# Методические указания по выполнению лабораторной работы №4 по курсу «Математические и имитационное моделирование»

## «Интерполяционный многочлен Ньютона»

Теоретические введение

Интерполяция – задача построения функции по заданным точкам. Данная задача возникает при исследовании модели, если ее возможно снимать характеристики моделей только для некоторых точек из пространства входных параметров. Если же нам необходимо исследовать функцию, например, получить значения в промежуточных точках, тогда необходимо пользоваться интерполяцией. Один из способов интерполяции – интерполяционный многочлен Ньютона. Применяется он в том случае, когда расстояние между узлами интерполяции одинаковое (например, с шагом $h$).

Интерполяционный многочлен Ньютона бывает двух видов: прямой и обратный.

Формула для вычисления прямого многочлена:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (1)$$

$$q = \frac{x - x_0}{h},\ y_i = f_i$$

$$\Delta^m y_k = \Delta^{m-1} y_{k+1} - \Delta^{m-1} y_k,\ k = \overline{0, n-m}.$$

Формула для вычисления обратного многочлена:

$$P_n(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{q(q+1)\ldots(q+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (2)$$

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

Рассмотрим получение многочлена Ньютона на практическом примере. Пусть дана таблица из пяти пар $x_i$,$y_i$. И нам требуется найти значение функции в точках $a$ и $b$. Табл. 1.

Табл. 1

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2.0 | $a$ = 1.92 |
| $y$ | 1.6416 | 2.3961 | 3.3536 | 4.5441 | 6.0000 | $b$ = 1.68 |

Т.е. $y_0$=1,6416, $y_1$=2,961, $y_2$=3.3536, $y_3$=4.5441, $y_4$=6.

Значение точки а будем искать по обратной формуле Ньютона, т.к. она дает наиболее точное приближение в конце интервала интерполяции; а точку b будем искать по прямой формуле, т.к. она дает наиболее точное приближение в начале интервала интерполяции.

Для получения значений конечных разностей Δ построим матрицу вида:

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.6 | 1.6416 | 0.7545 | 0.2030 | 0.0300 |
| 1 | 1.7 | 2.3961 | 0.9575 | 0.2330 | 0.0324 |
| 2 | 1.8 | 3.3536 | 1.1905 | 0.2654 | |
| 3 | 1.9 | 4.5441 | 1.4559 | | |
| 4 | 2.0 | 6.0000 | | | |

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $\Delta y_i$ | $\Delta^2 y_i$ | $\Delta^3 y_i$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.6 | $\boxed{1.6416}$ | $\boxed{0.7545}$ | $\boxed{0.2030}$ | $\boxed{0.0300}$ |
| 1 | 1.7 | 2.3961 | 0.9575 | 0.2330 | $\boxed{0.0324}$ |
| 2 | 1.8 | 3.3536 | 1.1905 | $\boxed{0.2654}$ | |
| 3 | 1.9 | 4.5441 | $\boxed{1.4559}$ | | |
| 4 | 2.0 | $\boxed{6.0000}$ | | | |

*Красными рамками помечены элементы, входящие в прямую формулу, зелеными – в обратную.*

В среде Mathlab для этого необходимо создать матрицу размера *n* х *n*, где *n* – количество интерполируемых точек. В первый столбец матрицы необходимо внести числа $y_i$. Например, введем в Mathlab такой массив:

```
-->A=[1.6416 0 0 0 0; 2.3961 0 0 0 0; 3.3536 0 0 0 0; 4.5441 0 0 0 0; 6 0 0 0 0]
 A  =

   1.6416   0.   0.   0.   0.
   2.3961   0.   0.   0.   0.
   3.3536   0.   0.   0.   0.
   4.5441   0.   0.   0.   0.
   6.       0.   0.   0.   0.
```

Далее произведем вычисление значений Δ. Например, чтобы получить значение в ячейке A(1,2), равное значению $\Delta^2{}_{y1}$ необходимо сложить вычесть элемент A(1,1) из элемента A(1,2). На Mathlab это операция имеет вид:

```
-->A(1,2)=A(2,1)-A(1,1)
```

Аналогично вычисляем значения для остальных ячеек массива A

```
-->A(2,2)=A(3,1)-A(2,1)
-->A(3,2)=A(4,1)-A(3,1)
…
-->A(2,4)=A(3,3)-A(2,3)
-->A(1,5)=A(2,4)-A(1,4) A  =

   1.6416   0.7545   0.203    0.03     0.0024
   2.3961   0.9575   0.233    0.0324   0.
   3.3536   1.1905   0.2654   0.       0.
   4.5441   1.4559   0.       0.       0.
   6.       0.       0.       0.       0.
```

Далее можно приступать к вычислению промежуточных значений интерполированной функции.

Точка *A*=1.92 лежит ближе к концу интервала интерполяции, поэтому воспользуемся обратной формулой Ньютона. Для нашего примера шаг интерполяции *h*=0.1. Вычислим значение $q=(x-x_0)/h$=(1.92-1.6)/0.1 (точка $x_0$ – это самая первая точка в ряду для интерполяции). Введем в MathLab переменную *q*:

-->q=(1.92-1.6)/0.1

Далее вычислим значение точки *A*=1.92 по формуле (2):

-->6 + q.*1.4559+q.*(q-1).*0.2654+q.*(q-1).*(q-2).*0.0324+ q.*(q-1).*(q-2).*(q-3).*0.0024

Вычислим точку B=1.68:

-->q=(1.92-2)/0.1

q =- 0.8

-->6 + q.*1.6416+q.*(q-1).*0.7545/2+q.*(q-1).*(q-2).*0.2030/6+ q.*(q-1).*(q-2).*(q-3).*0.03/24

ans = 5.112696

Вычислим значение точки *B*=1.68:

-->q=(1.68-1.6)/.1

q = 0.8

-->1.6416 + q.*0.7545+q.*(q-1).*0.2030/2+q.*(q-1).*(q-2).*0.03/6+ q.*(q-1).*(q-2).*(q-3).*0.003/24

ans =2.2298672

Построим графики для прямого и обратного многочленов Ньютона.

-->x=1.6:0.01:2; - введем множество точек графа по оси абсцисс

-->x0=1.6

-->xn=2

-->h=.1

Получим множество точек графика для прямого многочлена Ньютона

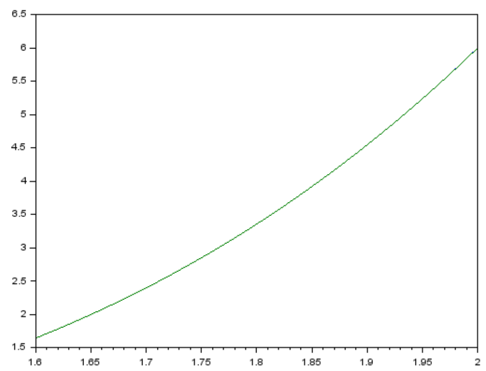
-->Y=1.6416 + (x-x0)./h.*0.7545+(x-x0)./h.*((x-x0)./h-1).*0.2030/2+(x-x0)./h.*((x-x0)./h-1).*((x-x0)./h-2).*0.03/6+ (x-x0)./h.*((x-x0)./h-1).*((x-x0)./h-2).*((x-x0)./h-3).*0.003/24;

Получим множество точек графика для обратного многочлена Ньютона:

-->Y2=6 + (x-xn)./h.*1.4559+(x-xn)./h.*((x-xn)./h+1).*0.2654/2+(x-xn)./h.*((x-xn)./h+1).*((x-xn)./h+2).*0.0324/6+ (x-xn)./h.*((x-xn)./h+1).*((x-xn)./h+2).*((x-xn)./h+3).*0.0024/24;

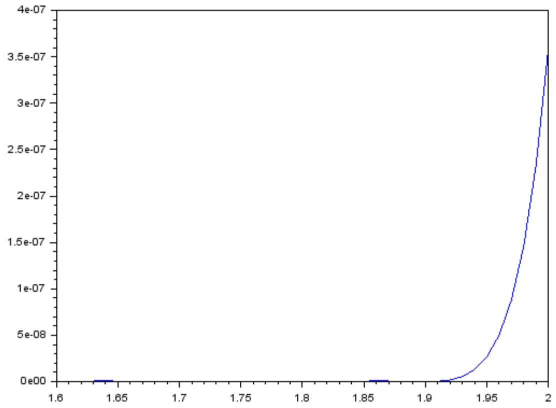
Выведем графики обоих многочленов:

-->plot(x,Y,x,Y2);




Как видно, полученные графики практически совпадают. Поэтому выведем дисперсию разницы между функциями Y и Y2:

-->plot(x,(Y-Y2).^2);




Как видно, отклонения минимальны.