

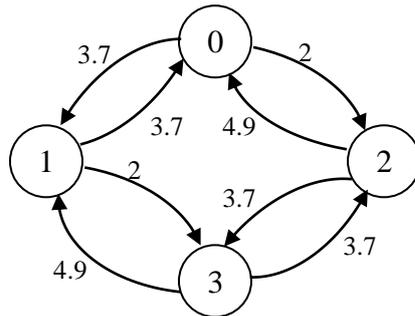
I. Задание для лабораторной работы.

| $\lambda_1$ | $\lambda_2$ | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $a_1$ | $a_2$ | $b$ |
|-------------|-------------|---------|---------|-------|-------|-----|
| 2           | 3,7         | 4,9     | 3,7     | 6     | 13    | 1,4 |

II. Состояния прибора:

- $n = 0$  – оба устройства работают;
- $n = 1$  – 1 устройство работает, 2 не работает;
- $n = 2$  – 1 устройство не работает, 2 работает;
- $n = 3$  – оба устройства не работают.

Граф состояний непрерывной Марковской цепи:



Матрица интенсивностей:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5.7 & 3.7 & 2 & 0 \\ 3.7 & -5.7 & 0 & 2 \\ 4.9 & 0 & -8.6 & 3.7 \\ 0 & 4.9 & 3.7 & -8.6 \end{pmatrix}$$

III. Система дифференциальных уравнений Колмогорова.

$$\begin{cases} p_0' = 3.7p_1 + 4.9p_2 - 5.7p_0 \\ p_1' = 3.7p_0 + 4.9p_3 - 5.7p_1 \\ p_2' = 2p_0 + 3.7p_3 - 8.6p_2 \\ p_3' = 2p_1 + 3.7p_2 - 8.6p_3 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решаем полученную систему в пакете MATLAB.

$$\begin{cases} p_0 = 0.355 - C_3 \cdot e^{-14.3t} + C_2 \cdot e^{-6.9t} - C_1 \cdot e^{-7.4t} \\ p_1 = 0.355 + C_3 \cdot e^{-14.3t} + C_2 \cdot e^{-6.9t} + C_1 \cdot e^{-7.4t} \\ p_2 = 0.145 + C_3 \cdot e^{-14.3t} - C_2 \cdot e^{-6.9t} - 0.408 \cdot C_1 \cdot e^{-7.4t} \\ p_3 = 0.145 - C_3 \cdot e^{-14.3t} - C_2 \cdot e^{-6.9t} + 0.408 \cdot C_1 \cdot e^{-7.4t} \end{cases}$$

Частное решение с учётом начальных условий (решаем в пакете MATLAB):

Начальные условия:  $Q(0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0)$

$$\begin{cases} p_0 = 0.355 + 0.355 \cdot e^{-7.4t} + 0.145 \cdot e^{-6.9t} + 0.145 \cdot e^{-14.3t} \\ p_1 = 0.355 - 0.355 \cdot e^{-7.4t} + 0.145 \cdot e^{-6.9t} - 0.145 \cdot e^{-14.3t} \\ p_2 = 0.145 + 0.145 \cdot e^{-7.4t} - 0.145 \cdot e^{-6.9t} - 0.145 \cdot e^{-14.3t} \\ p_3 = 0.145 - 0.145 \cdot e^{-7.4t} - 0.145 \cdot e^{-6.9t} + 0.145 \cdot e^{-14.3t} \end{cases}$$

IV. Цепь однородная, т.к. интенсивность перехода не зависит от  $t$ . Следовательно, стационарный режим существует. Для однородной цепи в стационарном режиме сумма потоков вероятностей, входящих в это состояние, равна сумме потоков выходящих из этого состояния.

Система уравнений для стационарного режима:

$$\begin{cases} 5.7 p_0 = 3.7 p_1 + 4.9 p_2 \\ 5.7 p_1 = 3.7 p_0 + 4.9 p_3 \\ 8.6 p_2 = 2 p_0 + 3.7 p_3 \\ 8.6 p_3 = 2 p_1 + 3.7 p_2 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решим эту систему в MathCAD:

$$p_0 = 0.355 \quad p_1 = 0.355 \quad p_2 = 0.145 \quad p_3 = 0.145$$

По теореме эргодичности для непрерывной цепи с конечным числом состояний, если она неразложима, то финальные вероятности существуют и совпадают со стационарными вероятностями.

$$\tilde{p}_0 = 0.355 \quad \tilde{p}_1 = 0.355 \quad \tilde{p}_2 = 0.145 \quad \tilde{p}_3 = 0.145$$

V. Доход от прибора в стационарном режиме.

$$a = p_0 \cdot (a_1 + a_2) + a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 = 0.355 \cdot 19 + 6 \cdot 0.355 + 13 \cdot 0.145 = 10.76$$

VI. Проведем рационализацию прибора.

В силу финансовых трудностей проведем рационализацию:

- Для первого устройства:

$$\mu_1 = 6.86$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5.7 & 3.7 & 2 & 0 \\ 3.7 & -5.7 & 0 & 2 \\ 6.86 & 0 & -10.56 & 3.7 \\ 0 & 6.86 & 3.7 & -10.56 \end{pmatrix}$$

Система уравнений для стационарного режима:

$$\begin{cases} 5.7 p_0 = 3.7 p_1 + 6.86 p_2 \\ 5.7 p_1 = 3.7 p_0 + 6.86 p_3 \\ 10.56 p_2 = 2 p_0 + 3.7 p_3 \\ 10.56 p_3 = 2 p_1 + 3.7 p_2 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решаем в пакете MathCAD:

$$p_0 = 0.387 \quad p_1 = 0.387 \quad p_2 = 0.113 \quad p_3 = 0.113$$

Доход от прибора в результате рационализации устройства 1:

$$a = p_0 \cdot (a_1 + a_2) + a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 = 0.387 \cdot 19 + 6 \cdot 0.387 + 13 \cdot 0.113 = 11.14$$

- Для второго устройства:

$$\mu_2 = 5.18$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -5.7 & 3.7 & 2 & 0 \\ 5.18 & -7.18 & 0 & 2 \\ 4.9 & 0 & -8.6 & 3.7 \\ 0 & 4.9 & 5.18 & -10.08 \end{pmatrix}$$

Система уравнений для стационарного режима:

$$\begin{cases} 5.7p_0 = 5.18p_1 + 4.9p_2 \\ 7.18p_1 = 3.7p_0 + 4.9p_3 \\ 8.6p_2 = 2p_0 + 5.18p_3 \\ 10.08p_3 = 2p_1 + 3.7p_2 \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

Решаем в пакете MathCAD:

$$p_0 = 0.414 \quad p_1 = 0.296 \quad p_2 = 0.169 \quad p_3 = 0.121$$

Доход от прибора в результате рационализации устройства 2:

$$a = p_0 \cdot (a_1 + a_2) + a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 = 0.414 \cdot 19 + 6 \cdot 0.296 + 13 \cdot 0.169 = 11.85$$

Рационализацию нужно применить ко второму устройству, т.к. в данном случае прибор принесет больший доход.  $a(2) = 11.85 > a(1) = 11.14$