**Методические указания к выполнению лабораторной работы №3**
**«Непрерывные цепи Маркова».**

Непрерывные цепи Маркова моделируют объекты, у которых можно выделить множество состояний, в одном из которых объект может пребывать в один момент времени, а также можно выделить возможные переходы из состояния в состояние. Переход из состояния в состояние происходит в произвольный момент времени, эти моменты описываются с помощью потока событий. Мы будем рассматривать переходы, подчиняющиеся экспоненциальному закону распределения событий, где плотность вероятности временного промежутка между событиями описывается с помощью формулы $f(t)$-$\lambda$·exp(-$\lambda$), где $\lambda$ – интенсивность событий, т.е. сколько в среднем событий происходит в единицу времени.

Первым этапом выполнения ЛР является составление диаграммы состояний марковской системы. Для этого необходимо нарисовать ориентированный граф из 8-10 вершин. Причем, граф должен быть без петель, и из любой вершины должен присутствовать путь к любой другой вершины – такая марковская система будет эргодичной. Рассмотрим систему на рис. 1.

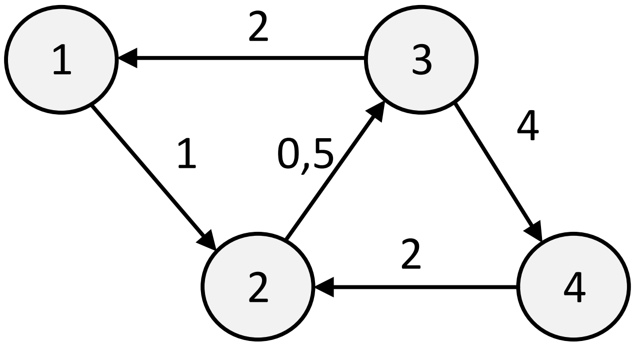


Рис. 1 Марковская система с непрерывным временем

Второй этап – составление матрицы интенсивностей переходов ($P$). Она представляет собой квадратную матрицу размерностью $n$ x $n$, где $n$ – число вершин в графе состояний марковской системы. Матрица составляется по следующему алгоритму. Выбирается одно состояние (номер этого состояния ($i$) будет соответствовать номеру строки в матрице). Затем следует определить сумму выходящих потоков, т.е. сумму весов всех выходящих из $i$-ой вершины дуг. Эта величина записывается в ячейку $P(i,i)$. Затем следует проанализировать все дуги, входящие $i$-ую в вершину. Если дуга входит в $i$-ую в вершину из вершины $j$, то вес дуги записывается в ячейку матрица $P(i,j)$. Для диаграммы состояний на рис. 1 соответствует матрица табл.1.

Табл. 1 Матрица переходных вероятностей для диаграмму на рис. 1

| | **$P_1$** | **$P_2$** | **$P_3$** | **$P_4$** |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 0 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | -0,5 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 0,5 | -6 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 4 | -2 |

Необходимо ввести условие нормировки, т.е. заменить одну из строчек матрица на единичную строку.

| | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | -1 | 0 | 2 | 0 |
| 2 | 1 | -0,5 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 0,5 | -6 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Далее необходимо ввести матрицу переходных вероятностей в систему MathLab:

```
>>P=[-1 0 2 0; 1 -0.5 0 2; 0 0.5 -6 0; 1 1 1 1]
```

После чего можно найти корни системы линейных алгебраических уравнений с помощью функции linsolve, первым аргументом которой является матрица переходных вероятностей, вторым столбец свободных членов, где все элементы равняются нулю, а элемента с номером той строки в матрице переходных вероятностей, которая является единичной. Например:

```
>>linsolve(P, [0; 0; 0; 1])
```

Решение такого уравнения будет являться стационарными вероятностями непрерывной марковской системы.

Следующее задание – решение системы дифференциальных уравнений, позволяющих наблюдать процесс изменения вероятностей пребывания системы в определенных состояниях во времени.

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\ldots \\ x_n' &= f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \qquad (1)$$

Решением системы (1) будет вектор функций:

$$x(t)=\begin{matrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \ldots \\ x_n(t) \end{matrix} \qquad (2)$$

Для решения дифференциальных уравнений и систем в SciLab предусмотрена функция:

y=ode(,y0,t0,t,f)

для которой, обязательными входными параметрами являются:

y0 – вектор начальных условий;

t0 – начальная точка интервала интегрирования;

t – координаты узлов сетки, в которых происходит поиск решения;

f – внешняя функция, определяющая правую часть уравнения или системы уравнений; y – вектор решений.

Для решения поставленной задачи необходимо задать систему функций, который будут входить в правую часть системы дифуров (1):

```
-->function dy=syst(t,y)
-->dy=zeros(4,1);
-->dy(1)=-y(1)+2.*y(3);
-->dy(2)=y(1)-0.5.*y(2)+2.*y(4);
-->dy(3)=0.5.*y(2)-6.*y(3);
-->dy(4)=4.*y(3)-2.*y(4);
-->endfunction
```

Составлять такую функцию можно на основе матрицы интенсивностей переходных потоков. Зададим начальные условия, $t_0$ и множество точек времени:

-->P0=[0;0;0;1];t0=0;t=0:0.1:6;

Решим систему дифференциальных уравнений с помощью функции ode и выведем графики функций:

y=ode(P0,t0,t,syst); plot(t,y);

В результате получим график (рис. 2):

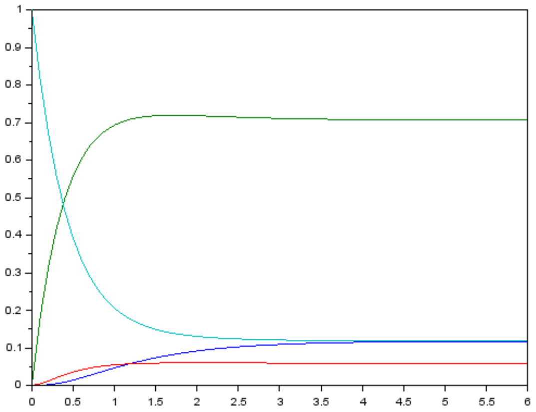


Рис. 2 Решение системы дифференциальных уравнений для непрерывной марковской цепи

Далее необходимо задать другое распределение начальных вероятностей и снова произвести вывод графика функций вероятностей нахождения системы в определенных состояниях.

-->P0=[0.25;0.25;0.25;0.25];

-->y=ode(P0,t0,t,syst); plot(t,y);

Получится график (рис. 3).

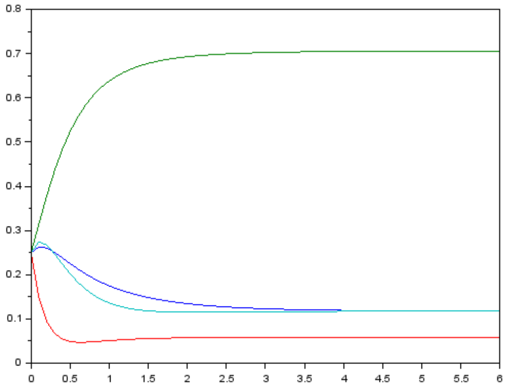


Рис. 2 Решение системы дифференциальных уравнений для непрерывной марковской цепи с другими начальными условиями

Проверить, совпадают ли стационарные вероятностей для аналитического решения (через систему линейных дифференциальных уравнений) и для решения дифференциального уравнения с различными начальными условиями.

Решение задачи в среде MathLab

Для решения задачи необходимо создать функцию наподобие этой:

```
function dy = myfun(t,y)
        dy = zeros(8,1);
        dy(1)=-0.5.*y(1)+0.2.*y(8);
        dy(2)=0.5.*y(1)-4.6.*y(2)+0.8.*y(7);
```

```
		dy(3)=0.6.*y(2)-1.*y(3)+3.*y(4);
		dy(4)=4.*y(2)-3.*y(4)+1.*y(5);
		dy(5)=-3.*y(5)+8.*y(8);
		dy(6)=2.*y(5)-6.4.*y(6);
		dy(7)=0.4.*y(6)-11.*y(7);
		dy(8)=1.*y(3)+5.*y(7)-3.2.*y(8);
	end
```

Затем ввести начальные условия y0, моменты времени, где производится решение дифференциального уравнения, решить уравнение и вывести график.

```
t=[1 0 0 0 0 0 0 0];
y0=[0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125 0.125];
[T,Y]=ode45(@myfun, t, y0);
plot(T,Y);
```