

ВОПРОСЫ

к коллоквиуму по теме «Неопределённый и определённый интеграл»

Учебный год 2015–2016, Модуль 3, ПМ

1. Дайте определение первообразной и неопределенного интеграла. Расскажите об основных свойствах интеграла. Приведите таблицы интегралов (основную и дополнительную).

2. Расскажите о методе подстановки для неопределённых интегралов. С его помощью вычислите

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad \int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

3. Запишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла. Вычислите $\int e^{2x} \cos 3x dx$.

4. Перечислите элементарные рациональные функции. Сформулируйте теорему о представлении рациональной функции в виде суммы элементарных. Запишите такое представление с неопределенными коэффициентами для функции

$$R(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 + x - 3}{x(x+1)^3(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)^2}.$$

5. Выведите рекуррентное соотношение для

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \geq 1.$$

Вычислите $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}$.

6. Расскажите об интегрировании элементарных рациональных функций. Вычислите

$$\int \frac{(x-1) dx}{x^2 + 2x + 2}.$$

7. Расскажите, как сводятся к интегрированию рациональных функций интегралы

$$\int R_1(a^x) dx, \quad \int R_2\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right) dx,$$

где R_1, R_2 – рациональные функции от соответствующих переменных, Вычислите

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x}, \quad \int \frac{\sqrt{x-1}}{x+2} dx.$$

8. Расскажите о тригонометрических интегралах

$$\int R(\cos x, \sin x) dx$$

и об их сведении к интегралам от рациональных функций при помощи двух различных замен переменной через тангенс. Вычислите

$$\int \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x} dx.$$

9. Расскажите о вычислении интегралов

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$$

при помощи подстановок Эйлера.

10. Дайте определение функции интегрируемой на отрезке и её определенного интеграла. В чём геометрический смысл определенного интеграла? Приведите пример ограниченной неинтегрируемой функции.

11. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции. Приведите пример. Сформулируйте достаточные признаки интегрируемости функций. Приведите примеры.

12. Расскажите о свойствах определенного интеграла: Линейность, аддитивность, интегрирование неравенств, оценка интеграла, интегрирование модуля, теорема о среднем.

13. Сформулируйте критерий интегрируемости. Выведите из него достаточные признаки интегрируемости функций и неинтегрируемость функции Дирихле.

14. Что такое интеграл с переменным верхним пределом? Сформулируйте теоремы о непрерывности и о дифференцировании такого интеграла. Напишите формулу Ньютона–Лейбница. Вычислите

$$\frac{d}{dx} \int_{x^2}^{x^4} \frac{\sin t}{t} dt.$$

15. Расскажите о методе подстановки в определенном интеграле. С его помощью вычислите

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad \int_1^2 \frac{x dx}{x^4 + 1}.$$

16. Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла. Вычислите

$$\int_1^e x \ln^2 x dx.$$

17. Дайте определение гладкой кривой на плоскости (заданной явно или параметрически) и её длины. Приведите формулы для вычисления длины кривой. Найдите

длину дуги параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

18. Приведите формулу для вычисления массы отрезка с заданным законом распределения плотности и формулу для работы переменной силы на прямолинейном пути. Расскажите о вычислении объема тела с известным законом изменения поперечного сечения. Получите формулу для объема шара, используя формулу для площади круга.

19. Напишите формулы для объема тела вращения вокруг осей OX и OY . Вычислите объем тела, полученного вращением фигуры $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \sin^2 x$ вокруг оси OX .

20. Расскажите о методах прямоугольников и трапеций для приближенного вычисления определенных интегралов. Приведите оценки погрешности.