

# Решение семинара 1. Повторение теории вероятностей и математической статистики (to be cont'd)

## Задача 1.

Для случайной величины  $X$ , распределение которой задано с помощью таблицы

|   |     |     |     |     |
|---|-----|-----|-----|-----|
| X | 2   | 3   | 4   | 5   |
| p | 0,1 | 0,4 | 0,3 | 0,2 |

найти математическое ожидание, дисперсию и функцию распределения.

## Решение:

$$1) E(X) = \sum_{i=1}^n p_i X_i = 2 \cdot 0.1 + 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.3 + 5 \cdot 0.2 = 3.6$$

$$2) D(X) = \sum_{i=1}^n p_i (X_i - \bar{X})^2 = (2 - 3.6)^2 \cdot 0.1 + (3 - 3.6)^2 \cdot 0.4 + (4 - 3.6)^2 \cdot 0.3 + (5 - 3.6)^2 \cdot 0.2 = 0.84$$

## Задача 2. $E(X) = 2$ , $E(Y) = 3$ , $D(X) = 5$ , $D(Y) = 4$ , $\text{cov}(X, Y) = -3$

Найти

- а)  $E(3X + 1)$
- б)  $D(3X + 1)$
- в)  $D(3X + 2Y)$
- г)  $\text{cov}(5X + 2, 3Y - 1)$

## Решение:

$$\text{а) } E(3X + 1) = 3E(X) + 1 = 7, \text{ т.к. } E(C) = C, C - \text{const}$$

$$\text{б) } D(3X + 1) = 9D(X) = 45, \text{ т.к. } D(C) = 0, C - \text{const}$$

$$\text{в) } D(3X + 2Y) = 9D(X) + 4D(Y) + 2\text{cov}(3X, 2Y) = 9D(X) + 4D(Y) + 12\text{cov}(X, Y) = 25$$

$$\text{г) } \text{cov}(5X + 2, 3Y - 1) = \text{cov}(5X, 3Y) = 15\text{cov}(X, Y) = -45, \text{ т.к.}$$

$$\begin{aligned} \text{по определению ковариации } \text{cov}(X + C_1, Y + C_2) &= E[(X + C_1 - E(X + C_1))(Y + C_2 - E(Y + C_2))] = \\ &= E[(X + C_1 - E(X) - C_1)(Y + C_2 - E(Y) - C_2)] = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = \text{cov}(X, Y), \\ C_1, C_2 &- \text{const} \end{aligned}$$

## Задача 3.

Пусть функция плотности случайной величины  $X$  имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \text{при } -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{при остальных } x \end{cases}$$

- 1) Убедиться, что  $f(x)$  является функцией плотности.
- 2) Построить функцию распределения случайной величины  $X$ .
- 3) Найти  $E(X)$ ,  $D(X)$ .

## Решение:

$$1) f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \right) dx = \left. \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}x \right|_{-1}^1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

$$2) F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ 0.25x^2 + 0.5x + 0.25, & -1 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$3) E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x \right) dx = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{4}x^2 \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 - \frac{1}{6} \cdot (-1) - \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

$$D(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx - \frac{1}{9} = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{6}x^3 \Big|_{-1}^1 - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

#### Задача 4.

Функция распределения случайной величины  $X$  имеет вид:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x \leq 1 \\ 0.25(x-1)^2, & \text{для } 1 \leq x \leq 3 \\ 1, & \text{для } x \geq 3 \end{cases}$$

- 1) Найти функцию плотности этой случайной величины.
- 2) Найти вероятность  $P(2 < X < 4)$ .

**Решение:**

$$1) f(x) = F'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}, & 1 \leq x \leq 3 \\ 0, & \text{при остальных } x \end{cases}$$

$$2) P(2 < X < 4) = P(X < 4) - P(X < 2) = F(4) - F(2) = 1 - 0.25 = 0.75$$

#### Задача 5.

Совместное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$  задано с помощью таблицы

|   |   | X    |      |      |
|---|---|------|------|------|
|   |   | 3    | 4    | 5    |
| Y | 2 | 0,2  | 0,2  | 0,1  |
|   | 4 | 0,12 | 0,12 | 0,05 |
|   | 6 | 0,08 | 0,08 | 0,05 |

- 1) Найти маргинальное распределение случайных величин  $X$  и  $Y$ , математическое ожидание и дисперсию каждой из величин.
- 2) Найти распределение случайной величины  $Y$  при условии, что  $X = 4$ .
- 3) Найти математическое ожидание случайной величины  $Y$  при условии, что  $X = 4$ .
- 4) Найти ковариацию случайных величин  $X$  и  $Y$ .
- 5) Являются ли случайные величины  $X$  и  $Y$  независимыми?

**Решение:**

1)

| X | 3   | 4   | 5   |
|---|-----|-----|-----|
| p | 0,4 | 0,4 | 0,2 |

$$P^M(X = X_i) = \sum_{j=1}^3 P(X = X_i, Y = Y_j), i = 1, 2, 3$$

$$E(X) = 3,8 \quad D(X) = 0,56$$

| Y | 2   | 4    | 6    |
|---|-----|------|------|
| p | 0,5 | 0,29 | 0,21 |

$$P^M(Y = Y_j) = \sum_{i=1}^3 P(X = X_i, Y = Y_j), j = 1, 2, 3$$

$$E(Y) = 3,42 \quad D(Y) = 2,5036$$

$$2) P(Y = Y_j | X = 4) = \frac{P(X = 4, Y = Y_j)}{P^M(X = 4)}:$$

| Y                    | 2   | 4   | 6   |
|----------------------|-----|-----|-----|
| $P(Y = Y_j   X = 4)$ | 0,5 | 0,3 | 0,2 |

$$3) E(Y|X=4) = \sum Y_j P(Y=Y_j|X=4) = 3,4$$

$$4) \text{cov}(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 P(X=X_i, Y=Y_j) (X_i - E(X))(Y_j - E(Y)) =$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 P(X=X_i, Y=Y_j) X_i Y_j - E(X) E(Y) = 0,2 \cdot 3 \cdot 2 + 0,2 \cdot 4 \cdot 2 + 0,1 \cdot 5 \cdot 2 + 0,12 \cdot 3 \cdot 4 + 0,12 \cdot 4 \cdot 4 + 0,05 \cdot 5 \cdot 4 +$$

$$+ 0,08 \cdot 3 \cdot 6 + 0,08 \cdot 4 \cdot 6 + 0,05 \cdot 5 \cdot 6 - 3,8 \cdot 3,42 = 13,02 - 3,8 \cdot 3,42 = 0,024$$

5) Нет, т.к. их ковариация не равна нулю и/или условные вероятности не совпадают с безусловными.

#### Задача 6.

Пусть случайная величина  $X \sim N(0,1)$ . Найти

- 1)  $P(X < 2)$
- 2)  $P(X > 2)$
- 3)  $P(0 < X < 2)$
- 4)  $P(|X| < 2)$
- 5)  $P(-1 < X < 2)$

#### Решение:

1) По таблицам  $P(X < 2) = 0,9772$

2)  $P(X > 2) = 1 - P(X < 2) = 0,0228$

3)  $P(0 < X < 2) = P(X < 2) - P(X < 0) = 0,9772 - 0,5 = 0,4772$  (вспоминаем, что нормальное стандартное распределение симметрично относительно нуля, а значит, левее и правее нуля содержится ровно по половине распределения)

4)  $P(|X| < 2) = P(-2 < X < 2) = P(X < 2) - P(X < -2) = P(X < 2) - P(X > 2) = 0,9544$

или  $P(|X| < 2) = P(-2 < X < 2) = 2 \cdot P(0 < X < 2) = 0,9544$

5)  $P(-1 < X < 2) = P(X < 2) - P(X < -1) = P(X < 2) - P(X > 1) = P(X < 2) - (1 - P(X < 1)) = 0,8185$

#### Задача 7.

Пусть случайная величина  $X \sim N(2,9)$ . Найти  $P(-2 < X < 3)$ .

#### Решение:

Преобразуем нашу случайную величину к нормальной стандартной:

$$P(-2 < X < 3) = P\left(\frac{-2-2}{\sqrt{9}} < \frac{X-2}{\sqrt{9}} < \frac{3-2}{\sqrt{9}}\right) = P\left(-\frac{4}{3} < N(0,1) < \frac{1}{3}\right) \approx 0,6293 - (1 - 0,9082) = 0,5375$$

#### Задача 8.

Пусть случайная величина  $X \sim t(20)$ . Найти числа  $x_1$  и  $x_2$  такие, что

- 1)  $P(-x_1 < X < x_1) = 0.9$
- 2)  $P(X < x_2) = 0.99$

#### Решение:

1) По таблицам  $x_1 = 1,725$

2) По таблицам  $x_2 = 2,528$

#### Задача 9.

Пусть случайная величина  $X \sim \chi^2(5)$ . Найти числа  $x_1$  и  $x_2$  такие, что

- 1)  $P(X > x_1) = 0.01$

2)  $P(X < x_2) = 0.95$

**Решение:**

1) По таблицам  $x_1 = 15,086$

2) По таблицам  $x_2 = 11,07$

---

**Задача 10.**

Пусть случайная величина  $X \sim F(2,20)$ . Найти числа  $x_1$  и  $x_2$  такие, что

1)  $P(X > x_1) = 0.01$ .

2)  $P(X < x_2) = 0.95$

**Решение:**

1) По таблицам  $x_1 = 5,85$

2) По таблицам  $x_2 = 3,49$

---