

Стохастическая модель

Стохастическая модель – это модель, где учитываются случайные факторы.

Случайная функция $X(t)$ – это функция, сечение которой (т.е. если зафиксировать t), представляет собой обычную случайную величину с определенной плотностью вероятности.

Случайный процесс $X(t)$ – это функция, которая в любой момент времени t принимает значения, являющиеся случайной величиной (в случае Р-схемы t – дискретная величина).

Реализация случайного процесса $X(t)$: одна из возможных траекторий функции, описываемой $X(t)$.

Характеристики случайного процесса аналогичны числовым характеристикам случайной величины, только такие характеристики случайного процесса – это функции аргумента t :

- Математическое ожидание $m_x(t)$ – это «средняя функция», вокруг которой происходит разброс реализации $X(t)$. Функция $m_x(t)$ является неслучайной. Значение функции $m_x(t)$ является мат. ожиданием каждого сечения случайного процесса $X(t)$: $m_x(t) = M[X(t)]$ ($M[X] = \sum_i x_i P_i$ для дискретной с.в. и $M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)$ для непрерывной с.в.).
- Дисперсия $D_x(t)$. $D_x(t) = M[(m_x(t) - X(t))^2] = M[X(t)^2] - x[m_x(t)]^2$. Дисперсия с.п. – это неслучайная величина, дисперсии сечения с.п. $X(t)$ в момент времени t .
- Среднеквадратическое отклонение (СКО) $\sigma_x(t) = \sigma_x[X(t)] = \sqrt{D[X(t)]}$

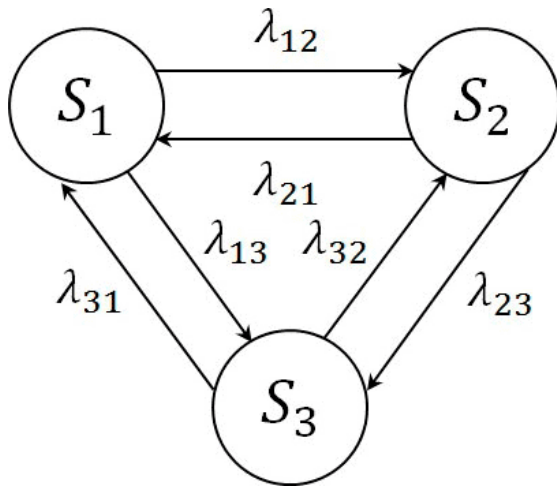
Цель исследования стохастической модели – нахождение характеристик объекта моделирования в стационарном состоянии (стационарные вероятности), т.е. состояние объекта, когда время стремится к бесконечности ($t \rightarrow \infty$).

Сети Маркова

Одним из примеров стохастической модели – являются так называемые сети Маркова.

А.А. Марков (1856 - 1922) – основоположник теории сетей Маркова, также оставил труды в области Теории вероятностей и случайных процессов, математическом анализе и теории чисел.

Модель Марковского процесса представляет собой граф, где узлы обозначают состояние моделируемого объекта, а дуги – вероятность перехода из одного состояния в другое.



S_k - состояние объекта моделирования

λ_{ij} - вероятность перехода из i -го состояния в j -ое

Марковские процессы делятся на два вида:

1. Дискретные цепи Маркова, где система меняет свое состояние в определенные такты времени (Р-схема)
2. Непрерывные цепи Маркова, где система меняет свое состояние в произвольный момент времени (q-схема)

Свойство марковости:

В Марковской сети вероятность события зависит только от текущего состояния сети, т.е.

$$P(X_{n+1}=i_{n+1} | X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_0=i_0) = P(X_{n+1}=i_{n+1} | X_n=i_n)$$

где

$\{X_n\}$ – пространство состояний цепи

i – номер шага

Тогда вероятность попасть из состояние i в состояние j за m шагов равно:

$$p_{ij}^{(m)} = P[X_{n-1} = j | X_n = i] \quad (1)$$

Выражение (1) можно переписать в виде рекуррентной формулы:

$$p_{ij}^{(m)} = \sum_k p_{ik}^{(m-1)} p_{kj}$$

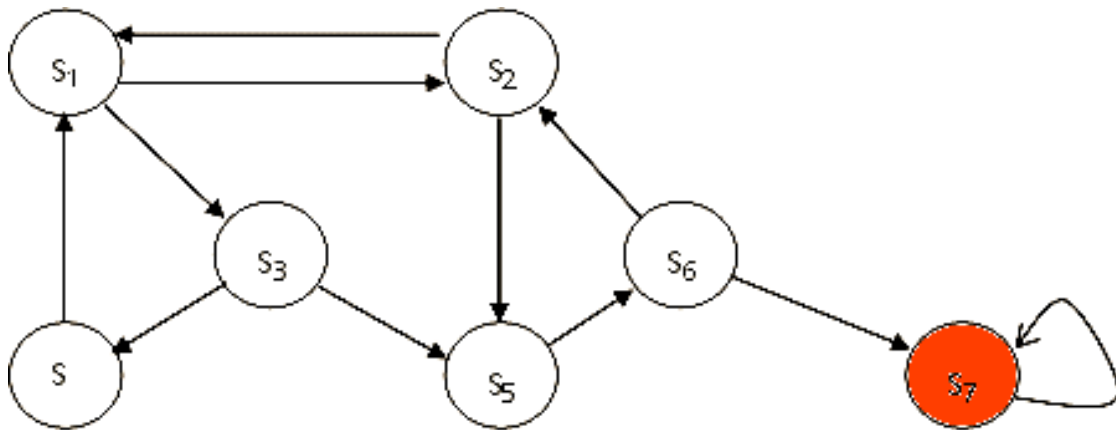
т.е. для того, чтобы попасть в состояние E_j , необходимо сначала за $m-1$ шагов попасть в множество состояние E_k , а затем уже из них перейти в состояние E_j .

Виды сетей Маркова

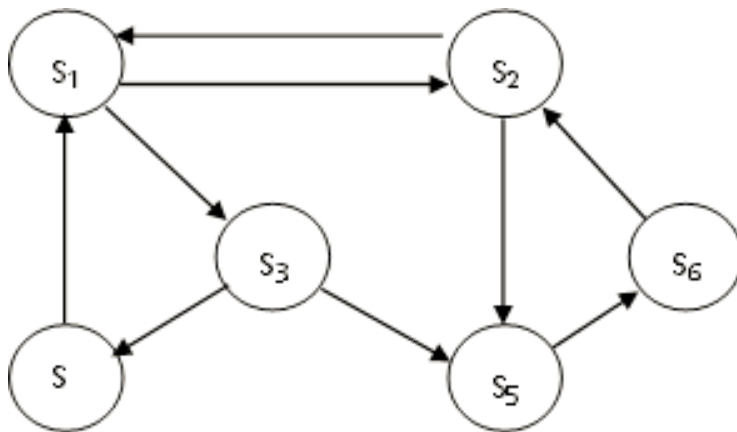
Цепи Маркова бывают разложимыми, неразложимыми, периодическими и эргодическими.

Разложимая цепь – содержит невозвратные (поглощающие) состояния (множества состояний). Из таких вершин не выходит ни одна дуга. В установившемся режиме

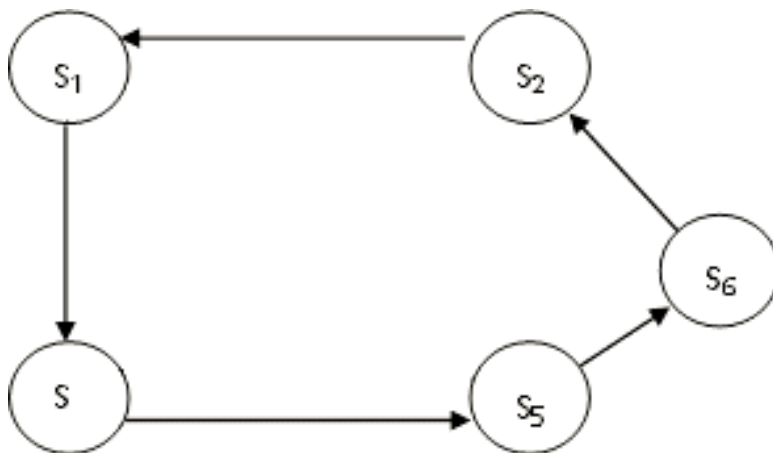
вероятность пребывания в таком состоянии равна 1. Необходимым условием того, что состояние i является поглощающим является: $p_{ii}=1$.



Неразложимая цепь – Не содержит поглощающих состояний или поглощающих подмножеств узлов. Такие цепи описываются сильно связным графом.



Периодической цепью называется такая цепь, последовательность смены состояний которой меняются периодически. В случае периодической цепи все состояний имеют один и тот же период.



Эргодической называется неразложимая и нециклическая марковская система. Для такой системы имеется возможность определить стационарные вероятности (т.е. вероятности событий при времени, стремящимся к бесконечности (или числе шагов моделирования,

стремящимся к бесконечности. Вероятности этих состояний не зависят от вероятностей системы в начальный момент.

Если цепь является неразложимой и непериодической (эргодической), то для нее существует предельное распределение вероятностей при $n \rightarrow \infty$, где n – число шагов моделирования. Т.е.

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j^{(n)}$$

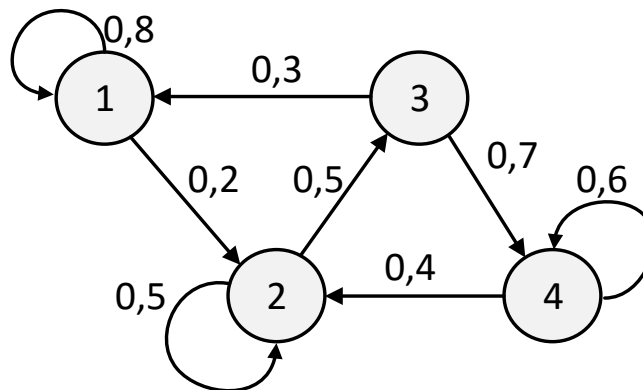
где j – номер состояния цепи Маркова.

π_j – вероятность того, что система находится в j -м состоянии

π_j на зависит от начального состояния, с которого начинается имитационное моделирование (финальные вероятности).

Содержание лабораторной работы

В данной лабораторной работе будет моделироваться дискретная эргодическая сеть Маркова (Р-схема).



	1	2	3	4
1	0,8	0,2		
2		0,5	0,5	
3	0,3			0,7
4		0,4		0,6

Матрица переходных вероятностей

$\pi^{(i)} = (1, 0, 0, 0)$ – вектор вероятностей состояний (показывает вероятность того, что система будет находиться в i -м состоянии). $\pi^{(i)}$ – это сечение случайного процесса.

Пошаговое моделирование

Моделирование представляет собой последовательность вычислений по формуле (шаг моделирования):

$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} * P$ (*), где n – номер шага моделирования.

Необязательно хранить все значения вектора π , можно иметь два вектора вероятностей – старый и новый, главное, после применения формулы переписать значение из нового в старое и далее можно совершить еще один шаг моделирования (снова вычислить новый вектор). Вычисления продолжаются до тех пор, пока среднеквадратичное отклонение между P и P' не будет меньше заданного значения ε : $(\|\pi^{(n-1)} - \pi^{(n)}\|) < \varepsilon$.

Аналитическое решение

Для нахождения вероятностей пребывания марковской цепи в определенных состояниях при $n \rightarrow \infty$ *(финальные вероятности) решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \pi_1 = P_{11}\pi_1 + P_{21}\pi_2 + \dots + P_{n1}\pi_n \\ \pi_2 = P_{12}\pi_1 + P_{22}\pi_2 + \dots + P_{n2}\pi_n \\ \dots \\ \pi_n = P_{1n}\pi_1 + P_{2n}\pi_2 + \dots + P_{nn}\pi_n \end{cases} \quad (1)$$

В матричном виде уравнение (1) будет иметь вид:

$$\pi = P^T * \pi. \quad (2)$$

Иначе (2) можно записать в виде:

$$(P^T - E) * \pi = 0, \quad (3),$$

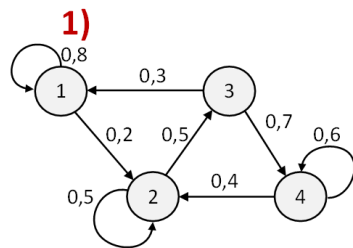
где E – единичная матрица.

Добавим к уравнениям (3) условие нормировки:

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_n = 1$$

т.е. заменим одну из строк матрицы на строку с нормировкой.

Решение системы линейных уравнений (3) дает предельные вероятности пребывания системы в определенных состояниях.



2)

$$P =$$

	1	2	3	4
1	0,8	0,2		
2		0,5	0,5	
3	0,3			0,7
4		0,4		0,6

3)

$$P^T =$$

	1	2	3	4
1	0,8		0,3	
2	0,2	0,5		0,4
3		0,5		
4			0,7	0,6

4)

$$(P^T - E) =$$

	1	2	3	4
1	0,8-1		0,3	
2	0,2	0,5-1		0,4
3		0,5	-1	
4			0,7	0,6-1

$$=$$

	1	2	3	4
1	-0,2		0,3	
2	0,2	-0,5		0,4
3		0,5	-1	
4			0,7	-0,4

5) Заменяем четвертую строку матрицы P^T на единичную строку

$$P =$$

	1	2	3	4
1	-0,2		0,3	
2	0,2	-0,5		0,4
3		0,5	-1	
4	1	1	1	1

6) Решим линейную систему уравнений $(P^T - E) = (0,0,\dots,0,1)^T$

	1	2	3	4
1	-0,2		0,3	
2	0,2	-0,5		0,4
3		0,5	-1	
4	1	1	1	1

$$=$$

0
0
0
1

Решение:
 $\pi = (0.24, 0.32, 0.16, 0.28)$

Реализация в Матлаб

Для начала необходимо задать матрицу переходных вероятностей:

```
>> p=[0.8 0.2 0 0; 0 0.5 0.5 0; 0.3 0 0 0.7; 0 0.4 0 0.6]
```

p =

```
0.8000 0.2000 0 0
0 0.5000 0.5000 0
0.3000 0 0 0.7000
0 0.4000 0 0.6000
```

Пошаговое решение

Далее создаём начальный вектор и на каждом шаге переписываем значение нового вектора в старый, вычисляем новый вектор как умножение старого вектора на матрицу переходных вероятностей, вычисляем среднеквадратическое отклонение между старым и новым векторами и записываем в массив. Так выполняем 10-15 шагов и выводим график среднеквадратического отклонения и конечный вектор.

```
>> vectorNew=[1 0 0 0]
```

vectorNew =

```
1 0 0 0
```

```
>> vectorOld=vectorNew
```

vectorOld =

```
1 0 0 0
```

```
>> vectorNew=vectorOld*p
```

vectorNew =

```
0.8000 0.2000 0 0
```

```
>> var = [0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
```

var =

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

```
>> var(1)=std(vectorNew-vectorOld)
```

var =

```
0.1633 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

```
>> vectorOld=vectorNew;
```

```
vectorNew=vectorOld*p;
```

```
var(2)=std(vectorNew-vectorOld)
```

```
var =
```

```
0.1633 0.1143 0 0 0 0 0 0 0 0
```

```
...
```

```
>> vectorOld=vectorNew;
```

```
vectorNew=vectorOld*p;
```

```
var(10)=std(vectorNew-vectorOld)
```

```
var =
```

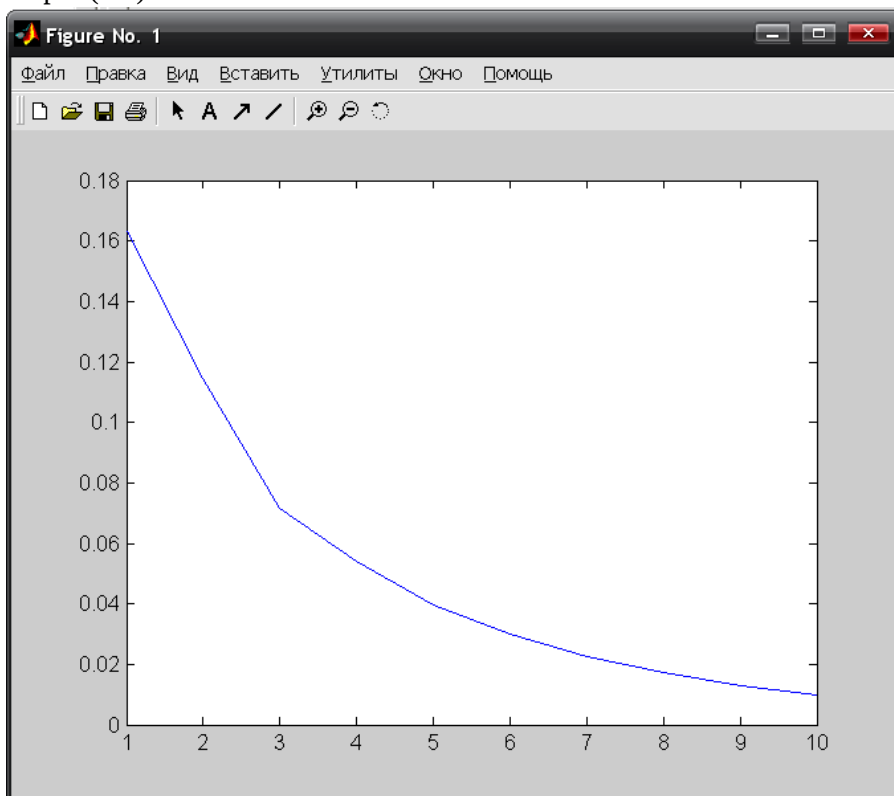
```
0.1633 0.1143 0.0717 0.0543 0.0397 0.0300 0.0227 0.0172 0.0130 0.0098
```

```
>> vectorNew
```

```
vectorNew =
```

```
0.2837 0.3105 0.1537 0.2521
```

```
>> plot(var)
```



Аналитическое решение

Для начала транспонируем матрицу переходных вероятностей, далее вычтем единичную матрицу такого же размера (в примере 4x4), потом щелкнув мышью в окне переменных, откроем редактор переменной и заменим одну из строк единицами. Вызовем `linsolve` для решения системы линейных уравнений.

```
>> pTrans=p'
```

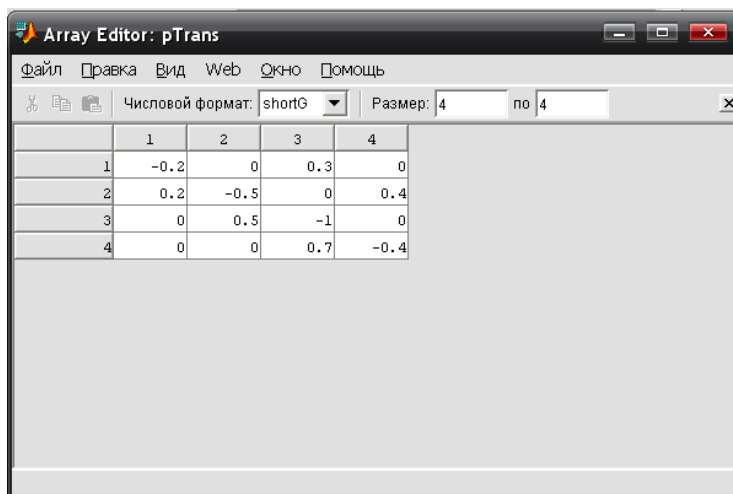
pTrans =

```
0.8000    0    0.3000    0
0.2000  0.5000    0    0.4000
0    0.5000    0    0
0    0    0.7000  0.6000
```

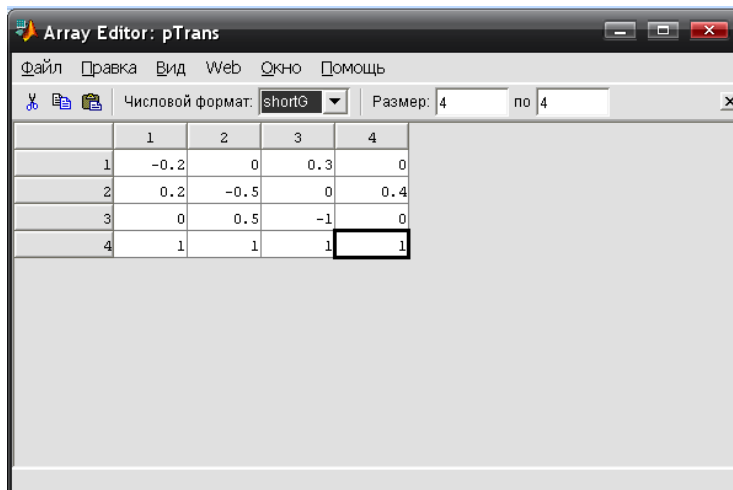
>> pTrans=pTrans-eye(4,4)

pTrans =

```
-0.2000    0    0.3000    0
0.2000 -0.5000    0    0.4000
0    0.5000 -1.0000    0
0    0    0.7000 -0.4000
```



	1	2	3	4
1	-0.2	0	0.3	0
2	0.2	-0.5	0	0.4
3	0	0.5	-1	0
4	0	0	0.7	-0.4



	1	2	3	4
1	-0.2	0	0.3	0
2	0.2	-0.5	0	0.4
3	0	0.5	-1	0
4	1	1	1	1

>> pTrans

pTrans =

```
-0.2000    0    0.3000    0
0.2000 -0.5000    0    0.4000
0    0.5000 -1.0000    0
1.0000  1.0000  1.0000  1.0000
```

```
>> vector = linsolve(pTrans, [0; 0; 0; 1])
```

```
vector =
```

```
0.2400
```

```
0.3200
```

```
0.1600
```

```
0.2800
```

Задание на лабораторную работу

Для выполнения лабораторной работы необходимо выполнить следующие пункты:

1. Придумать и зарисовать эргодическую марковскую цепь, содержащую 8 состояний;
2. Записать матрицу переходных вероятностей;
3. Промоделировать марковскую цепь пошагово в Матлаб с двумя разными начальными векторами вероятностей состояний и получить два конечных вектора (к которому привело моделирования), а также графики изменения среднеквадратического отклонения на каждом шагу моделирования для обоих начальных векторов;
4. Решить задачу аналитически, используя Матлаб, и получить вектор;
5. Проверить, что два вектора из пункта 3 и вектор из пункта 4 схожи между собой.