

Вопросы к коллоквиуму
"Неопределенный и определенный интеграл".
Математический анализ, 1-й курс, 3-й модуль,
группы БПМ 161–164;
2016/2017 учебный год,
В. В. Лебедев

На коллоквиуме студент получает два вопроса из этого вопросника по выбору преподавателя. Студент должен знать определения и формулировать утверждения. Воспроизводить доказательства не требуется. Коллоквиум принимается в форме блиц-опроса на обычном семинарском занятии. На подготовку дается 10 минут, на ответ 2–3 минуты. В отдельных экстренных случаях сдача коллоквиума может быть завершена на консультации.

1. Дайте определение первообразной (неопределенного интеграла) и укажите ее основные свойства. Выпишите таблицу основных первообразных.

2. Расскажите о замене переменной. Дайте определение дифференциала функции и расскажите о внесении под знак дифференциала в неопределенных интегралах. Вычислите

$$\int \frac{\ln x}{x} dx.$$

3. Запишите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла. Вычислите $\int e^x \cos x dx$.

4. Запишите рекуррентное соотношение для

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

5. Перечислите простейшие рациональные функции, расскажите об их интегрировании.

6. Сформулируйте теорему о представлении рациональной функции в виде суммы простейших. Сведите вычисление интеграла

$$\int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$$

к вычислению интегралов от простейших рациональных функций.

7. Расскажите, как сводятся следующие интегралы к интегралам от рациональных функций ($R(\)$ обозначает рациональное выражение от соответствующих переменных):

$$\int R(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \dots) dx, \quad \int R(e^{\alpha x}, e^{\beta x}, e^{\gamma x}, \dots) dx,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — рациональные числа. Сведите интеграл

$$\int \frac{e^x + e^{x/2}}{e^{2x} + 1} dx.$$

к интегралу от рациональной функции.

8. Расскажите о тригонометрических интегралах

$$\int R(\cos x, \sin x) dx$$

и их сведении к интегралам от рациональных функций (при помощи универсальной тригонометрической замены переменной). Сведите интеграл

$$\int \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x} dx.$$

к интегралу от рациональной функции.

9. Расскажите о вычислении интегралов

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$$

(при помощи эйлеровой подстановки).

10. Дайте определение интегрируемой функции на отрезке и ее определенного интеграла.

11. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла (линейность, аддитивность). Поясните геометрический смысл определенного интеграла.

12. Сформулируйте утверждение об ограниченности всякой интегрируемой функции. Приведите пример неинтегрируемой ограниченной функции.

13. Сформулируйте критерий интегрируемости. Сформулируйте утверждение об интегрируемости непрерывных и кусочно непрерывных функций.

14. Сформулируйте теорему об интегрируемости модуля функции и запишите неравенство между интегралом функции и интегралом ее модуля.

15. Сформулируйте теоремы об интегрировании неравенств и об оценке определенного интеграла.

16. Сформулируйте теорему о среднем значении для определенного интеграла.

17. Сформулируйте теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом и выведите формулу Ньютона-Лейбница.

18. Сформулируйте правило замены переменной в определенном интеграле. Вычислите

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

19. Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла. Вычислите

$$\int_1^2 x \ln x dx.$$

20. Дайте определение кривой на плоскости и ее длины. Запишите формулу для вычисления длины дуги графика гладкой функции. Найдите длину дуги параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

21. Запишите формулу для вычисления массы отрезка с заданным законом распределения массы. Запишите формулу работы переменной силы на прямолинейном пути.

22. Запишите формулу для вычисления объема тела с известным законом изменения поперечного сечения. Запишите формулу для вычисления объема тела вращения. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностью $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 1$ ("параболическая чашка").

23. Изложите метод (центральных) прямоугольников для приближенного вычисления определенных интегралов. Запишите оценку ошибки.