$\text{д)} f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2}; \quad \text{е)} f(x, y, z) = \operatorname{tg}^2 \frac{xy}{z};$$

$$\text{ж)} f(x, y, z) = e^{x^2 y z^3}.$$

3.5. Найдите все частные производные второго порядка:

$$\text{а)} f(x, y) = xy(x^3 + y^3 - 3); \quad \text{б)} f(x, y) = y^2(1 - e^x);$$

$$\text{в)} f(x, y) = \ln(x^2 + y); \quad \text{г)} f(x, y, z) = x(1 + y^2 z^3);$$

$$\text{д)} f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2); \quad \text{е)} f(x, y, z) = \sin \frac{xy}{z}.$$

3.6. Покажите, что если $u = xz + e^{yz} + y$, то $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

3.7. Покажите, что если $u = xz + e^{yz} + y$, то $\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y \partial z} = \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial z \partial y \partial x}$.

3.8. Найдите все частные производные третьего порядка:

$$\text{а)} z = x^4 + 5y^3 + 3x - y; \quad \text{б)} z = xe^y + ye^x;$$

$$\text{в)} z = \sin(3x - 2y); \quad \text{г)} z = x^2 y^3.$$

3.9. Найдите вторые дифференциалы:

$$\text{а)} z = e^{3x-2y}; \quad \text{б)} z = y \ln x;$$

$$\text{в)} z = x \ln \frac{x}{y}; \quad \text{г)} z = e^{x+y^2};$$

$$\text{д)} u = xy + yz + xz;$$

$$\text{е)} u = x^4 + 2y^3 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz.$$

3.10. Найдите точки, в которых градиент функции равен 0, если

$$\text{а)} z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y;$$

$$\text{б)} z = x^3 + y^3 - 3xy;$$

$$\text{в)} u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x.$$

3.11. Найдите точки, в которых первый дифференциал функции f равен нулю:

$$\text{а)} f(x, y, z) = 2y^2 + z^2 - xy^2 - yz + 4x + 1;$$

$$\text{б)} f(x, y) = (5 - 2x + y)e^{x^2 - y};$$

$$\text{в)} f(x, y) = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2 + xy + y^2)}.$$

3.12. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P) = f(x, y)$. Известно, что $f(A) = 2$, $f(B) = 2,03$, $f(C) = 1,92$, где $A(2; 6)$, $B(2; 6,01)$, $C(2,02; 6)$. Найдите приближенно частные производные в точке A и значение производной по направлению вектора $\vec{l} = (3; 4)$.

3.13. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P) = f(x, y)$. Известно, что $f(A) = 5$, $f(B) = 5,03$, $f(C) = 5,08$, где $A(3; 7)$, $B(3; 7,01)$, $C(3,02; 7)$. Найдите приближенно частные производные в точке A и значение производной по направлению вектора $\vec{l} = (3; 4)$.

3.14. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P) = f(x, y)$. Известно, что $f(A) = 3$, $f(B) = 2,97$, $f(C) = 3,08$, при этом $A(3; 6)$, $B(3; 6,01)$, $C(3,02; 6)$. Найдите приближенно частные производные в точке A и значение производной по направлению вектора $\vec{l} = (3; 4)$.

3.15. Напишите уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности в точке M :

а) $z = \frac{x^2}{2} - y^2$, $M(2; -1; 1)$;

б) $z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$, $M(1; 1; 1)$;

в) $z = \ln(x^2 + y^2)$, $M(1; 0; 0)$;

г) $x(y + z)(z - xy) = 8$, $M(2; 1; 3)$;

д) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, $M(3; 2; 2)$;

е) $(z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5$, $M(1; 1; 2)$;

ж) $e^z - z + xy = 3$, $M(2; 1; 0)$.

3.16. Напишите уравнение плоскости, параллельной плоскости α и касательной к заданной поверхности:

а) $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 21$, $\alpha: 6x - 4y - z = 0$;

б) $xy + z^2 + xz = 1$, $\alpha: x + 2z - y = 0$.

3.17. Напишите уравнение плоскости, которая касается сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x$$

и перпендикулярна плоскостям $x - y - z = 2$ и $x - y - \frac{1}{2}z = 2$.

3.18. Дана дифференцируемая функция двух переменных $f(P) = f(x, y)$, у которой известны значения $f(A) = -7$, $f(B) = -7,02$, $f(C) = -7,04$ в точках $A(6; 4)$, $B(6,01; 4)$, $C(6; 3,98)$. Найдите приближенно:

а) частные производные и первый дифференциал в точке A ;

б) значение функции в точке $D(5,95; 4,02)$;

в) касательную плоскость к поверхности $z = f(P)$ в точке A ;

г) нормаль к поверхности $z = f(P)$ в точке A ;

д) градиент в точке A ;

е) производную в точке A по направлению, составляющему угол $\frac{\pi}{6}$ с градиентом;

ж) производную в точке A по направлению вектора \vec{AD} ;

з) линию уровня, проходящую через точку A , в окрестности этой точки (при дополнительном предположении, что в этой окрестности функция $f(P)$ имеет непрерывные частные производные).

3.19. Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема. Докажите, что $f(1 + 2t; 2 + 3t) - f(1; 2) = k \cdot t + o(t)$ при $t \rightarrow 0$, и найдите k .

3.20. Пусть функция $f(x; y; z)$ дифференцируема. Докажите, что $f(4 + 2t; 5t; -2 + t) - f(4; 0; -2) = k \cdot t + o(t)$ при $t \rightarrow 0$, и найдите k .

3.21. Используя определение дифференциала, найдите частные производные $f'_x(0; 2)$ и $f'_y(0; 2)$, если $f(2t; 2 - 3t) - f(0; 2) = -8t + o(t)$ и $f(3t; 2 + 2t) - f(0; 2) = t + o(t)$.

3.22. Пусть функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные 2-го порядка в точке $A(0; 1)$, и $f'_x(A) = f'_y(A) = 0$. Докажите, что $f(2t; 1 + 3t) - f(0; 1) = k \cdot t^2 + o(t^2)$ при $t \rightarrow 0$, и найдите k .

3.23. Функция $f(x, y)$ имеет отрицательные непрерывные частные производные 2-го порядка в точке $A(0; 1)$, и $f'_x(A) = f'_y(A) = 0$. Докажите, что функция $g(t) = f(2t; 1 + 3t) - f(0; 1)$ имеет локальный максимум при $t = 0$.

3.24. Известно, что $f(1 + 2t; 2 + 3t) - f(1; 2) = 13t + o(t)$ при $t \rightarrow 0$. Найдите производную функции $f(x, y)$ в точке $A(1; 2)$ по направлению вектора $\vec{l} = (2; 3)$.

3.25. Известно, что $f(5; 6) - f(5 + 3t; 6 - 4t) \sim 10t$ при $t \rightarrow 0$. Найдите производную функции $f(x, y)$ в точке $A(5; 6)$ по направлению вектора $\vec{l} = (3; -4)$.

3.26. Известно, что $f(5 - 3t; 6 + 4t) - f(5; 6) = 15t + o(t)$ при $t \rightarrow 0$. Найдите производную функции $f(x, y)$ в точке $A(5; 6)$ по направлению вектора $\vec{l} = (3; -4)$.

§ 4. Приближенные вычисления. Формула Тейлора

4.1. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенное значение $\exp(2,05^3 + 0,9^4 - 9)$, исходя из значения функции $z = \exp(x^3 + y^4 - 9)$ при $x = 2, y = 1$.

4.2. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенное значение $\sqrt{3,61 - 0,05^2}$, исходя из значения функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ при $x = 2, y = 0$.

4.3. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно

$$\text{а) } 1,02^3 \cdot 0,97^2; \quad \text{б) } \sqrt{4,05^2 + 2,93^2}; \quad \text{в) } \frac{1,98^3}{2,01^2};$$

$$\text{г) } \frac{1,03^2}{\sqrt[3]{0,98} \sqrt[4]{1,05^3}}; \quad \text{д) } \sqrt{1,02^3 + 1,97^3}; \quad \text{е) } 0,97^{1,05}.$$

4.4. На сколько изменится диагональ и площадь прямоугольника со сторонами $x = 6$ м и $y = 8$ м, если первая сторона увеличится на 2 мм, а вторая сторона уменьшится на 5 мм?

4.5. При заданной производственной функции Кобба — Дугласа $Q = AK^{0,9}L^{0,5}$ ($A = \text{const}$) установите, как изменится объем выпуска продукции Q (в процентах) при увеличении затрат капитала K и уменьшении трудовых ресурсов L соответственно на 5% и 7%.

4.6. На сколько процентов приближенно изменится спрос, описываемый функцией $z = 5474e^{-\sqrt{n+p^2}}$, где n — число производителей товара, а p — цена товара, если число производителей товара уменьшится на 1%, а цена возрастет на 1%? На рынке товара имеется 7 производителей, цена товара составляет 3 ед.

4.7. Разложите функцию $f(x, y)$ по формуле Тейлора в окрестности точки M .

$$\text{а) } f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5, \quad M(1; -2);$$

$$\text{б) } f(x, y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4, \quad M(-2; 1);$$

$$\text{в) } f(x, y, z) = x^2 + 3z^2 - 2yz - 3z, \quad M(0; 1; 2).$$

4.8. Разложите функцию $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ по формуле Тейлора в окрестности точки $(1; 1; 1)$ с точностью до членов второго порядка малости.

4.9. Разложите функцию f по формуле Тейлора в окрестности точки M до $o(\rho^2)$.

$$\text{а) } f(x, y) = \sin x \ln y, \quad M(0; 2), \quad \rho = \sqrt{x^2 + (y - 2)^2};$$

$$\text{б) } f(x, y, z) = \ln(xy + z^2), \quad M(0; 0; 1), \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}.$$

4.10. Разложите функцию f по формуле Тейлора в окрестности точки M с точностью до членов второго порядка малости.

$$\text{а) } f(x, y) = x^y, \quad M(1; 1);$$

$$\text{б) } f(x, y) = \text{arctg} \frac{1+x}{1+y}, \quad M(0; 0);$$

$$\text{в) } f(x, y) = \ln\left(\pi - 4 \text{arctg} x + \frac{x^2}{y}\right), \quad M(1; 1).$$

Ответы к главе 6

§ 2

- 2.1. $z'_x = 3x^2 - 14xy^4$, $z'_y = 6y^2 - 28x^2y^3$.
- 2.2. $z'_x = \frac{x^2y + 2xy}{(x+y)^2}$, $z'_y = \frac{x^3}{(x+y)^2}$. 2.3. $z'_x = \frac{2x}{y} - \frac{2y}{x^3}$, $z'_y = \frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{y^2}$.
- 2.4. $z'_x = y(2xy + y^2)^{-1/2}$, $z'_y = (x+y)(2xy + y^2)^{-1/2}$.
- 2.5. $z'_x = \sqrt[3]{y} - 0,5yx^{-3/2}$, $z'_y = \frac{1}{3}xy^{-4/3} + x^{-1/2}$.
- 2.6. $z'_x = y^2(x^2 + y^2)^{-3/2}$, $z'_y = -xy(x^2 + y^2)^{-3/2}$.
- 2.7. $z'_x = 0,5e^{x/y} \frac{x^{3/2} - 2y\sqrt{x}}{x^2}$, $z'_y = x^{-1/2}e^{y/x}$.
- 2.8. $z'_x = e^{-xy}(1 - xy)$, $z'_y = -x^2e^{-xy}$. 2.9. $z'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $z'_y = \frac{x}{x^2 + y^2}$.
- 2.10. $z'_x = e^{x+2y}(y + xy)$, $z'_y = e^{x+2y}(x + 2xy)$.
- 2.11. $z'_x = (6x - y)e^{3x^2+2y^2-xy}$, $z'_y = (4y - x)e^{3x^2+2y^2-xy}$.
- 2.12. $z'_x = (2x^3 - 2x^2y + 2x)e^{x^2-2xy+1}$, $z'_y = -2x^3e^{x^2-2xy+1}$.
- 2.13. $z'_x = 3x^2 \log_2(x^2 - 2xy + 3) + \frac{2x^4 - 2x^3y}{x^2 - 2xy + 3} \frac{1}{\ln 2}$, $z'_y = -\frac{2x^4}{x^2 - 2xy + 3} \frac{1}{\ln 2}$.
- 2.14. $z'_x = 4y^3 \sin(2y^2 - 4xy + 2)$,
 $z'_y = 2y \cos(2y^2 - 4xy + 2) - (2y^3 - 4xy^2) \sin(2y^2 - 4xy + 2)$.
- 2.15. $z'_x = (6x^2y - 6xy^2 + y)e^{3x^2-6xy+3}$, $z'_y = (x - 6x^2y)e^{3x^2-6xy+3}$.
- 2.16. $z'_x = -\frac{3y^3}{y^3 - 3xy + 7} \frac{1}{\ln 5}$, $z'_y = 2y \log_5(y^3 - 3xy + 7) + \frac{3y^4 - 3xy^2}{y^3 - 3xy + 7} \frac{1}{\ln 5}$.
- 2.17. $z'_x = 4xy \cdot \cos(2x^3 - 6xy + 4) - 2x^2y(6x^2 - 6y) \sin(2x^3 - 6xy + 4)$,
 $z'_y = 2x^2 \cos(2x^3 - 6xy + 4) + 12x^3y \sin(2x^3 - 6xy + 4)$.
- 2.18. $u'_x = 3x^2y + z^2$, $u'_y = x^3 + 2yz$, $u'_z = 2xz + y^2$.
- 2.19. $u'_x = (0,5x + y^2 + z^3)(x + y^2 + z^3)^{-3/2}$, $u'_y = -xy(x + y^2 + z^3)^{-3/2}$,
 $u'_z = -\frac{3}{2}xz^2(x + y^2 + z^3)^{-3/2}$.
- 2.20. $u'_x = zx^{z-1}y^{-z}$, $u'_y = -zx^zy^{-z-1}$, $u'_z = (x/y)^z \ln(x/y)$.
- 2.21. $u'_x = (y/z)x^{y/z-1}$, $u'_y = z^{-1}x^{y/z} \ln x$, $u'_z = -yz^{-2}x^{y/z} \ln x$.
- 2.22. $u'_x = 2xy - \frac{1}{2}y(xy + z^2)^{-1/2}$, $u'_y = x^2 - \frac{1}{2}x(xy + z^2)^{-1/2}$,
 $u'_z = -z(xy + z^2)^{-1/2}$.
- 2.23. $u'_x = \cos(x + 2y) + \sqrt{yz/x}$, $u'_y = 2 \cos(x + 2y) + \sqrt{xz/y}$, $u'_z = \sqrt{xy/z}$.
- 2.24. $u'_x = 2x/(x^2 - 3) + y^2x$, $u'_y = 2xyz$, $u'_z = xy^2$.

$$2.25. u'_x = 2x, u'_y = -1/(1 + (y + z^3)^2), u'_z = -3z^2/(1 + (y + z^3)^2).$$

$$2.26. u'_x = 3x^2y^2z + 3, u'_y = 2x^3yz - 5, u'_z = x^3y^2 + 1.$$

$$2.29. u'_x = -x^{-2}y \cdot f'(t), u'_y = x^{-1} \cdot f'(t).$$

$$2.30. u'_x = x(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot f'(t), u'_y = y(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot f'(t).$$

$$2.31. u'_x = y^2z^3 \cdot f'(t), u'_y = 2xyz^3 \cdot f'(t), u'_z = 3xy^2z^2 \cdot f'(t).$$

$$2.32. u'_x = \left(y - \frac{z^2}{x^2}\right) \cdot f'(t), u'_y = x \cdot f'(t), u'_z = \frac{2z}{x} \cdot f'(t).$$

$$2.33. \text{ а) } \frac{dz}{dt} = 6xy^3t^2 + 36x^2y^2t^3;$$

$$\text{ б) } \frac{dz}{dt} = 3 \left(\sin \frac{x}{y} + \frac{x}{y} \cos \frac{x}{y} \right) - \left(\frac{x}{y} \right)^2 \cos \frac{x}{y} \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}};$$

$$\text{ в) } \frac{dz}{dt} = e^{3x+2y}(-3 \sin t + 4t); \quad \text{ г) } \frac{dz}{dt} = \frac{2(y^2-1)}{x^2}e^{2t} + \frac{2y}{x}e^t;$$

$$\text{ д) } \frac{dz}{dt} = 0; \quad \text{ е) } \frac{dz}{dt} = \frac{1}{x + \ln y} \left(4te^{2t^2} + \frac{1}{yt} \right).$$

$$2.34. \text{ а) } \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2)t^{-3/2}e^{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{t}}},$$

$$\frac{dz}{dt} = e^{\frac{x^2+y^2}{\sqrt{t}}} \left(-\frac{1}{2}(x^2 + y^2)t^{-3/2} + 2xt^{-1/2} \cos t + 2yt^{-1/2} \cos^{-2} t \right);$$

$$\text{ б) } \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{t}{x + \sqrt{t^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t^2 + y^2}},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{x + (t^2 + y^2)^{1/2}} (t(t^2 + y^2)^{-1/2} + 2t + y(t^2 + y^2)^{-1/2}e^t);$$

$$\text{ в) } \frac{\partial z}{\partial t} = -x^2yt^{-2}e^{y/t}, \quad \frac{dz}{dt} = e^{y/t} \left(-x^2yt^{-2} + \frac{4xt}{t^2+1} + 3x^2t \right);$$

$$\text{ г) } \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{xy}{y^2 + x^2t^2}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{1}{y^2 + x^2t^2} (xy + ty \cdot \cos^{-2} t - 2t^2xe^{t^2+1});$$

$$\text{ д) } \frac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}, \quad \frac{dz}{dx} = e^{xy} (y + x \cdot \varphi'(x));$$

$$\text{ е) } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x^2 + y^2} (2x^2 - y); \quad \text{ ж) } \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3}{x}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{3}{x} + \frac{4x}{y}e^{x^2+3}.$$

$$2.35. \text{ а) } z'_u = 4x \frac{1}{x^2 + y^2} u + \frac{2y}{x^2 + y^2} v^{-3}, \quad z'_v = \frac{2x}{x^2 + y^2} u^2 - \frac{6y}{x^2 + y^2} uv^{-4};$$

$$\text{ б) } z'_u = \frac{1}{x^2 + y^2} (y \cdot \sin v - x \cdot \cos v), \quad z'_v = \frac{1}{x^2 + y^2} (y \cdot \cos v + x \cdot \sin v) u;$$

$$\text{ в) } z'_u = \frac{3(xu + 3yv)}{u^2 + v^2}, \quad z'_v = \frac{3(xv - yu)}{u^2 + v^2};$$

$$\text{ г) } z'_u = 0,5\sqrt{y/x} \cdot u^{-1}, \quad z'_v = 0,5\sqrt{x/y} \cdot v^{-1};$$

$$\text{ д) } z'_u = x^{-1}v^{-1} \cos(u/v) - 0,5y^{-1}(uv)^{-1/2},$$

$$z'_v = -x^{-1}uv^{-2} \cos(u/v) + 0,5y^{-1}(u/v^3)^{1/2}.$$

$$2.36. -2(1 + e \ln 2). \quad 2.37. \text{ а) } \frac{13}{4}; \quad \text{ б) } 2; \quad \text{ в) } -1. \quad 2.38. z'_x = 1, z'_y = 0.$$

$$2.39. z'_x = 0, z'_y = \frac{\ln 2}{2}. \quad 2.40. z'_x = -2, z'_y = \frac{10}{3}. \quad 2.41. z'_x = -1, z'_y = -\frac{14}{9}.$$

$$2.42. z'_x = 1, z'_y = \frac{2}{2+\pi}.$$

- 2.43. а) $-\frac{11}{\sqrt{2}}$; б) $-\frac{3}{25}$; в) $\frac{27}{5}$.
 2.44. а) $\frac{20\sqrt{3}}{9}$; б) $-\frac{\sqrt{6}}{3}$; в) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$.
 2.45. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$. 2.46. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.
 2.47. а) $-42 = -2\sqrt{13} \cdot \frac{21}{\sqrt{13}}$; б) $-8 = 2\sqrt{5} \cdot \frac{-4}{\sqrt{5}}$.
 2.48. а) $\frac{-4\vec{i}+5\vec{j}}{\sqrt{41}}$; б) $\frac{\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{2}}$; в) $\frac{\vec{i}-6\vec{k}}{\sqrt{37}}$.
 2.49. а) 26; б) 7.
 2.50. $f(P) \approx 2$. 2.51. $f(B) \approx 6,08$. 2.52. $f(B) \approx -8,26$.

§ 3

- 3.1. $\Delta f = 2 dx + dy + (dx)^2 + 2 dx dy + (dy)^2$, $df = 2 dx + dy$.
 3.2. $\Delta f = 3 dx - dy + (dx)^2 + dx dy - (dy)^2$, $df = 3 dx - dy$.
 3.3. а) $dx - dy$; б) $\frac{1}{2} dx$; в) $-\frac{dz}{2}$; г) $\frac{2dx+3dy-12dz}{37}$; д) $2 dx + \ln 4 dz$.
 3.10. а) (2; 0); б) (0; 0), (1; 1); в) (7; 2; 1).
 3.11. а) $\left(\frac{7}{4}; 2; 1\right)$, $\left(\frac{7}{4}; -2; -1\right)$; б) (1; -2); в) (1; 3), $\left(-\frac{1}{26}; -\frac{3}{26}\right)$.
 3.12. 0. 3.13. $\frac{24}{5}$. 3.14. 0.
 3.15. а) $2x + 2y - z - 1 = 0$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$;
 б) $x - 2y + z = 0$, $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$;
 в) $2x - z - 2 = 0$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1}$;
 г) $2x + 7y - 5z + 4 = 0$, $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{7} = \frac{z-3}{-5}$;
 д) $3x - 2y - 2z = 1$, $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$;
 е) $2x + y + 11z = 25$, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{11}$;
 ж) $x + 2y = 4$, $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{0}$.
 3.16. а) $6x - 4y - z = \pm 21$; б) $x - y + 2z = \pm \sqrt{5}$.
 3.17. $x + y = 1 \pm \sqrt{2}$.
 3.18. а) $f'_x(A) \approx -2$, $f'_y(A) \approx 2$, $df(A) \approx -2 dx + 2 dy$; б) $f(D) \approx -6,86$;
 в) $z = -2x + 2y - 3$; г) $\frac{x-6}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+4}{-1}$; д) $\text{grad } f(A) \approx (-2; 2)$;
 е) $\sqrt{6}$; ж) $\frac{14}{\sqrt{29}}$; з) $-2x + 2y + 4 = 0$.
 3.19. $2f'_x(1; 2) + 3f'_y(1; 2)$.
 3.20. $2f'_x(4; 0; -2) + 5f'_y(4; 0; -2) + f'_z(4; 0; -2)$.
 3.21. $f'_x(0; 2) = -1$, $f'_y(0; 2) = 2$.
 3.22. $\frac{1}{2}(4f''_{xx}(0; 1) + 12f''_{xy}(0; 1) + 9f''_{yy}(0; 1))$. 3.24. $\sqrt{13}$. 3.25. -2 .
 3.26. -3 .

§4

4.1. 1,2. 4.2. 1,9.

4.3. а) 1,00; б) 4,998. в) 1,92; г) 1,055; д) 2,95; е) 0,97.

4.4. Диагональ уменьшится на 3 мм, площадь уменьшится на 140 см^2 .

4.5. Вырастет на 1%. 4.6. 1,375%.

4.7. а) $f(x, y) = 5 + 2(x - 1)^2 - (x - 1)(y + 2) - (y + 2)^2$;

б) $f(x, y) = 1 - (x + 2)^2 + 2(x + 2)(y - 1) + 3(y - 1)^2$;

в) $f(x, y, z) = 2 - 4(y - 1) + 7(z - 2) + x^2 + 3(z - 2)^2 - 2(y - 1)(z - 2)$.

4.8. $f(x, y, z) = 3(x - 1)^2 + 3(y - 1)^2 + 3(z - 1)^2 - 3(x - 1)(y - 1) - 3(x - 1)(z - 1) - 3(y - 1)(z - 1) + o(\rho^2)$,

$\rho = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2}$.

4.9. а) $f(x, y) = x \ln 2 + 0,5x(y - 2) + o(\rho^2)$;

б) $f(x, y, z) = 2(z - 1) - (z - 1)^2 + xy + o(\rho^2)$.

4.10. а) $f(x, y) = 1 + (x - 1) + (x - 1)(y - 1) + o(\rho^2)$;

б) $f(x, y) = \frac{\pi}{4} + 0,5(x - y) - 0,25(x^2 - y^2) + o(\rho^2)$;

в) $f(x, y) = -(y - 1) + 2(x - 1)^2 + 0,5(y - 1)^2 - 2(x - 1)(y - 1) + o(\rho^2)$.

Глава 7

Экстремум функций нескольких переменных

Справочный материал и примеры решения задач

Задача 1. Найти локальные экстремумы функции нескольких переменных $w = 2x^2 + y^3 - 12xy + 4x - 12y + 2$.

Решение. Необходимое условие локального экстремума — это равенство нулю частных производных первого порядка. Вычислим частные производные данной функции и приравняем их к нулю:

$$w'_x = 4x - 12y + 4 = 0,$$

$$w'_y = 3y^2 - 12x - 12 = 0.$$

Решая систему, находим стационарные точки:

$$M_1 = (-1; 0), \quad M_2 = (35; 12).$$

Проверим найденные точки на выполнение достаточных условий локального экстремума. Найдем частные производные второго порядка.

$$A = w''_{xx} = 4, \quad B = w''_{xy} = w''_{yx} = -12, \quad C = w''_{yy} = 6y.$$

Способ 1.

Составим матрицу Гессе $H = \begin{pmatrix} w''_{xx} & w''_{xy} \\ w''_{yx} & w''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -12 & 6y \end{pmatrix}$ и вычислим ее угловые миноры $\Delta_1 = 4$, $\Delta_2 = 24y - 144$. Достаточное условие того, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $w(x, y)$ имеет в стационарной точке (x, y) строгий локальный минимум, состоит в том, что все угловые миноры матрицы Гессе положительны $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$. Достаточное условие того, что дважды непрерывно дифференцируемая функция $w(x, y)$ имеет в стационарной точке (x, y) строгий локальный максимум, состоит в том, что знаки угловых миноров чередуются следующим образом $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$. В точке M_1 $\Delta_1 = 4 > 0$ и $\Delta_2 = -144 < 0$. Следовательно, в этой точке

второй дифференциал функции не является знакопостоянной квадратичной формой, и точка M_1 не является точкой экстремума. В точке M_2 $\Delta_1=4>0$ и $\Delta_2=144>0$. Следовательно, в этой точке второй дифференциал является положительно определенной квадратичной формой, точка M_2 является точкой минимума и $w_{\min}=w(M_2)=-864$.

Способ 2.

У дважды непрерывно дифференцируемая функция $w=w(x, y)$ есть локальный максимум в стационарной точке, если $D=AC-B^2>0$ и $A<0$. И функция $w=w(x, y)$ имеет локальный минимум, если $D=AC-B^2>0$ и $A>0$.

Составим выражение $D=AC-B^2=24y-144$ и вычислим его в точках M_1, M_2 : $D(M_1)=-144, D(M_2)=144$. Следовательно, экстремума в точке M_1 нет, а в точке M_2 функция имеет экстремум. Поскольку $w''_{xx}(M_2)=4>0$, этот экстремум является минимумом.

Задача 2. Найти локальные экстремумы функции нескольких переменных

$$w = -x^2 - y^2 - z^2 + 2x + 4y - 6z.$$

Найдем стационарные точки функции:

$$\begin{cases} w'_x = -2x + 2 = 0, \\ w'_y = -2y + 4 = 0, \\ w'_z = -2z - 6 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим единственную стационарную точку $M(1; 2; -3)$. Второй способ из предыдущей задачи для исследования достаточного условия экстремума здесь неприменим, так как количество переменных больше 2. Поэтому воспользуемся способом 1 и составим матрицу Гессе

$$H = \begin{pmatrix} w''_{xx} & w''_{xy} & w''_{xz} \\ w''_{yx} & w''_{yy} & w''_{yz} \\ w''_{zx} & w''_{zy} & w''_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

В точке M

$$\Delta_1 = -2 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \text{и} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -8 < 0.$$

Знаки угловых миноров чередуются, начиная с минуса, поэтому точка M является точкой максимума и $w_{\max}=w(M)=14$.

Задача 3. Найти локальные условные экстремумы функции нескольких переменных $w = x + 2y$ при условии $g(x, y) = x^2 + y^2 - 5 = 0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L = w(x, y) + \lambda g(x, y) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Вычислим частные производные функции Лагранжа и приравняем их нулю. Получим систему уравнений

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0, \\ L'_y = 2 + 2\lambda y = 0, \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 5 = 0. \end{cases}$$

Для решения этой системы удобно в первых двух уравнениях слагаемые, содержащие множитель λ , перенести в правую часть:

$$\begin{aligned} 1 &= -2\lambda x, \\ 2 &= -2\lambda y. \end{aligned}$$

Затем, поделив друг на друга данные уравнения, получим $\frac{1}{2} = \frac{x}{y}$, откуда $y = 2x$. Подставляя это равенство в третье уравнение исходной системы, получаем $x_{1,2} = \pm 1$ и затем $y_{1,2} = \pm 2$, $\lambda_{1,2} = \mp \frac{1}{2}$. Таким образом, мы получили две точки: $M_1 = (1; 2; -0,5)$, $M_2 = (-1; -2; 0,5)$.

Далее необходимо составить окаймленную матрицу Гессе

$$H = - \begin{pmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Если $\det H > 0$, то функция $w(x, y)$ имеет в соответствующей точке условный минимум, а если $\det H < 0$ — условный максимум. В нашей задаче $\det H(M_1) = -20 < 0$, $\det H(M_2) = 20 > 0$. Следовательно, в точке $P_1 = (1; 2)$ функция $w(x, y)$ имеет условный максимум, а в точке $P_1 = (-1; -2)$ — условный минимум.

Задача 4. Вычислить наибольшее и наименьшее значения функции $w = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $D: 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 2$.

Решение. 1. Найдем вначале точки, в которых у данной функции выполняется необходимое условие локального экстремума:

$$\begin{cases} w'_x = 3x^2 - 3y = 0, \\ w'_y = 3y^2 - 3x = 0. \end{cases}$$

Из решения системы найдем две стационарные точки $M_1 = (0; 0)$, $M_2 = (1; 1)$. Нас интересуют только точки, принадлежащие рассматриваемой области D (включая границу), т. е. такие, чьи координаты удовлетворяют системе неравенств, задающих саму область. В данном случае обе точки принадлежат D (точка M_1 является граничной точкой, а M_2 — внутренней). В этих точках находим значение функции $w(M_1) = 0$, $w(M_2) = -1$.

2. Исследуем теперь функцию на границе области, т. е. на сторонах заданного прямоугольника.

1) На границе $x = 0$, $-1 \leq y \leq 2$, функция w является функцией одной независимой переменной $w = y^3$. Полученная функция на указанном отрезке возрастает и принимает наименьшее и наибольшее значения на концах отрезка. Таким образом, на данном участке границы области исследуемая функция принимает следующие наименьшее и наибольшее значения:

$$w_{\min} = w(0; -1) = -1, \quad w_{\max} = w(0; 2) = 8.$$

2) На границе $x = 2$, $-1 \leq y \leq 2$, имеем $w = f(y) = y^3 - 6y + 8$. Вычисляя первую производную полученной функции и приравнявая ее нулю, получаем уравнение $f' = 3y^2 - 6 = 0$. Это уравнение имеет единственное решение $y = \sqrt{2}$, принадлежащее отрезку $-1 \leq y \leq 2$. Вычисляем значение функции $f(y) = y^3 - 6y + 8$ в данной точке и на концах отрезка: $f(\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2}$, $f(-1) = 13$, $f(2) = 4$. Таким образом, на данном участке границы области исследуемая функция принимает следующие наименьшее и наибольшее значения:

$$w_{\min} = w(2; \sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2}, \quad w_{\max} = w(2; -1) = 13.$$

3) На границе $y = -1$, $0 \leq x \leq 2$, имеем $w = g(x) = x^3 + 3x - 1$. Первая производная полученной функции $g' = 3x^2 + 3$ везде положительна, следовательно, функция возрастает и принимает наименьшее и наибольшее значения на концах указанного промежутка. Таким образом, на данном участке границы области исследуемая функция принимает следующие наименьшее и наибольшее значения:

$$w_{\min} = w(0; -1) = -1, \quad w_{\max} = w(2; -1) = 13.$$

4) На границе $y = 2$, $0 \leq x \leq 2$, имеем $w = h(x) = x^3 - 6x + 8$. Приравнявая нулю первую производную полученной функции $h' = 3x^2 - 6 = 0$, получаем единственную критическую точку на данном отрезке $x = \sqrt{2}$. Вычисляем значение функции $h(x) = x^3 - 6x + 8$

в этой точке и на концах отрезка: $h(\sqrt{2}) = 8 - 4\sqrt{2}$, $h(0) = 8$, $h(2) = 4$. Таким образом, на данном участке границы области функция принимает следующие наименьшее и наибольшее значения:

$$w_{\min} = w(\sqrt{2}; 2) = 8 - 4\sqrt{2}, \quad w_{\max} = w(0; 2) = 8.$$

Сравнивая значения функции во всех найденных выше точках, получаем наименьшее и наибольшее значения функции в заданной области:

$$w_{\min} = w(1; 1) = w(0; -1) = -1, \quad w_{\max} = w(2; -1) = 13.$$

§ 1. Локальный экстремум функций нескольких переменных

Найдите локальные экстремумы функций (1.1–1.18).

1.1. $z = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$.

1.2. $z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2$.

1.3. $u = x^3 - 2y^2 - 3x + 8y$.

1.4. $u = x^2 - 2xy + 4y^3$.

1.5. $u = y^3 - 3x^2 - 27y + 12x$.

1.6. $u = x^2 - 4xy + 8y^3$.

1.7. $u = x^3 + 3xy^2 - 39x - 36y + 26$.

1.8. $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$.

1.9. $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

1.10. $f(x, y, z) = 2x^2 - xy + 2xz - y + y^3 + z^2$.

1.11. $f(x, y, z) = x^3 + xy + y^2 - 2zx + 2z^2 + 3y - 1$.

1.12. $u(x, y, z) = 2x^3 - 4xy + 2y^2 + 2xz + 0,5z^2 - 8y + 1$.

1.13. $f(x, y, z) = 2x^3 + 2xy + 2xz + y^2 + z^2 + 2y - 8$.

1.14. $u = x^2 + xy + y^2 + z^3 - 12x - 3y - 3z$.

1.15. $u = 3 + 2x - y - 12z - x^2 + xy - y^2 + z^3$.

1.16. $u = 2x^2 + xy + y^2 - z^3 - 9x - 4y + 27z$.

1.17. $u = 1 + 4x + 2y + 24z - x^2 + 2xy - 4y^2 - 2z^3$.

1.18. $u = 3x^3 + y^2 + z^2 + 6xy - 2z + 1$.

1.19. На рисунке изображены линии уровня функции $z = f(x, y)$. Отметьте **верные** утверждения.

1. В точках C и D функция $f(x, y)$ принимает максимальные значения.

2. В точках C и D функция $f(x, y)$ принимает минимальные значения.

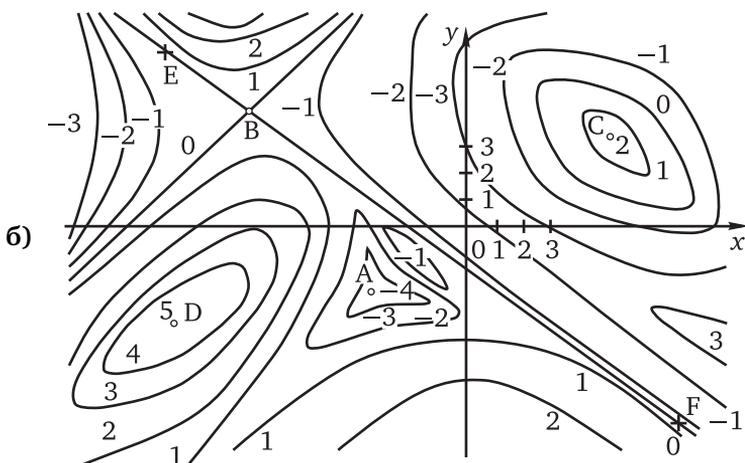
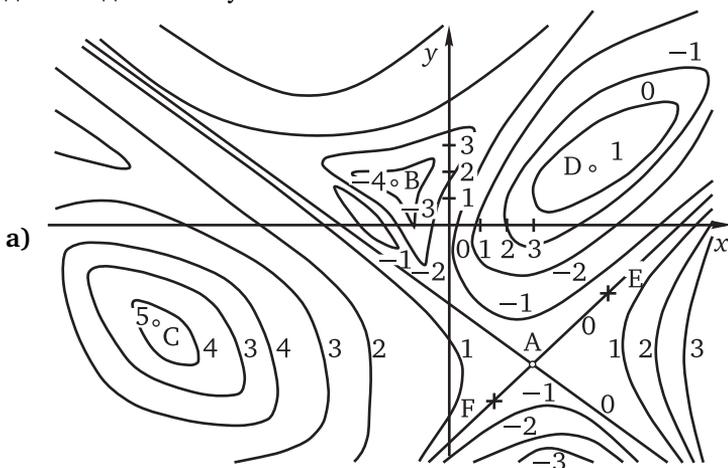
3. В точке B функция $f(x, y)$ принимает максимальное значение.

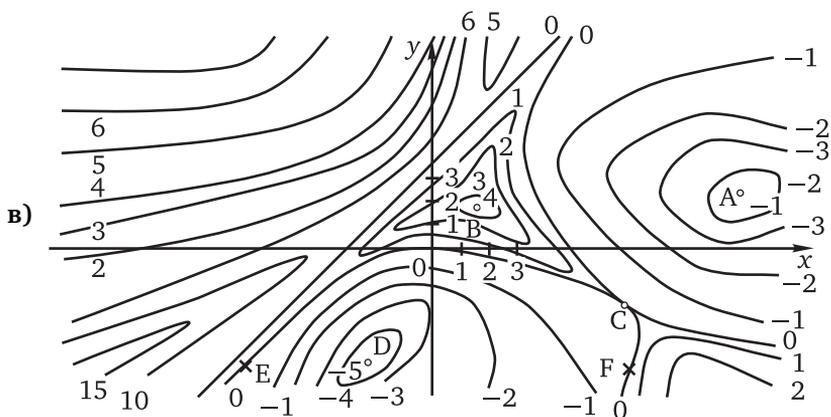
4. В точке B функция $f(x, y)$ принимает минимальное значение.

5. В окрестности точки A поверхность $z = f(x, y)$ имеет вид седла; на линии EF функция $f(x, y)$ сохраняет постоянное значение.

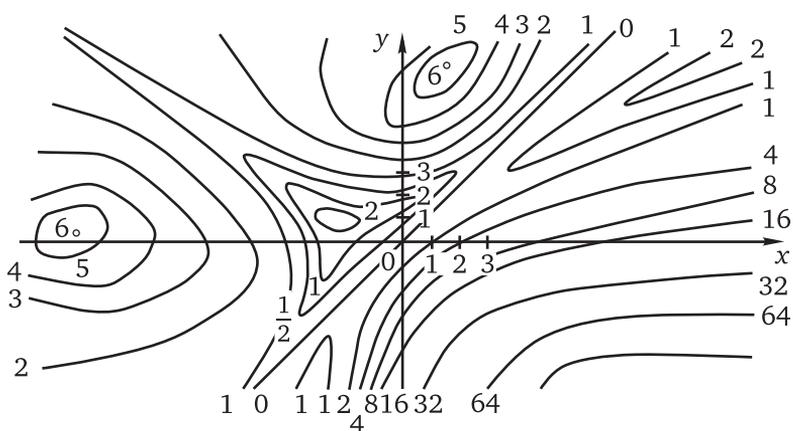
6. В точке A функция $f(x, y)$ принимает минимальное значение.

7. В окрестности точки C поверхность $z = f(x, y)$ имеет вид седла для каждого из случаев а–в.





1.20. На рисунке изображены линии уровня функции $z = f(x, y)$.



а) Постройте график функции $z = f(-5, y)$.

б) Постройте график функции $z = f(x, 0)$.

в) Постройте график функции $z = f(1, y)$.

§ 2. Локальный условный экстремум функций нескольких переменных

Используя метод Лагранжа и метод исключения переменной, найдите условные локальные экстремумы функции z при условии (2.1–2.4).

2.1. $z = x^2y, x + y - 2 = 0.$

2.2. $z = \frac{y}{x^2}, y - x + 1 = 0.$

$$2.3. z = xy^2, x + y - 3 = 0.$$

$$2.4. z = \frac{x}{y^2}, x - y + 2 = 0.$$

Найдите условные локальные экстремумы функции при заданном условии (2.5–2.18).

$$2.5. z = x^2 + y^2 + xy, x^2 + y^2 = 2.$$

$$2.6. z = 2x - 3y, x^2 + y^2 - 13 = 0.$$

$$2.7. z = x^2 + y^2 - 4xy, x^2 + y^2 - 2 = 0.$$

$$2.8. z = -x - y, \frac{x^2}{4} + y^2 = 5.$$

$$2.9. z = e^{x+y}, x^2 + y^2 = 2.$$

$$2.10. z = e^{2x-3y}, x^2 + y^2 = 13.$$

$$2.11. z = e^{-x-y}, \frac{x^2}{4} + y^2 = 5.$$

$$2.12. z = e^{xy}, x^2 + y^2 = 2.$$

$$2.13. z = 6 - 5x - 4y, x^2 - y^2 = 9.$$

$$2.14. z = 1 - 4x - 8y, x^2 - 8y^2 = 8.$$

$$2.15. f(x, y) = 2x + 16y, xy + y^2 - 7 = 0.$$

$$2.16. f(x, y) = 2x + 4y, 2xy + y^2 - 3 = 0.$$

$$2.17. f(x, y) = 3x - 6y, y^2 - xy - 1 = 0.$$

$$2.18. f(x, y) = 4x + 8y, y^2 - 2xy + 5 = 0.$$

2.19. Исследуйте точку A на условный экстремум, если в этой точке первый дифференциал функции Лагранжа $L(A, \lambda)$ равен нулю, а второй: $d^2L(A, \lambda) = 7(dx)^2 - 4dx dy - 5(dy)^2 - 2dx d\lambda + 6dy d\lambda$.

2.20. Исследуйте точку A на условный экстремум, если в этой точке первый дифференциал функции Лагранжа $L(A, \lambda)$ равен нулю, а второй: $d^2L(A, \lambda) = 2(dx)^2 - 20dx dy - 5(dy)^2 + 4dx d\lambda - 10dy d\lambda$.

2.21. Градиент функции $f(x, y)$ задан на оси Oy : $\text{grad } f(x, y) = (\cos y; y^4 + 3y^3 + 2y^2)$. Найдите в точках на оси Oy производные функции $f(x, y)$ по направлению оси Oy и исследуйте функцию $f(x, y)$ на условный экстремум на линии условия $x = 0$.

2.22. Градиент функции $f(x, y)$ задан на оси Ox : $\text{grad } f(x, y) = (4x^2 + 3x^3 - x^4; 1 + \sin x)$. Найдите в точках на оси Ox производные функции $f(x, y)$ по направлению оси Ox и исследуйте функцию $f(x, y)$ на условный экстремум на линии условия $y = 0$.

2.23. На линии условия $\varphi(x, y) = 2x + y - 1 = 0$ в семи точках даны градиенты функции двух переменных $f(P) = f(x, y)$:

в точке $A(-3; 7)$ градиент равен $(3; 1)$,

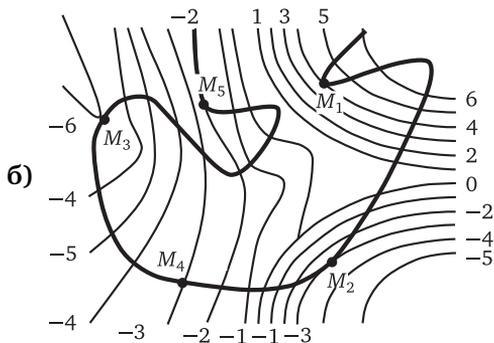
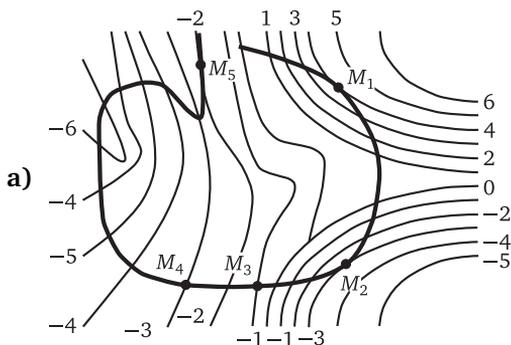
в точке $B(-2; 5) - (2; 1)$, в $C(-1; 3) - (3; 1)$,

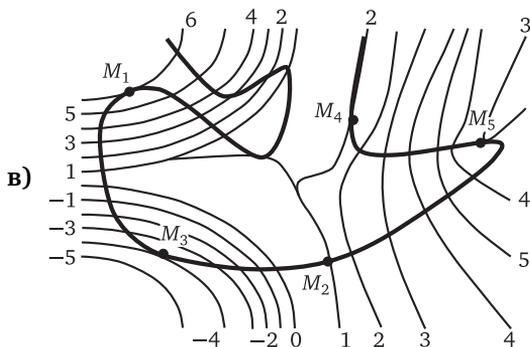
в $D(0; 1) - (4; 2)$, в $E(1; -1) - (1; 1)$,

в $F(2; -3) - (6; 3)$, в $G(3; -5) - (3; 1)$.

Все точки, «подозрительные» на условный экстремум, находятся среди указанных. Найдите эти точки и исследуйте их на условный экстремум.

2.24. По предложенным графикам линий уровня функции двух переменных $f(x, y)$ и условия связи $g(x, y) = 0$ (более толстая линия на рисунке) определите наличие или отсутствие у функции $f(x, y)$ условного локального экстремума в точках: M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 .





§3. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функций нескольких переменных

3.1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции z в области, заданной неравенством:

а) $x^2 + y^2 \leq 5$, $z = 5x^2 - 4xy + 2y^2$;

б) $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = x + 2y$;

в) $x^2 + y^2 \leq 1$, $z = 4xy + 3y^2$;

г) $x^2 + y^2 \leq 2x$, $z = x^2 - y^2$.

3.2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции z в области, ограниченной осями координат и заданной прямой.

а) $z = x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 5$, $x + y - 4 = 0$;

б) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$, $x + y + 3 = 0$;

в) $z = x^2 + y^2 - xy - 4x$, $2x + 3y - 12 = 0$.

3.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = xy + x + y$$

в области, ограниченной прямыми $x = 1$, $x = 2$, $y = 2$, $y = 3$.

3.4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^3 + y^3 - 3xy$$

в области $0 \leq x \leq 2$, $-1 \leq y \leq 2$.

3.5. Найдите наименьшее значение функции z в области, определяемой неравенствами

а) $x \geq -4$, $y \leq 4$, $y - x \geq 4$, $z = x^2 + y^2 - 6y$;

б) $x \leq 3$, $y \geq -3$, $y - x \leq 0$, $z = x^2 - 4x + y^2$.

3.6. Найдите наибольшее значение функции z в области, определяемой неравенствами

а) $x \leq 3, y \geq 0, y - x \leq -3, z = x - y^2 + 4y;$

б) $x \leq 0, y \geq 0, y - x \leq 2, z = x^2 + 2x - y$

3.7. Найдите наибольшее значение функции $f(x, y) = 2x - 2y$ при условиях $3x - 2y \geq -6, 3x + y \geq 3, 0 \leq x \leq 3, y \geq 0$. Сделайте рисунок.

3.8. Найдите наименьшее значение функции $f(x, y) = 3x + y$ при условиях $x + y \geq 4, x - y \leq 0, x \geq 1, y \leq 8$. Сделайте рисунок.

3.9. Найдите наибольшее значение функции $f(x, y) = 3 - x - y$ при условиях $3x + 2y \geq 6, 2x - y \geq -3, 0 \leq x \leq 4, y \geq 0$. Сделайте рисунок.

3.10. Найдите наименьшее значение функции $f(x, y) = 3 + x + 2y$ при условиях $x + y \geq 6, y - x \geq 0, x \geq 2, y \leq 10$. Сделайте рисунок.

3.11. Найдите наибольшее значение функции $f(x, y) = 2x + 3y$, если $x + 2y \leq 10, x + y \leq 6, 2x + y \leq 9, x \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$. Сделайте рисунок.

Ответы к главе 7

§ 1

- 1.1. (1; 2) — точка максимума. 1.2. (0; 3) — точка максимума.
1.3. (1; 2) — нет экстремума, (−1; 2) — точка максимума.
1.4. (0; 0) — нет экстремума, $(\frac{1}{6}; \frac{1}{6})$ — точка минимума.
1.5. (2; −3) — точка максимума, (2; 3) — нет экстремума.
1.6. (0; 0) — нет экстремума, $(\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ — точка минимума.
1.7. (3; 2) — точка минимума, (−3; −2) — точка максимума.
1.8. (−1; −2; 3) — точка минимума.
1.9. (0; 0; 1) — нет экстремума, (24; −144; −1) — точка минимума.
1.10. $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3})$ — точка минимума, $(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{4})$ — нет экстремума.
1.11. $(1; -2; \frac{1}{2})$ — точка минимума, $(-\frac{1}{2}; -\frac{5}{4}; -\frac{1}{4})$ — нет экстремума.
1.12. (2; 4; −4) — точка минимума, $(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3})$ — нет экстремума.
1.13. (1; −2; −1) — точка минимума, $(-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$ — нет экстремума.
1.14. (7; −2; 1) — точка минимума, (7; −2; −1) — нет экстремума.
1.15. (1; 0; −2) — точка максимума, (1; 0; 2) — нет экстремума.
1.16. (2; 1; −3) — точка минимума, (2; 1; 3) — нет экстремума.
1.17. (3; 1; 2) — точка максимума, (3; 1; −2) — нет экстремума.
1.18. (2; −6; 1) — точка минимума, (0; 0; 1) — нет экстремума.
1.19. а) 1, 4, 3; б) 1, 6; в) 3, 7.

§ 2

- 2.1. (0; 2) — точка минимума, $(\frac{4}{3}; \frac{2}{3})$ — точка максимума.
2.2. (2; 1) — точка максимума.
2.3. (3; 0) — точка минимума, (1; 2) — точка максимума.
2.4. (2; 4) — точка максимума.
2.5. (1; 1), (−1; −1) — точки максимума,
(−1; 1), (1; −1) — точки минимума.
2.6. (2; −3) — точка максимума,
(−2; 3) — точка минимума.
2.7. (−1; 1), (1; −1) — точки максимума,
(1; 1), (−1; −1) — точки минимума.
2.8. (−4; −1) — точка максимума, (4; 1) — точка минимума.
2.9. (1; 1) — точка максимума, (−1; −1) — точка минимума.
2.10. (2; −3) — точка максимума, (−2; 3) — точка минимума.

- 2.11. $(4; 1)$ — точка минимума, $(-4; -1)$ — точка максимума.
 2.12. $(1; 1)$, $(-1; -1)$ — точка максимума,
 $(-1; 1)$, $(1; -1)$ — точка минимума.
 2.13. $(-5; 4)$ — точка минимума, $(5; -4)$ — точка максимума.
 2.14. $(-4; 1)$ — точка минимума, $(4; -1)$ — точка максимума.
 2.15. $(6; 1)$ — точка минимума, $(-6; -1)$ — точка максимума.
 2.16. $(1; 1)$ — точка минимума, $(-1; -1)$ — точка максимума.
 2.17. $(0; -1)$ — точка минимума, $(0; 1)$ — точка максимума.
 2.18. $(3; 1)$ — точка минимума, $(-3; -1)$ — точка максимума.
 2.19. $\det H = 46 \Rightarrow A$ — условный минимум.
 2.20. $\det H = -170 \Rightarrow A$ — условный максимум.
 2.21. $(0; -2)$ — условный максимум,
 $(0; -1)$ — условный минимум, $(0; 0)$ — критическая точка.
 2.22. $(-1; 0)$ — условный минимум, $(4; 0)$ — условный максимум,
 $(0; 0)$ — критическая точка.
 2.23. Точка B критическая, D — условный максимум,
 F — условный минимум.
 2.24. а) M_1 — условный максимум, M_2 — условный минимум,
 M_3 — в точке отсутствует условный экстремум, M_4 — в точке отсутствует
 условный экстремум, M_5 — нестрогий условный максимум;
 б) M_1 — условный минимум, M_2 — условный минимум,
 M_3 — условный минимум, M_4 — в точке отсутствует условный экстремум,
 M_5 — нестрогий условный максимум;
 в) M_1 — условный максимум, M_2 — в точке отсутствует условный
 экстремум, M_3 — условный минимум, M_4 — нестрогий условный минимум,
 M_5 — условный минимум.

§ 3

- 3.1. а) Наименьшее значение $z(0; 0) = 0$,
 наибольшее значение $z(-2; 1) = z(2; -1) = 30$.
 б) Наибольшее значение $z\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \sqrt{5}$,
 наименьшее значение $z\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$.
 в) Наибольшее значение $z\left(\frac{1}{\sqrt{5}}; \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}; -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 4$,
 наименьшее значение $z\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = z\left(\frac{2}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{12}{5}$.
 г) Наибольшее значение $z(2; 0) = 4$,
 наименьшее значение $z\left(\frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.
 3.2. а) Наибольшее значение $z(4; 0) = 13$,
 наименьшее значение $z(1; 2) = -4$.

б) Наибольшее значение $z(-3; 0) = z(0; -3) = 6$,

наименьшее значение $z(-1; -1) = -1$.

в) Наибольшее значение $z(0; 4) = 16$,

наименьшее значение $z\left(\frac{8}{3}; \frac{4}{3}\right) = \frac{16}{3}$.

3.3. Наибольшее значение $z(2; 3) = 11$, наименьшее значение $z(1; 2) = 5$.

3.4. Наибольшее значение $z(2; -1) = 13$,

наименьшее значение $z(1; 1) = z(0; -1) = -1$.

3.5. а) Наименьшее значение $z(-0,5; 3,5) = -8,5$.

б) Наименьшее значение $z(2,5; -0,5) = -3,5$.

3.6. а) Наибольшее значение $z(3; 2) = 7$.

б) Наименьшее значение $z(-0,5; 1,5) = -2,25$.

3.7. Наибольшее значение $f(3; 0) = 6$.

3.8. Наименьшее значение $f(1; 3) = 6$.

3.9. Наибольшее значение $f(2; 0) = 1$.

3.10. Наименьшее значение $f(3; 3) = 12$.

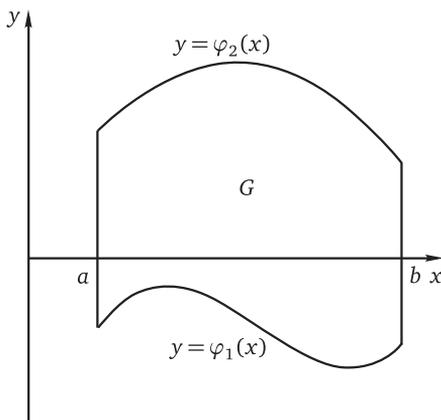
3.11. Наибольшее значение $f(2; 4) = 16$.

Глава 8

Двойной интеграл

Справочный материал и примеры решения задач

1. Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области интегрирования G , ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и графиками непрерывных функций $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$, $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$,

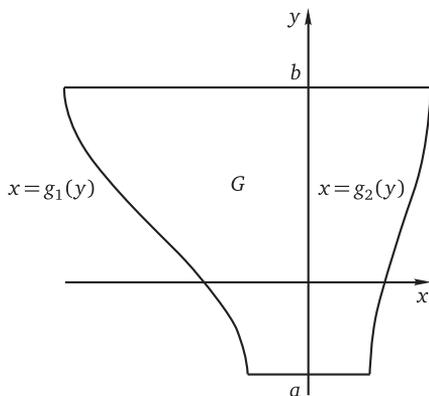


то двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области G вычисляется повторным интегрированием по формуле:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy.$$

2. Если функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области интегрирования G , ограниченной прямыми $y = a$, $y = b$ ($a < b$) и графиками

непрерывных функций $x = g_1(y)$ и $x = g_2(y)$, $g_1(y) \leq g_2(y)$,

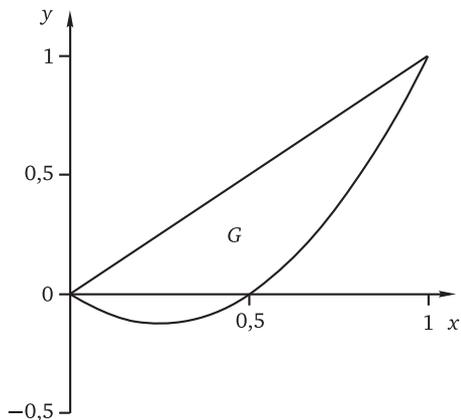


то двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по области G вычисляется повторным интегрированием по формуле:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dy \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx.$$

Задача 1. Вычислите интеграл $\iint_G (x + 2y) dx dy$ по области G , ограниченной линиями $y = x$ и $y = 2x^2 - x$.

Изобразим область интегрирования на плоскости xOy :

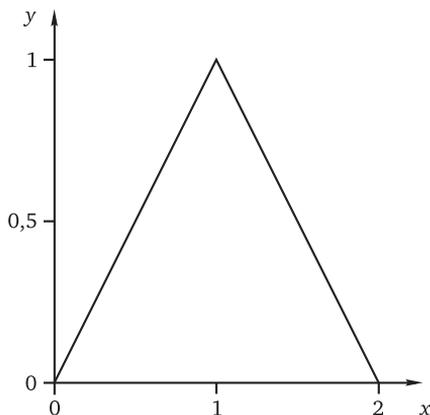


Видно, что данный двойной интеграл следует вычислять первым методом. Тогда

$$\begin{aligned} \iint_G (x+2y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{2x^2-x}^x (x+2y) dy = \int_0^1 dx (xy+y^2) \Big|_{y=2x^2-x}^{y=x} = \\ &= \int_0^1 (x^2+x^2-x(2x^2-x)-(2x^2-x)^2) dx = \int_0^1 (-4x^4+2x^3+2x^2) dx = \\ &= -\frac{4}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{11}{30}. \end{aligned}$$

Задача 2. Вычислите интеграл $\iint_G (2x+1) dx dy$ по области G , ограниченной линиями $y=x$ и $y=2-x$ и $y=0$.

Изобразим область интегрирования на плоскости xOy :



Если для вычисления двойного интеграла применить первый метод повторного интегрирования, то получим что

$$\iint_G (2x+1) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^x (2x+1) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} (2x+1) dy.$$

Такой метод расстановки пределов интегрирования приводит к необходимости проводить повторное интегрирование дважды. Поэтому в данном случае воспользуемся вторым методом повторного интегри-

рования:

$$\begin{aligned} \iint_G (2x+1) dx dy &= \int_0^1 dy \int_y^{2-y} (2x+1) dx = \int_0^1 dy (x^2+x) \Big|_{x=y}^{x=2-y} = \\ &= \int_0^1 ((2-y)^2 + 2-y-y^2-y) dy = \int_0^1 (-6y+6) dy = -3+6 = 3. \end{aligned}$$

§1. Двойной интеграл

Изобразите область интегрирования на плоскости. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле (1.1–1.11).

$$1.1. \int_{-1}^0 dx \int_{-x}^1 f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy.$$

$$1.2. \int_{-3}^0 dy \int_{y^2}^9 f(x, y) dx + \int_0^3 dy \int_{3y}^9 f(x, y) dx.$$

$$1.3. \int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{x^3}^1 f(x, y) dy.$$

$$1.4. \int_{-1}^0 dy \int_{-2y-2}^0 f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^0 f(x, y) dx.$$

$$1.5. \int_{-1}^0 dy \int_{-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-1}^{-y} f(x, y) dx.$$

$$1.6. \int_0^1 dy \int_0^{y^3} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f(x, y) dx.$$

$$1.7. \int_{-4}^0 dy \int_{\sqrt{-y}}^2 f(x, y) dx + \int_0^2 dy \int_y^2 f(x, y) dx.$$

$$1.8. \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy.$$

$$1.9. \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_4^6 dx \int_0^{6-x} f(x, y) dy.$$

$$1.10. \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^3 dy \int_{2-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{y+1}} f(x, y) dx.$$

$$1.11. \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_1^4 dx \int_{x-2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy.$$

Изобразите область интегрирования на плоскости. Измените порядок интегрирования и найдите интеграл (1.12–1.13).

$$1.12. \int_0^2 dy \int_{y/2}^y f'(x^2) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f'(x^2) dx.$$

$$1.13. \int_{1/2}^1 dy \int_{1/y}^2 f'(\ln x) dx + \int_1^2 dy \int_1^{2/y} f'(\ln x) dx.$$

Вычислите интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ по области D , ограниченной заданными линиями (1.14–1.21).

$$1.14. \iint_D x dx dy; D: y = \sqrt{x}, y = x.$$

$$1.15. \iint_D 2y dx dy; D: y = -x^3, y = 1, x = 0.$$

$$1.16. \iint_D \frac{dx dy}{x}; D: y = \ln x, y = -\frac{x}{e} + 2, y = 2.$$

$$1.17. \iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy; y = x, xy = 1, y = 2.$$

$$1.18. \iint_D (x - y) dx dy; y = 2 - x^2, y = 2x - 1.$$

$$1.19. \iint_D (x + y) dx dy; x = 0, y = 0, x + y = 2.$$

$$1.20. \iint_D x^2 y dx dy; y = x, x + y = 2, x = 0.$$

$$1.21. \iint_D (2y^3 - x) dx dy; y = x + 2, x = 0, y = 0.$$

Изобразите область D и найдите интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$. Объясните совпадение ответов в п. а) и б) (1.22–1.26).

$$1.22. f(x, y) = 4x + 1 \quad \text{а) } D = \{0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq x^2\};$$

$$\text{б) } D = \{0 \leq y \leq 9; \sqrt{y} \leq x \leq 3\}.$$

$$1.23. f(x, y) = 15y \quad \text{а) } D = \{0 \leq x \leq 1; x^2 - 1 \leq y \leq 0\};$$

$$\text{б) } D = \{-1 \leq y \leq 0; 0 \leq x \leq \sqrt{y+1}\}.$$

$$1.24. f(x, y) = 5y \quad \text{а) } D = \{0 \leq x \leq 3, -x \leq y \leq x^2\};$$

$$\text{б) } D = \{-3 \leq y \leq 0, -y \leq x \leq 3\} \cup \{0 \leq y \leq 9, \sqrt{y} \leq x \leq 3\}.$$

1.25. $f(x, y) = 2x + y$ а) область D ограничена линиями $x = 3y$, $x = 0$, $y = 1$;

б) область D ограничена линиями $y = 3x$, $y = 0$, $x = 1$.

1.26. а) Область D ограничена линиями $x = 6y$, $x = 0$, $y = 1$; $f(x, y) = x + 2y$;

б) область D ограничена линиями $y = 6x$, $y = 0$, $x = 1$; $f(x, y) = 2x + y$.

Найдите интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$. Сравните результат с объемом соответствующего тела (1.27–1.38).

$$1.27. D = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 1\}, f(x, y) = 3.$$

$$1.28. D = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq x\}, f(x, y) = 3.$$

$$1.29. D = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq x\}, f(x, y) = 3y.$$

$$1.30. D = \{0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq x\}, f(x, y) = 3x.$$

$$1.31. D = \{0 \leq x \leq 2; -x \leq y \leq x\}, f(x, y) = 3y.$$

$$1.32. D = \{0 \leq x \leq 2, -x \leq y \leq x\}, f(x, y) = 3x.$$

$$1.33. D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x\}, f(x, y) = 6x.$$

$$1.34. D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x\}, f(x, y) = 6y.$$

$$1.35. D = \{0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x\}, f(x, y) = 6(1 - x - y).$$

$$1.36. D = \{0 \leq x \leq 1; x - 1 \leq y \leq 1 - x\}, f(x, y) = 6x.$$

$$1.37. D = \{0 \leq x \leq 1; x - 1 \leq y \leq 1 - x\}, f(x, y) = 6y.$$

$$1.38. D = \{0 \leq x \leq 1; x - 1 \leq y \leq 1 - x\}, f(x, y) = 6(1 - x - y).$$

ОТВЕТЫ К ГЛАВЕ 8

§1

$$1.1. \int_0^1 dy \int_{-y}^{1-y} f(x, y) dx.$$

$$1.3. \int_0^1 dy \int_{y-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx.$$

$$1.5. \int_{-1}^0 dx \int_{x^3}^{-x} f(x, y) dy.$$

$$1.7. \int_0^2 dx \int_{-x^2}^x f(x, y) dy.$$

$$1.9. \int_0^2 dy \int_{y^2}^{6-y} f(x, y) dx.$$

$$1.11. \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} f(x, y) dx.$$

$$1.12. \frac{1}{2}(f(4) - f(0)) = \int_0^2 dx \int_x^{2x} f'(x^2) dy.$$

$$1.13. f(\ln 2) - f(0) = \int_1^2 dx \int_{1/x}^{2/x} f'(\ln x) dy.$$

$$1.14. \frac{1}{15}.$$

$$1.15. \frac{6}{7}.$$

$$1.16. \frac{1}{2} - 2 \ln 2.$$

$$1.17. \frac{9}{4}.$$

$$1.18. \frac{64}{15}.$$

$$1.19. \frac{8}{3}.$$

$$1.20. \frac{1}{6}.$$

$$1.21. \frac{68}{15}.$$

$$1.22. 90.$$

$$1.23. -4.$$

$$1.24. 99.$$

$$1.25. 4.$$

$$1.26. 10.$$

$$1.27. 6.$$

$$1.28. 6.$$

$$1.29. 4.$$

$$1.30. 8.$$

$$1.31. 0.$$

$$1.32. 16.$$

$$1.33. 1.$$

$$1.34. 1.$$

$$1.35. 1.$$

$$1.36. 2.$$

$$1.37. 0. \quad 1.38. 4.$$

$$1.2. \int_0^9 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\frac{x}{3}} f(x, y) dy.$$

$$1.4. \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2-1}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy.$$

$$1.6. \int_0^1 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{2-x} f(x, y) dy.$$

$$1.8. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

$$1.10. \int_{-1}^2 dx \int_{x^2-1}^{\sqrt{5-x^2+4x}} f(x, y) dy.$$

Глава 9

Варианты контрольных работ

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. Найдите длину проекции вектора $\vec{a} = (-2; 3; -1; 4)$ на вектор $\vec{b} = (1; 0; 2; 2)$.

2. Решите систему линейных уравнений и запишите общее решение этой системы в векторном виде:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = -7, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 7x_4 = -12, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = -5. \end{cases}$$

3. При каком значении параметра a точки $A(1; 3; 1)$, $B(2; 3; 0)$, $C(-1; 2; 1)$ и $D(a + 2; 4; 0)$ лежат в одной плоскости? (Исследуйте линейную зависимость или независимость векторов.)

4. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -4 \\ 5 & -12 & 8 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислите алгебраическое дополнение A_{23} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найдите координаты точки, симметричной точке $P(-1; 2; 0)$ относительно плоскости $4x - 5y - z - 7 = 0$.

7. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix} a+1 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v} = (-3; 1; a - 1)$?

Вариант 2

1. Найдите $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$.

2. Решите систему линейных уравнений и запишите общее решение этой системы в векторном виде:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -6, \\ 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = -2. \end{cases}$$

3. При каком значении параметра a точки $A(0; 3; -1)$, $B(2; 8; 7)$, $C(1; 0; 4 - a)$ и $D(0; 8; 9)$ лежат в одной плоскости? (Исследуйте линейную зависимость или независимость векторов.)

4. Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислите минор M_{32} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Найдите координаты точки, симметричной точке $P(2; -1; 1)$ относительно плоскости $x - y + 2z - 2 = 0$.

7. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a-4 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v} = (2; 3; a - 1)$?

Вариант 3

1. Найдите длину проекции вектора $\vec{a} = (1; 2; 5; 1)$ на вектор $\vec{b} = (2; 1; 0; -2)$.

2. Решите систему линейных уравнений и запишите общее решение этой системы в векторном виде:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 11, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 7. \end{cases}$$

3. При каком значении параметра a точки $A(1; 2; 1)$, $B(3; 6; 4)$, $C(5; 9; a + 3)$ и $D(3; 2; 0)$ лежат в одной плоскости? (Исследуйте линейную зависимость или независимость векторов.)

4. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 8 & -10 \\ 6 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислите алгебраическое дополнение A_{43} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Найдите координаты точки, симметричной точке $P(1; 1; 1)$ относительно плоскости $x + 4y + 3z + 5 = 0$.

7. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ a-1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v} = (1; 3; a - 2)$?

Вариант 4

1. Найдите $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, если $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$ и $|\vec{a} - \vec{b}| = 2$.

2. Решите систему линейных уравнений и запишите общее решение этой системы в векторном виде:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -5, \\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -4, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

3. При каком значении параметра a точки $A(1; 2; 3)$, $B(a+8; 3; 1)$, $C(3; 3; 3)$ и $D(2; 3; 4)$ лежат в одной плоскости? (Исследуйте линейную зависимость или независимость векторов.)

4. Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -8 & -4 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Вычислите минор M_{13} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Найдите координаты точки, симметричной точке $P(-1; 0; -1)$ относительно плоскости $2x + 6y - 2z + 11 = 0$.

7. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & a-1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v} = (a-1; 1; -5)$?

Вариант 5

1. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 11x_2 + 5x_3 + 90x_4 = 0, \\ 4x_1 + 44x_2 + 21x_3 + 400x_4 = 1 \end{cases}$$

в виде суммы частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

2. При каком значении параметра a система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + 4x_3 = a \end{cases} \quad \text{совместна?}$$

3. При каком значении параметра a точки $A(1; 3; 1)$, $B(2; 3; 0)$, $C(-1; 2; 1)$ и $D(a+2; 4; 0)$ лежат в одной плоскости?

4. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & -12 & -2 \\ -2 & -8 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите $|\cos \varphi|$, где φ — угол между собственными векторами матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, соответствующими различными собственными значениями.

6. При каком значении параметра a плоскости $2x + y - z + 9 = 0$ и $(2a + 2)x + (2a - 1)y - 3z + 7 = 0$ параллельны?

7. Вычислите

$$\det \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 6

1. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 10x_2 + 5x_3 + 50x_4 = 1, \\ 3x_1 - 30x_2 + 16x_3 + 167x_4 = 0 \end{cases}$$

в виде суммы частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

2. При каком значении параметра a система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 2x_1 + 5x_3 = 7, \\ x_1 + x_2 + (a + 9)x_3 = 6 \end{cases} \quad \text{совместна?}$$

3. При каком значении параметра a точки $A(0; 3; -1)$, $B(2; 8; 7)$, $C(1; 0; 4 - a)$ и $D(0; 8; 9)$ лежат в одной плоскости?

4. Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите $|\cos \varphi|$, где φ — угол между собственными векторами матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, соответствующим различным собственным значениям.

6. При каком значении параметра a прямая $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1}$ и плоскость $2x + (a+2)y - 2z + 11 = 0$ перпендикулярны?

7. Вычислите

$$\det \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 7

1. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 20x_2 + 3x_3 + 20x_4 = 0, \\ 5x_1 + 100x_2 + 14x_3 + 89x_4 = 1 \end{cases}$$

в виде суммы частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

2. При каком значении параметра a система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 = 7, \\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 = a + 3 \end{cases}$$

совместна?

3. При каком значении параметра a точки $A(1; 2; 1)$, $B(3; 6; 4)$, $C(5; 9; a+3)$ и $D(3; 2; 0)$ лежат в одной плоскости?

4. Решите матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите $|\cos \varphi|$, где φ — угол между собственными векторами матрицы $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, соответствующим различным собственным значениям.

6. При каком значении параметра a прямые $\frac{x+1}{3} = \frac{y+3}{6} = \frac{z+2}{3}$ и $\frac{x-6}{4+a} = \frac{y+4}{5+a} = \frac{z+3}{-2-a}$ параллельны?

7. Вычислите

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вариант 8

1. Найдите общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 22x_2 + 4x_3 + 40x_4 = 1, \\ 3x_1 - 66x_2 + 11x_3 + 127x_4 = 0 \end{cases}$$

в виде суммы частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.

2. При каком значении параметра a система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 = 4, \\ x_1 + 8x_2 + (a - 7)x_3 = 5 \end{cases} \quad \text{совместна?}$$

3. При каком значении параметра a точки $A(1; 2; 3)$, $B(a+8; 3; 1)$, $C(3; 3; 3)$ и $D(2; 3; 4)$ лежат в одной плоскости?

4. Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 8 \\ -5 & -7 \end{pmatrix}.$$

5. Найдите $|\cos \varphi|$, где φ — угол между собственными векторами матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, соответствующим различным собственным значениям.

6. При каком значении параметра a прямая $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ и плоскость $x + y + az - 4 = 0$ параллельны?

7. Вычислите

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & -4 \\ 5 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Контрольная работа 2

Вариант 1

1. Вычислите $\max_{[0;3]}(2x^3 - 3x^2 - 12x + 1)$.

2. Составьте уравнение касательной к графику функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^3}, \\ y = \frac{t^2}{1+t^3}, \end{cases}$$

в точке, соответствующей значению $t = 1$.

3. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $M(-1; 2)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно:

$$\ln(x+y) + x^2 e^{2x+y} - \frac{1}{4}y^3 + 1 = 0.$$

4. Проведя необходимое исследование функции

$$y = 2x + 3 - \frac{8}{(x+5)^2},$$

постройте эскиз ее графика.

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y = \sqrt{x^3}$ в точке $x = 1,02$.

6. Вычислите определенный интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$.

7. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл

$$\int (2x+1) \sin 3x \, dx.$$

Вариант 2

1. Вычислите $\min_{[-3;0]} (2x^3 + 3x^2 - 12x - 1)$.

2. Составьте уравнение касательной к графику функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \frac{1+\ln t}{t^2}, \\ y = \frac{3+2\ln t}{t}, \end{cases}$$

в точке, соответствующей значению $t = 1$.

3. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $M(2; 1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно $x^3 + \ln y^2 - x^2 e^{y-1} = 4$.

4. Проведя необходимое исследование функции

$$y = -4x + 1 + \frac{1}{(x-2)^4},$$

постройте эскиз ее графика.

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y = \sqrt{3x+1}$ в точке $x = 0,98$.

6. Найдите определенный интеграл $\int_4^5 x \sqrt{x^2 - 16} dx$.

7. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл

$$\int (2x + 5)e^{3x} dx.$$

Вариант 3

1. Вычислите $\max_{[0;4]}(2x^3 - 3x^2 - 36x + 2)$.

2. Составьте уравнение касательной к графику функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \frac{t+1}{t}, \\ y = \frac{t-1}{t}, \end{cases}$$

в точке, соответствующей значению $t = -1$.

3. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $M(1; 1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно

$$4\sqrt{3 + \frac{x}{y}} + 3xy^3 + e^{y-x} = 12.$$

4. Проведя необходимое исследование функции

$$y = x - 1 + \frac{27}{(x+1)^3},$$

постройте эскиз ее графика.

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x = 0,97$.

6. Вычислите определенный интеграл $\int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x + 1}}$.

7. Найдите неопределенный интеграл $\int (3x - 1) \cos 2x dx$.

Вариант 4

1. Вычислите $\min_{[-4;0]} (2x^3 + 3x^2 - 36x - 2)$.

2. Составьте уравнение касательной к графику функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = \frac{1}{t+1}, \\ y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2, \end{cases}$$

в точке, соответствующей значению $t = -\frac{1}{2}$.

3. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $M(2; 1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно:

$$3\sqrt{2x^2 + y^2} + x^2y^2 - \frac{8}{3}y^3 = \frac{31}{3}.$$

4. Проведя необходимое исследование функции

$$y = -5x + 4 - \frac{1}{(x-1)^5},$$

постройте эскиз ее графика.

5. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y = \sqrt{3x-2}$ в точке $x = 1,04$.

6. Вычислите определенный интеграл $\int_e^{e^2} \frac{2\ln x + 1}{x} dx$.

7. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл

$$\int (2x + 2)e^{2x} dx.$$

Вариант 5

1. Найдите точки экстремума функции $y = f(x^3 - 9x^2 + 24x + 10)$ и укажите их тип, если $f(x)$ — дифференцируемая монотонно убывающая функция, определенная на всей числовой прямой и не имеющая критических точек.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = 2t^2 - 3t + 1, \\ x = -t^2 + 2t + 4, \end{cases}$$

в точке, соответствующей $t = 2$.

3. Ограничившись тремя членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0,5)$, где $f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - 2 - x^2$.

4. Исследуйте функцию $y = \frac{x^3+4}{x^2}$ и постройте эскиз ее графика (ограничьтесь первой производной).

5. Используя правило нахождения производной сложной функции, найдите $g'(1)$, если $g(x) = f(f(x))$, где $f(x) = x^2 - 2$.

6. Используя подходящую замену переменной, вычислите определенный интеграл

$$\int_0^1 x(2-x^2)^5 dx.$$

7. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл

$$\int (2x+3) \ln x dx.$$

Вариант 6

1. Найдите точки экстремума функции $y = f(5 + 45x - 3x^2 - x^3)$ и укажите их тип, если $f(x)$ — дифференцируемая монотонно убывающая функция, определенная на всей числовой прямой и не имеющая критических точек.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = 2t^2 + 4t - 10, \\ x = 4t^2 - 12t + 7, \end{cases}$$

в точке, соответствующей $t = 2$.

3. Ограничившись тремя членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0,5)$, где $f(x) = e^{2x} - 1 - 2x$.

4. Исследуйте функцию $y = \frac{x^3}{x^2-4}$ и постройте эскиз ее графика (ограничьтесь первой производной).

5. Используя правило нахождения производной сложной функции, найдите $g'(1)$, если $g(x) = f(f(x))$, где $f(x) = x^3 + 1$.

6. Используя подходящую замену переменной, вычислите определенный интеграл

$$\int_3^4 \frac{x dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

7. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл

$$\int x \sin(3x+2) dx.$$

Вариант 7

1. Найдите точки экстремума функции $y = f(2x^3 - 3x^2 - 36x + 20)$ и укажите их тип, если $f(x)$ — дифференцируемая монотонно убывающая функция, определенная на всей числовой прямой и не имеющая критических точек.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = -t^2 + 5t + 3, \\ x = 2t^2 - 3t, \end{cases}$$

в точке, соответствующей $t = -1$.

3. Ограничившись тремя членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0,5)$, где $f(x) = 6 \ln(1+x^2) - 6x^2 + 3x^4$.

4. Исследуйте функцию $y = \frac{x^3}{x^2+1}$ и постройте эскиз ее графика (ограничьтесь первой производной).

5. Используя правило нахождения производной сложной функции, найдите $g'(1)$, если $g(x) = f(f(x))$, где $f(x) = 3x^2 - x$.

6. Используя подходящую замену переменной, вычислите определенный интеграл $\int_0^4 \frac{dx}{(1+\sqrt{2x+1})\sqrt{2x+1}}$.

7. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл

$$\int xe^{2x+1} dx.$$

Вариант 8

1. Найдите точки экстремума функции $y = f(1 + 12x - 3x^2 - 2x^3)$ и укажите их тип, если $f(x)$ — дифференцируемая монотонно убывающая функция, определенная на всей числовой прямой и не имеющая критических точек.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$, заданной параметрически

$$\begin{cases} y = 5t^2 - 2t - 5, \\ x = t^2 + 4t - 1, \end{cases}$$

в точке, соответствующей $t = -1$.

3. Ограничившись тремя членами табличного разложения соответствующей элементарной функции по формуле Маклорена, найдите приближенное значение $f(0,5)$, где $f(x) = 3 \cos 2x - 3 + 6x^2$.

4. Исследуйте функцию $y = \frac{x^4}{(x+1)^3}$ и постройте эскиз ее графика (ограничьтесь первой производной).

5. Используя правило нахождения производной сложной функции, найдите $g'(1)$, если $g(x) = f(f(x))$, где $f(x) = 2x^2 - 3x$.

6. Используя подходящую замену переменной, вычислите несобственный интеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

7. Методом интегрирования по частям вычислите интеграл

$$\int (x+1) \cos 2x \, dx.$$

Зачетная контрольная работа

Вариант 1

1. а) В линейном пространстве симметричных матриц 2×2 найдите координаты элемента

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ в базисе } e_1 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

В ответе укажите координаты элемента A в данном базисе.

б) Сделайте проверку.

2. Найдите собственные векторы, соответствующие меньшему собственному значению матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 8n} - 7 - 2n)$.

4. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{\sqrt{1+3x^2} - 1}$.

5. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $(0; 1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной уравнением $e^x + \sqrt{x+y} = y + 1$.

6. Проведите исследование функции $y = 2x + 3 - \frac{8}{(x+5)^2}$ и постройте эскиз ее графика.

7. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y = \sqrt{x^3}$ в точке $x = 1,02$.

Вариант 2

1. а) В линейном пространстве симметричных матриц 2×2 найдите координаты элемента

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 4 \end{pmatrix} \text{ в базисе } e_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

В ответе укажите координаты элемента A в данном базисе.

б) Сделайте проверку.

2. Найдите собственные векторы, соответствующие меньшему собственному значению матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 - 3} + \sqrt[3]{n^3 + 4}}{\sqrt[5]{n^5 - 2}}$.

4. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 2)(\ln(4x - 1) - \ln(4x + 5))$.

5. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $(1; 1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной уравнением $x^3 - xy + 3y^2 = 3$.

6. Проведите исследование функции $y = x - 1 + \frac{27}{(x+1)^3}$ и постройте эскиз ее графика.

7. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y = \sqrt{3x+1}$ в точке $x = 0,98$.

Вариант 3

1. а) В линейном пространстве симметричных матриц 2×2 найдите координаты элемента

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ в базисе } e_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

В ответе укажите координаты элемента A в данном базисе.

б) Сделайте проверку.

2. Найдите собственные векторы, соответствующие меньшему собственному значению матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-2)^8(n^2+5)}{(2n-3)^2(n+7)^4(n-1)^4}$.

4. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x^3)}{(e^{3x^2}-1)\sin 2x}$.

5. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $(1; 1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной уравнением $\sqrt{xy} + \ln y = x^5$.

6. Проведите исследование функции $y = -4x + 1 + \frac{1}{(x-2)^4}$ и постройте эскиз ее графика.

7. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x = 0,97$.

Вариант 4

1. а) В линейном пространстве симметричных матриц 2×2 найдите координаты элемента

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \text{ в базисе } e_1 = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В ответе укажите координаты элемента A в данном базисе.

б) Сделайте проверку.

2. Найдите собственные векторы, соответствующие большему собственному значению матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 3} - \sqrt[3]{8n^3 + 2}}{6n + \sqrt[4]{n^4 + 1}}$.

4. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x + 1)(\ln(2x - 3) - \ln(2x + 4))$.

5. Напишите уравнение касательной, проведенной в точке $(0; 1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной уравнением $y + \ln(x + y) = 2x + 1$.

6. Проведите исследование функции $y = -5x + 4 - \frac{1}{(x-1)^5}$ и постройте эскиз ее графика.

7. Заменяя приращение функции дифференциалом, вычислите приближенно значение функции $y = \sqrt{3x - 2}$ в точке $x = 1,04$.

Вариант 5

1. В какой точке линия пересечения плоскостей $3x + 2y + z - 5 = 0$ и $x + y - z = 0$ пересекает плоскость $4x - y + 5z - 3 = 0$? Сделайте проверку.

2. Найдите фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 14x_4 = 0 \end{cases}$$

и запишите общее решение этой системы в векторном виде.

3. Найдите $|\cos \varphi|$, где φ — угол между собственным вектором, соответствующим меньшему собственному значению матрицы $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, и осью Oy .

4. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4\sqrt{x^6 - 1} - 2x^5}{7x^5 + 3x^3}$.

5. Найдите точку максимума функции

$$f(x) = 1 - x - 2x^2 - x^3.$$

6. Проведя необходимое исследование функции $y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$, постройте эскиз ее графика (при исследовании производной рекомендуется ограничиться первой производной).

7. Найдите первообразную функции $f(x) = (2x + 5)e^{3x}$, график которой проходит через точку $(0; 2)$.

Вариант 6

1. В какой точке линия пересечения плоскостей $2x + y - z - 5 = 0$ и $x - 2y + 2z + 5 = 0$ пересекает плоскость $7x + y + z - 14 = 0$? Сделайте проверку.

2. Найдите фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 10x_2 + 6x_3 - 12x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 0, \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

и запишите общее решение этой системы в векторном виде.

3. Найдите $|\cos \varphi|$, где φ — угол между собственным вектором, соответствующим меньшему собственному значению матрицы $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, и осью Ox .

4. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2} - 1}{\cos 3x - 1}$.

5. Найдите абсциссу точки минимума функции

$$f(x) = 5 - x + x^2 + x^3.$$

6. Проведя необходимое исследование функции $y = \frac{x^2}{(x+4)^2}$, постройте эскиз ее графика (при исследовании производной рекомендуется ограничиться первой производной).

7. Найдите первообразную функции $f(x) = (2x + 3) \cos 3x$, график которой проходит через точку $(\pi; 1)$.

Вариант 7

1. В какой точке линия пересечения плоскостей $x - 3y - z + 4 = 0$ и $-2x + 7y + 2z - 10 = 0$ пересекает плоскость $3x + 2y - 4z - 9 = 0$? Сделайте проверку.

2. Найдите фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_4 = 0, \\ -4x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 14x_2 + 8x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

и запишите общее решение этой системы в векторном виде.

3. Найдите $|\cos \varphi|$, где φ — угол между собственным вектором, соответствующим меньшему собственному значению матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, и осью Oy .

4. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x}{3\sqrt{x^4 - 4} + x}$.

5. Найдите точку максимума функции

$$f(x) = -3 + 5x - x^2 - x^3.$$

6. Проведя необходимое исследование функции $y = \frac{27 - 2x^3}{6x^2}$, постройте эскиз ее графика (при исследовании производной рекомендуется ограничиться первой производной).

7. Найдите первообразную функции $f(x) = \frac{x^4}{e - x^5}$, график которой проходит через точку $(0; 0)$.

Вариант 8

1. В какой точке линия пересечения плоскостей $-2x + 3y + z - 2 = 0$ и $3x + 6y + 2z - 11 = 0$ пересекает плоскость $x + 2y + z - 4 = 0$? Сделайте проверку.

2. Найдите фундаментальный набор решений однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

и запишите общее решение этой системы в векторном виде.

3. Найдите $|\cos \varphi|$, где φ — угол между собственным вектором, соответствующим меньшему собственному значению матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, и осью Ox .

4. Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x^3)}{\sin 2x(\sqrt{1+x^2+2x^3}-1)}$.

5. Найдите точку минимума функции

$$f(x) = 1 - 4x - x^2 + 2x^3.$$

6. Проведя необходимое исследование функции $y = \frac{4x^2+3x}{x+1}$, постройте эскиз ее графика (при исследовании производной рекомендуется ограничиться первой производной).

7. Найдите первообразную функции $f(x) = x^2 \exp(8 - x^3)$, график которой проходит через точку $(2; 1)$.

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

1. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$. Докажите, что

$$f(x_0 + at) - f(x_0) = k \cdot t + o(t)$$

при $t \rightarrow 0$ и найдите k .

2. Чему равен определитель квадратной матрицы, имеющей собственное значение $\lambda = 0$? Ответ обосновать.

3. Найдите ближайшую к точке $(0; 0; -4)$ точку $M(x_1; x_2; x_3)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 = 12. \end{cases}$$

4. Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 1 & 1 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

5. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2a-2 & 4 \end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v} = (a-1; 1; -5)$?

6. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной в точке $(1; 1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $\sqrt{xy} + \ln y = x^5$.

7. Найдите определенный интеграл $\int_1^2 e^{3/\sqrt{t}} dt$, если $\int_1^x e^{1/\sqrt{t}} dt = F(x)$, где $F(x)$ — заданная функция.

8. Найдите все точки локального экстремума функции

$$u = -2x^3 - 4y^2 - z^2 + 2yz + 24x + 2y + 4z - 9.$$

Укажите их вид.

9. Найдите наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2 - 6y$ в области, определяемой неравенствами $x \geq -4$, $y \leq 4$, $y - x \geq 4$.

10. Вычислите двойной интеграл $\iint_G (2x + y) dx dy$, где область G ограничена линиями $x = 3y$, $x = 0$, $y = 1$.

Вариант 2

1. Пусть \vec{v} — собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению $\lambda = \lambda_1$, и \vec{w} — собственный вектор матрицы B , соответствующий собственному значению $\lambda = \lambda_2$. Докажите, что \vec{v} — собственный вектор матрицы $C = A \cdot B$. Какому собственному значению он соответствует?

2. Докажите, что если функция $f(x) = f(1) + k(x - 1) + o(x - 1)$ при $x \rightarrow 1$, то эта функция имеет производную при $x = 1$. Чему равна $f'(1)$?

3. Найдите ближайшую к точке $(0; -4; 0)$ точку $M(x_1, x_2, x_3)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ -4x_1 + 8x_2 + 2x_3 = -12. \end{cases}$$

4. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & 10 \end{pmatrix}$.

5. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix} a+1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v} = (1; 3; a - 2)$?

6. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной в точке $(1; 1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $x^2 + xy + y^2 = 3$.

7. Найдите определенный интеграл $\int_1^3 e^{-2\sqrt{t}} dt$, если $\int_0^x e^{-\sqrt{t}} dt = F(x)$, где $F(x)$ — заданная функция.

8. Найдите все точки локального экстремума функции

$$u = -x^3 + y^2 + 2z^2 + yz + 27x - 4y - 9z - 2.$$

Укажите их вид.

9. Найдите наибольшее значение функции $z = x - y^2 + 4y$ в области, определяемой неравенствами $x \leq 3$, $y \geq 0$, $y - x \leq 0$.

10. Вычислите двойной интеграл $\iint_G (x + 2y) dx dy$, где область G ограничена линиями: $x = 6y$, $x = 0$, $y = 1$.

Вариант 3

1. Функция дифференцируема в точке $(1; 2)$. Докажите, что

$$f(1 + 2t; 2 + 3t) - f(1; 2) = k \cdot t + o(t)$$

при $t \rightarrow 0$ и найдите k .

2. Докажите, что если \vec{v} — собственный вектор квадратной матрицы A , соответствующий собственному значению $\lambda = 5$, и существует обратная матрица A^{-1} , то \vec{v} является собственным вектором матрицы A^{-1} . Какому собственному значению обратной матрицы он соответствует?

3. Найдите ближайшую к точке $(0; 0; 2)$ точку $M(x_1; x_2; x_3)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -10, \\ -3x_1 + 9x_2 + 5x_3 = 30. \end{cases}$$

4. Решите матричное уравнение $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

5. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ a-2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v} = (-3; 1; a - 1)$?

6. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной в точке $(1; 1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $xy + \ln y = 1$.

7. Найдите определенный интеграл $\int_2^4 e^{-3t^2} dt$, если $\int_0^x e^{-t^2} dt = F(x)$, где $F(x)$ — заданная функция.

8. Найдите все точки локального экстремума функции

$$u = x^3 + y^2 + z^2 + yz - 3x - 3y - 12z + 1.$$

Укажите их вид.

9. Найдите наименьшее значение функции $z = x^2 + 2x - y$ в области, определяемой неравенствами $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 2$.

10. Вычислите двойной интеграл $\iint_G (x + 2y) dx dy$, где область G ограничена линиями $y = 3x$, $y = 0$, $x = 1$.

Вариант 4

1. Известно, что $f(1 + 2t; 2 + 3t) - f(1; 2) = 13t + o(t)$ при $t \rightarrow 0$. Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x, y)$ в точке $A(1; 2)$ по направлению вектора $\vec{l} = (2; 3)$.

2. Пользуясь определением, докажите что $(\sqrt{4 - 3x^4} - 2) \cdot x = o(x^3)$ при $x \rightarrow 0$.

3. Найдите ближайшую к точке $(0; 4; 0)$ точку $M(x_1, x_2, x_3)$, координаты которой удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 10. \end{cases}$$

4. Решите матричное уравнение $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

5. При каком значении параметра a матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

имеет собственный вектор $\vec{v} = (2; 3; a - 1)$?

6. Найдите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной, проведенной в точке $(0; 1)$ к графику функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $e^x + \sqrt{x+y} = y + 1$.

7. Найдите определенный интеграл $\int_2^4 e^{2/t^2} dt$, если $\int_1^x e^{1/t^2} dt = F(x)$, где $F(x)$ — заданная функция.

8. Найдите все точки локального экстремума функции

$$u = x^3 - y^2 - z^2 + yz - 12x - y + 2z + 6.$$

Укажите их вид.

9. Найдите наименьшее значение функции $z = x^2 - 4x + y^2$ в области, определяемой неравенствами $x \leq 3$, $y \geq -3$, $y - x \leq -3$.

10. Вычислите двойной интеграл $\iint_G (2x + y) dx dy$, где область G ограничена линиями $y = 6x$, $y = 0$, $x = 1$.

Вариант 5

1. Пользуясь определением, докажите что

$$(\sqrt{1 + x^3 + 2x^4} - 1) \cdot x = o(x^2) \quad \text{при } x \rightarrow 0.$$

2. Пусть система уравнений $A\vec{x} = 0$, где A — квадратная матрица, имеет единственное решение $\vec{x} = 0$. Докажите, что система уравнений $A\vec{x} = \vec{b}$ имеет решение при любой правой части.

3. Найдите координаты вектора $\vec{x} (2; 2; -1)$ в базисе $\vec{e}_1 (1; 0; 2)$, $\vec{e}_2 (-1; 2; 1)$, $\vec{e}_3 (-1; 4; 0)$. Сделайте проверку.

4. Найдите собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

соответствующий большему собственному значению, имеющий длину $\sqrt{136}$ и составляющий тупой угол с осью Ox .

5. При каких значениях параметра a однородная система линейных уравнений, заданных матрицей

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a-3 \end{pmatrix},$$

имеет ненулевое решение?

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$ и $y = 2x - x^2$.

7. Изобразите на плоскости область интегрирования и поменяйте порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-1}^0 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_{x^3}^1 f(x, y) dy.$$

8. Найдите наименьшее значение функции $z = x^2 + y^2 - 6y$ в области, определяемой неравенствами $x \geq -4$, $y \leq 4$, $y - x \geq 4$.

9. При каких значениях параметра a уравнение $4xyy'' + 2y'\sqrt{x} = -6$ имеет решение вида $y = a\sqrt{x}$?

10. Решите задачу Коши $y' + \frac{2y}{x} = \frac{2x+1}{x^2}$, $y(-2) = 0$. В ответе укажите положительное значение x , при котором $y = 0$.

Вариант 6

1. Докажите что если $f(x) = f(2) + k(x-2) + o(x-2)$ при $x \rightarrow 2$, то функция $f(x)$ имеет производную при $x = 2$.

2. Докажите, что если \vec{v} — собственный вектор квадратной матрицы A , соответствующий собственному значению $\lambda = 3$, и существует обратная матрица, то \vec{v} является собственным вектором матрицы A^{-1} . Какому собственному значению обратной матрицы он соответствует?

3. Найдите координаты вектора $\vec{x}(4; 1; 3)$ в базисе $\vec{e}_1(2; 0; 1)$, $\vec{e}_2(1; 1; 2)$, $\vec{e}_3(2; 1; 3)$. Сделайте проверку.

4. Найдите собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

соответствующий большему собственному значению, имеющий длину $\sqrt{54}$ и составляющий тупой угол с осью Oz .

5. При каких значениях параметра a однородная система линейных уравнений, заданных матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 2+a & 2 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

имеет ненулевое решение?

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 2x^2 - 4x + 3$ и $y = 3 + 4x$.

7. Изобразите на плоскости область интегрирования и поменяйте порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-1}^{-y} f(x, y) dx.$$

8. Найдите наибольшее значение функции $z = x - y^2 + 4y$ в области, определяемой неравенствами $x \leq 3$, $y \geq 0$, $y - x \leq 0$.

9. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$ имеет решение вида $y = x^a$?

10. Решите задачу Коши $y' + xy = 2x$, $y(0) = 3$. В ответе укажите значение предела $\lim_{x \rightarrow \infty} y$.

Вариант 7

1. Сформулируйте достаточное условие монотонного убывания функции $f(x)$. Докажите его, используя теорему Лагранжа для дифференцируемых функций.

2. Пусть вектор \vec{v} — собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению $\lambda = \lambda_0$. Докажите, что \vec{v} — собственный вектор матрицы $B = A^2 + 2A$. Какому собственному значению он соответствует?

3. Найдите координаты вектора $\vec{x}(2; 2; 3)$ в базисе $\vec{e}_1(1; 2; 3)$, $\vec{e}_2(2; 1; 2)$, $\vec{e}_3(3; 2; 4)$. Сделайте проверку.

4. Найдите собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

соответствующий большему собственному значению, имеющий длину $\sqrt{264}$ и составляющий тупой угол с осью Oy .

5. При каких значениях параметра a однородная система линейных уравнений, заданных матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 2+a & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -3 \end{pmatrix},$$

имеет ненулевое решение?

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2 - 2x + 2$ и $y = 2 + 4x - x^2$.

7. Изобразите на плоскости область интегрирования и поменяйте порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f(x, y) dx.$$

8. Найдите наименьшее значение функции $z = x^2 - 4x + y^2$ в области, определяемой неравенствами $x \leq 3$, $y \geq -3$, $y - x \leq -3$.

9. При каких значениях параметра k уравнение $y'' + 3y' - 6y = 8e^{2x}$ имеет решение вида $y = ke^{2x}$?

10. Решите задачу Коши $xy' - 2y = 2x^2$, $y(1) = -6$. В ответе укажите положительное значение x , при котором $y = 0$.

Вариант 8

1. Докажите, что если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то существует производная функции в этой точке.

2. Докажите, что если \vec{v}_1 и \vec{v}_2 являются собственными векторами матрицы A , соответствующими собственному значению $\lambda = \lambda_0$, то их разность является собственным вектором матрицы A , соответствующим тому же собственному значению.

3. Найдите координаты вектора $\vec{x}(4; 3; -2)$ в базисе $\vec{e}_1(1; 1; 2)$, $\vec{e}_2(-3; 0; -2)$, $\vec{e}_3(1; 2; -1)$. Сделайте проверку.

4. Найдите собственный вектор матрицы

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 15 & 6 & 2 \end{pmatrix},$$

соответствующий большему собственному значению, имеющий длину $\sqrt{99}$ и составляющий тупой угол с осью Ox .

5. При каких значениях параметра a однородная система линейных уравнений, заданных матрицей

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 1 \\ -2 & a+6 & 5 \end{pmatrix},$$

имеет ненулевое решение?

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = 3x - x^2$ и $y = -x$.

7. Изобразите на плоскости область интегрирования и поменяйте порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy + \int_4^6 dx \int_0^{6-x} f(x, y) dy.$$

8. Найдите наименьшее значение функции $z = x^2 + 2x - y$ в области, определяемой неравенствами $x \leq 0$, $y \geq 0$, $y - x \leq 2$.

9. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$ имеет решение вида $y = x^a$?

10. Решите задачу Коши $y' + x^2 y = 2xe^{-x^3/3}$, $y(0) = -9$. В ответе укажите положительное значение x , при котором $y = 0$.

Ответы к главе 9

Контрольная работа 1

Вариант 1

1. $\frac{4}{3}$. 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 3. $a=2$.
4. $X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 12 & -16 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$. 5. $-\begin{vmatrix} -5 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 80$.
6. $(3; -3; -1)$ (пересечение $(1; -0,5; -0,5)$). 7. $a=3$.

Вариант 2

1. $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{1}{15}$. 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right)$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
3. $a=12$. 4. $X = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 6 & 3 \\ -9 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.
5. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8$. 6. $(1; 0; -1)$ (пересечение $(1,5; -0,5; 0)$). 7. $a=4$.

Вариант 3

1. $\frac{2}{3}$. 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 3. $a=3$.
4. $X = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. 5. $-\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -16$.
6. $(0; -3; -2)$ (пересечение $(0,5; -1; -0,5)$). 7. $a=3$.

Вариант 4

1. $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{7}{8}$. 2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right)$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. $a = -3$. 4. $X = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 4 & -4 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. 5. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24$.
6. $(-2; -3; -2)$ (пересечение $(-1,5; -1,5; -0,5)$). 7. $a = 2$.

Вариант 5

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 110 \\ 0 \\ -40 \\ 1 \end{pmatrix}$. 2. a — любое число. 3. $a = 2$.
4. $X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}$. 5. $\frac{1}{5\sqrt{2}}$. 6. $a = 2$. 7. 80.

Вариант 6

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 35 \\ 0 \\ -17 \\ 1 \end{pmatrix}$. 2. $a \neq -6$. 3. $a = 12$.
4. $X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. 5. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. 6. $a = 4$. 7. -24 .

Вариант 7

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -20 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 13 \\ 0 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$. 2. $a = 2$. 3. $a = 3$.
4. $X = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. 5. $\frac{1}{\sqrt{10}}$. 6. $a = -3$. 7. 8.

Вариант 8

1. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 22 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -68 \\ 0 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$. 2. $a \neq 5$. 3. $a = -3$.
4. $X = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. 5. $\frac{1}{\sqrt{17}}$. 6. $a = -1$. 7. -24 .

Контрольная работа 2**Вариант 1**

1. $f(0) = 1$. 2. $x' = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$, $y' = \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}$, $y = -\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$.

3. $y = x + 3$. 4. $y' = 2 + \frac{16}{(x+5)^3}$, $x_{\max} = -7$, $y(-7) = -13$, $y'' = -\frac{48}{(x+5)^4}$.
 5. 1,03. 6. 2. 7. $-\frac{1}{3}(2x+1)\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3x + C$.

Вариант 2

1. $f(0) = -1$. 2. $x' = \frac{-1-2\ln t}{t^3}$, $y' = \frac{-1-2\ln t}{t^2}$, $y = 1 \cdot (x-1) + 3$.
 3. $y = 4x - 7$. 4. $y' = -4 - \frac{4}{(x-2)^5}$, $x_{\min} = 1$, $y(1) = -2$, $y'' = \frac{20}{(x-2)^6}$.
 5. 1,985. 6. 9. 7. $\frac{1}{9}e^{3x}(6x+13) + C$.

Вариант 3

1. $f(0) = 2$. 2. $x' = -\frac{1}{t^2}$, $y' = \frac{1}{t^2}$, $y = -1(x-0) + 2$.
 3. $y = -\frac{1}{3}(x-1) + 1$, $y(2) = 2$, $y'' = \frac{324}{(x+1)^5}$.
 4. $y' = 1 - \frac{81}{(x+1)^4}$, $x_{\max} = -4$, $y(-4) = -6$; $x_{\min} = 2$. 5. 0,98. 6. 2.
 7. $\frac{1}{2}(3x-1)\sin 2x + \frac{3}{4}\cos 2x + C$.

Вариант 4

1. $f(0) = -2$. 2. $x' = -\frac{1}{(t+1)^2}$, $y' = \frac{2t}{(t+1)^3}$, $y = -2(x-2) + 1$.
 3. $y = -8(x-2) + 1$. 4. $y' = \frac{5}{(x-1)^6}$, $x_{\max} = 2$, $y(2) = -7$, $x_{\min} = 0$,
 $y(0) = 5$, $y'' = -\frac{30}{(x-1)^7}$. 5. 1,06. 6. 4. 7. $(x+0,5)e^{2x} + C$.

Вариант 5

1. $x = 2$ — точка минимума, $x = 4$ — точка максимума.
 2. $y = -2,5x + 13$, $(x_0; y_0) = (4; 3)$. 3. $-\frac{1}{4}x^4 = -\frac{1}{64}$. 4. $y = x$, $y' = \frac{x^3-8}{x^3}$.
 5. $f'(-1)f'(1) = -4$. 6. $t = 2 - x^2$, $\frac{1}{2} \int_1^5 t^5 dt = \frac{63}{12}$.
 7. $(x^2 + 3x)\ln x - \frac{1}{2}x^2 - 3x + C$.

Вариант 6

1. $x = -5$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума.
 2. $y = 3x + 9$, $(x_0; y_0) = (-1; 6)$. 3. $2x^2 = 0,5$.
 4. $y = x$, $y' = \frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}$. 5. $f'(2)f'(1) = 12 \cdot 3 = 36$.
 6. $t = 25 - x^2$, $\frac{1}{2} \int_9^{16} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 1$. 7. $-\frac{1}{3}x \cos(3x+2) + \frac{1}{9} \sin(3x+2) + C$.

Вариант 7

1. $x = -2$ — точка минимума, $x = 3$ — точка максимума.
 2. $y = -x + 2$, $(x_0, y_0) = (5, -3)$. 3. $2x^6 = \frac{1}{32}$. 4. $y = x$, $y' = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$.
 5. $f'(2)f'(1) = 11 \cdot 5 = 55$. 6. $t = \sqrt{2x + 1}$, $\int_1^3 \frac{dt}{1+t} = \ln 2$.
 7. $\frac{1}{2}xe^{2x+1} - \frac{1}{4}e^{2x+1} + C$.

Вариант 8

1. $x = -2$ — точка максимума, $x = 1$ — точка минимума.
 2. $y = -6x - 22$, $(x_0, y_0) = (-4; 2)$.
 3. $2x^4 = \frac{1}{8}$. 4. $y = x - 3$, $y' = \frac{x^4 + 4x^3}{(x+1)^4}$. 5. $f'(-1)f'(1) = -7$.
 6. $t = \sqrt{x^2 - 1}$, $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{3}$. 7. $\frac{1}{2}(x+1)\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$.

Зачетная контрольная работа**Вариант 1**

1. $\{2; -1; -2\}$. 2. $\lambda = 4$, $\lambda = 2$: $t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. 3. 2. 4. $-\frac{4}{3}$.
 5. $y = 3x + 1$.
 6. $y' = 2 + \frac{16}{(x+5)^3}$, $x_{\max} = -7$, $y(-7) = -13$, $y'' = -\frac{48}{(x+5)^4}$. 7. 1,03.

Вариант 2

1. $\{-1, -3, 5\}$. 2. $\lambda = 5$, $\lambda = 1$: $t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 3. 4. 4. $-\frac{9}{2}$.
 5. $y = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$. 6. $y' = 1 - \frac{81}{(x+1)^4}$, $x_{\max} = -4$, $y(-4) = -6$, $x_{\min} = 2$,
 $y(2) = 2$, $y'' = \frac{324}{(x+1)^5}$. 7. 1,985.

Вариант 3

1. $(-1, 4, 1)$. 2. $\lambda = 3$, $\lambda = 2$: $t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 3. $\frac{1}{4}$. 4. $\frac{2}{3}$.
 5. $y = 3x - 2$. 6. $y' = -4 - \frac{4}{(x-2)^5}$, $x_{\min} = 1$, $y(1) = -2$, $y'' = \frac{20}{(x-2)^6}$.
 7. 0,98.

Вариант 4

1. $\{2; -1; 3\}$. 2. $\lambda = 2, \lambda = 3: t_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. 3. $-\frac{1}{7}$. 4. -7 .
 5. $y = \frac{1}{2}x + 1$. 6. $y' = \frac{5}{(x-1)^6} - 5, x_{\max} = 2, y(2) = -7, x_{\min} = 0, y(0) = 5,$
 $y'' = -\frac{30}{(x-1)^7}$. 7. 1,06.

Вариант 5

1. $x = -1, y = 3, z = 2$.
 2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -14 \\ 0 & 2 & 3 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -14 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix};$
 $c(-2; -5; 0; 1)$. 3. $\lambda = 5, (1; -3), \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$. 4. $-\frac{2}{7}$. 5. $x = -\frac{1}{3}$.
 6. $y = x + 4, y' = \frac{x^2(x-6)}{(x-2)^3}$. 7. $\frac{1}{9}e^{3x}(6x+13) + \frac{5}{9}$.

Вариант 6

1. $x = 1, y = 5, z = 2$.
 2. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 10 & 6 & -12 \\ 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 10 & 6 & -12 \\ 0 & 11 & 6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow$
 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \end{pmatrix}; c(-3; 0; 2; 1)$.
 3. $\lambda = 4, (3; -2), \cos \varphi = \frac{3}{\sqrt{13}}$. 4. $-\frac{4}{9}$. 5. $x = \frac{1}{3}$. 6. $y' = \frac{8x}{(x+4)^3}$.
 7. $\frac{1}{3}(2x+3)\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + \frac{7}{9}$.

Вариант 7

1. $x = 3, y = 2, z = 1$.
 2. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \\ 1 & 14 & 8 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 16 & 8 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix};$
 $c(-1; -\frac{1}{2}; 1; 0)$. 3. $\lambda = -3, (5; -4), \cos \varphi = \frac{4}{\sqrt{41}}$. 4. $\frac{4}{3}$. 5. $x = 1$.
 6. $y = -\frac{1}{3}x, y' = -\frac{x^3+27}{3x^3}$. 7. $-\frac{1}{5}\ln(e-x^5) + \frac{1}{5}$.

Вариант 8

1. $x = 1, y = 1, z = 1$.

$$2. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 1 & -8 \\ 0 & 8 & 1 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 1 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{pmatrix}; c(-3; 0; 8; 1).$$

3. $\lambda = -2$, $(4; -3)$, $\cos \varphi = \frac{4}{5}$. 4. 3. 5. $x = 1$. 6. $y = 4x - 1$,

$$y' = \frac{4x^2 + 8x + 3}{(x+1)^2} = \frac{(2x+3)(2x+1)}{(x+1)^2}. \quad 7. -\frac{1}{3} \exp(8 - x^3) + \frac{4}{3}.$$

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

1. $k = a \cdot f'(x_0)$. 3. $x_1 = 6 - 5t$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$, $t = 1$, $(1; 0; 1)$.

4. $X = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. 5. $a = 2$, $\lambda = 3$. 6. $y = 3x - 2$.

7. $9 \left(F\left(\frac{2}{9}\right) - F\left(\frac{1}{9}\right) \right)$. 8. $(2; 1; 3)$ — точка максимума, $(-2; 1; 3)$ — нет экстремума. 9. $z_{\min} = z(-0,5; 3,5) = -8,5$. 10. 4.

Вариант 2

3. $x_1 = 2t + 3$, $x_2 = t$, $x_3 = 0$, $t = -2$, $(-1; -2; 0)$.

4. $X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. 5. $a = 3$, $\lambda = 3$. 6. $y = -x + 2$.

7. $\frac{F(12) - F(4)}{4}$. 8. $(-3; 1; 2)$ — точка минимума, $(3; 1; 2)$ — нет экстремума. 9. $z_{\max} = z(3; 2) = 7$. 10. 10.

Вариант 3

1. $2f'_x(1; 2) + 3f'_y(1; 2)$. 3. $x_1 = 3t - 10$, $x_2 = t$, $x_3 = 0$, $t = 3$, $(-1; 3; 0)$.

4. $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. 5. $a = 3$, $\lambda = 5$.

6. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. 7. $\frac{F(4\sqrt{3}) - F(2\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$.

8. $(1; -2; 7)$ — точка минимума, $(-1; -2; 7)$ — нет экстремума.

9. $z_{\min} = z(0; 2) = -2$. 10. 4.

Вариант 4

1. $\sqrt{13}$. 3. $x_1 = 2t + 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$, $t = -2$, $(1; 0; -2)$.

4. $X = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. 5. $a=4, \lambda=2$. 6. $y=3x+1$.
 7. $\sqrt{2} \left(F\left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \right)$. 8. $(-2; 0; 1)$ — точка максимума, $(2; 0; 1)$ — нет экстремума. 9. $z_{\min} = z(2,5; -0,5) = -3,5$. 10. 10.

Вариант 5

3. $(1; -3; 2)$. 4. $\lambda = -2, \lambda = 1, \lambda = 4, t(3; 4; 3); (-6; -8; -6)$.
 5. $a=5, -3a+15=0$.
 6. $\frac{1}{3}$. 7. $\int_0^1 dy \int_{y-1}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx$. 8. $z_{\min} = z(-0,5; 3,5) = -8,5$.
 9. $a^2 - a - 6 = 0, a = 3, a = -2$. 10. $y = \frac{C}{x^2}, C' = 2x + 1, y = \frac{x^2 + x - 2}{x^2}, x = 1$.

Вариант 6

3. $\vec{x} = 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$. 4. $\lambda = 1, \lambda = 1, \lambda = 5, t(1; 1; 2); (-3; -3; -6)$.
 5. $a=3, 6a-18=0$. 6. $\frac{64}{3}$. 7. $\int_{-1}^0 dx \int_{x^3}^{-x} f(x, y) dy$.
 8. $z_{\max} = z(3; 2) = 7$. 9. $a^2 + 5a - 6 = 0, a = 1, a = -6$.
 10. $y = Ce^{-\frac{x^2}{2}}, C' = 2xe^{\frac{x^2}{2}}, y = e^{-\frac{x^2}{2}} + 2, \lim_{x \rightarrow \infty} y = 2$.

Вариант 7

3. $\vec{x} = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 - \vec{e}_3$. 4. $\lambda = -2, \lambda = 1, \lambda = 6, t(5; 4; 5); (-10; -8; -10)$.
 5. $a = -4, 5a + 20 = 0$. 6. 9. 7. $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{2-x^2} f(x, y) dy$.
 8. $z_{\min} = z(2,5; -0,5) = -3,5$. 9. $(4+6-6)k = 8, k = 2$.
 10. $y = Cx^2, C' = \frac{2}{x}, y = x^2(\ln x^2 - 6), x = e^3$.

Вариант 8

3. $\vec{x} = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3$. 4. $\lambda = -1, \lambda = 2, \lambda = 9, t(1; 1; 3); (-3; -3; -9)$.
 5. $a = 2$. 6. $\frac{32}{3}$. 7. $\int_0^2 dy \int_{y^2}^{6-y} f(x, y) dx$. 8. $z_{\min} = z(-0,5; 1,5) = -2,25$.
 9. $a^2 + a - 2 = 0, a = 1, a = -2$. 10. $y = Ce^{-x^3/3}, C' = 2x, y = (x^2 - 9)e^{-x^3/3}, x = 3$.

Библиографический список

1. Болгов В. А., Демидович Б. П., Ефимов А. В. и др. Сборник задач по математике. М.: Наука, 1986.
2. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 1997.
3. Зими́на О. В. и др. Высшая математика. Решебник. М., 2001.
4. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. СПб.: Лань, 2007.
5. Самовол В. С. Основы математического анализа для политологов. Ч. I, II. Учебное пособие. М.: ГУ-ВШЭ, 2001.
6. Сборник задач по высшей математике для экономистов: учебное пособие / Под ред. В. И. Ермакова. М.: ИНФРА-М, 2005.
7. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1—3 / Под ред. Л. Д. Кудрявцева. М.: Физматлит, 2003.
8. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. Ижевск: РХД, 2000.
9. Шипачев В. С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие для вузов. М.: Высшая школа, 2001.

Оглавление

Предисловие	3
-----------------------	---

I. Алгебра

Глава 1. Векторная алгебра и начала аналитической геометрии	4
Справочный материал и примеры решения задач	4
§ 1. Операции над векторами	8
§ 2. Прямые и плоскости в пространстве	11
§ 3. Линейные векторные пространства	16
Ответы к главе 1	19
Глава 2. Матрицы и определители матриц. Системы линейных уравнений	22
§ 1. Операции над матрицами	28
§ 2. Определитель и ранг матрицы	30
§ 3. Обратная матрица. Матричные уравнения	33
§ 4. Системы линейных уравнений	34
§ 5. Собственные значения и собственные векторы матрицы	39
Ответы к главе 2	42

II. Математический анализ функций одной переменной

Глава 3. Вычисление пределов, производная функции, исследование функций	48
Справочный материал и примеры решения задач	48
§ 1. Предел последовательности, предел функции	53
§ 2. Производная функции, заданной явно	57
§ 3. Производная функций, заданных параметрически или неявно	61
§ 4. Дифференциал функции и приближенные вычисления .	62
§ 5. Формула Тейлора	63
§ 6. Вычисление пределов с помощью производной	65
§ 7. Исследование функций и построение графиков	66
Ответы к главе 3	71
Глава 4. Интеграл	81

§ 1. Неопределенный интеграл	83
§ 2. Определенный интеграл	85
§ 3. Несобственный интеграл	89
Ответы к главе 4	91
Глава 5. Обыкновенные дифференциальные уравнения	94
Справочный материал и примеры решения задач	94
§ 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения	98
Ответы к главе 5	101

III. Функции нескольких переменных

Глава 6. Дифференциальное исчисление функций многих переменных	103
Справочный материал и примеры решения задач	103
§ 1. Область определения, линии уровня функции нескольких переменных	104
§ 2. Частные производные. Производная сложной функции. Градиент. Производная по направлению	105
§ 3. Первый и второй дифференциал. Касательная плоскость	108
§ 4. Приближенные вычисления. Формула Тейлора	111
Ответы к главе 6	113
Глава 7. Экстремум функций нескольких переменных	117
Справочный материал и примеры решения задач	117
§ 1. Локальный экстремум функций нескольких переменных	121
§ 2. Локальный условный экстремум функций нескольких переменных	123
§ 3. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функций нескольких переменных	126
Ответы к главе 7	128
Глава 8. Двойной интеграл	131
Справочный материал и примеры решения задач	131
§ 1. Двойной интеграл	134
Ответы к главе 8	137
Глава 9. Варианты контрольных работ	138
Ответы к главе 9	165
Библиографический список	172

*Логвенков Сергей Алексеевич
Мышкис Петр Анатольевич
Самовол Владимир Симхович*

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
учебное пособие для студентов социально-управленческих специальностей

Подписано в печать 15.11.2014 г. Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 11. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-74-83

Отпечатано в ООО «Принт Сервис Групп».
105187, Москва, ул. Борисовская, д. 14.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-72-85.

E-mail: biblio@mcme.ru
