Вопросы к экзамену
Математический анализ, 1-й курс, модули 3-4
В. Лебедев
МИЭМ НИУ ВШЭ, 2016/2017 учебный год
ДПМ, группы БПМ 161–164

На экзамене студент получает билет, содержащий два вопроса из этого вопросника и две задачи от экзаменатора. Пользоваться вопросником разрешается.

Результирующая оценка = 0,5 накопленная оценка + 0,5 оценка на экзамене.

1. Дайте определение неопределенного интеграла (первообразной) и укажите его основные свойства. Выпишите таблицу основных первообразных.

2. Расскажите о замене переменной. Дайте определение дифференциала функции и расскажите о внесении под знак дифференциала в неопределенных интегралах. Вычислите

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad \int \frac{\ln x}{x}dx.$$

3. Выведите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла. Вычислите $\int e^x \cos x dx$.

4. Выведите рекурентное соотношение для

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

5. Перечислите простейшие рациональные функции, расскажите об их интегрировании.

6. Сформулируйте теорему о представлении рациональной функции в виде суммы простейших. Вычислите

$$\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx.$$

7. Расскажите, как сводятся следующие интегралы к интегралам от рациональных функций ($R(\ )$ обозначает рациональное выражение от

соответствующих переменных):

$$\int R(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \ldots)dx, \quad \int R(e^{\alpha x}, e^{\beta x}, e^{\gamma x}, \ldots)dx,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — рациональные числа. Вычислите

$$\int \frac{e^x + e^{x/2}}{e^{2x} + 1} dx.$$

8. Расскажите о тригонометрических интегралах

$$\int R(\cos x,\ \sin x)dx$$

и их сведении к интегралам от рациональных функций (при помощи универсальной тригонометрической замены переменной). Вычислите

$$\int \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x} dx.$$

9. Дайте определение интегрируемой функции на отрезке и ее определенного интеграла. Поясните геометрический смысл определенного интеграла.

10. Докажите, что функция Дирихле не интегрируема.

11. Выведите свойство линейности и свойство аддитивности определенного интеграла.

12. Как связана интегрируемость и ограниченность функции на отрезке? Сформулируйте критерий интегрируемости.

13. Докажите, что всякая функция непрерывная на отрезке — интегрируема. Докажите, интегрируемость кусочно непрерывной функции.

14. Докажите теорему об интегрируемости модуля интегрируемой функции и докажите, что если функция f — интегрируема на $[a, b]$, то

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

15. Докажите теоремы об интегрировании неравенств и об оценке определенного интеграла.

16. Докажите теорему о среднем значении для определенного интеграла.

17. Докажите теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом и выведите формулу Ньютона-Лейбница.

18. Сформулируйте правило замены переменной в определенном интеграле. Вычислите

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

19. Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла. Вычислите

$$\int_1^2 x \ln x dx.$$

20. Дайте определение кривой на плоскости и ее длины. Выведите формулу для вычисления длины дуги графика гладкой функции. Найдите длину дуги параболы $y = x^2,\ 0 \leq x \leq 1$.

21. Выведите формулу для вычисления массы отрезка с заданным законом распределения массы.

22. Выведите формулу работы переменной силы на прямолинейном пути.

23. Выведите формулу для вычисления объема тела с известным законом изменения поперечного сечения. Выведите формулу для вычисления объема тела вращения. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностью $z = x^2+y^2$ и плоскостью $z = 1$ ("параболическая чашка").

24. Изложите метод (центральных) прямоугольников для приближенного вычисления определенных интегралов. Выведите оценку ошибки.

25. Дайте определение несобственного интеграла 1-го рода (по бесконечному промежутку). Вычислите по определению

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx.$$

26. Дайте определение несобственного интеграла 2-го рода (от неограниченной функции по конечному промежутку). Вычислите по определению

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\ .$$

27. Расскажите о вычислении несобственных интегралов при помощи замены переменной, внесения под знак дифференциала, интегриро-

вании по частям. Вычислите интегралы

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} .$$

28. Расскажите с обоснованием о поведении несобственных интегралов

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha} .$$

29. Выведите признак сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Выведите предельный признак сравнения (интегралы от эквивалентных функций сходятся или расходятся одновременно).

30. Дайте определение абсолютной сходимости несобственных интегралов и докажите теорему об абсолютной сходимости. Покажите, что несобственные интегралы

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \quad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$$

сходятся абсолютно при $\alpha > 1$.

31. Покажите, что несобственные интегралы

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \quad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$$

сходятся при $0 < \alpha \leq 1$, но абсолютной сходимости нет.

32. Дайте определение частичной суммы числового ряда. Дайте определение сходящегося числового ряда и его суммы. Сформулируйте основные свойства числовых рядов. Покажите, что если ряд сходится, то его члены стремятся к 0. Укажите пример, показывающий, что обратное не верно.

33. Докажите, что ряд (ряд Дирихле) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

34. Выведите признак сравнения для числовых рядов с неотрицательными членами. Выведите предельный признак сравнения (ряды с эквивалентными членами сходятся или расходятся одновременно).

35. Сформулируйте признаки сходимости Даламбера и Коши. Докажите один из них. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^\infty \frac{n!}{2^{n^2}}$?

36. Выведите интегральный признак сходимости числового ряда. При каких значениях α сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$?

37. Дайте определение абсолютно сходящегося числового ряда и докажите теорему об абсолютной сходимости. Приведите пример сходящегося но не абсолютно сходящегося ряда.

38. Докажите теорему о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда. Сформулируйте теорему о перестановке членов сходящегося но не абсолютно сходящегося ряда.

39. Докажите теорему Лейбница о знакочередующихся рядах. Для рядов Лейбница выведите оценку уклонения частичной суммы от суммы.

40. Что такое расстояние в $\mathbb{R}^n$? Что такое шар в $\mathbb{R}^n$? Дайте определение окрестности и проколотой окрестности точки в $\mathbb{R}^n$. Дайте определение предела последовательности точек в $\mathbb{R}^n$.

41. Дайте определения ограниченного множества, открытого и замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$, границы множества, связного множества, области. Что можно сказать об объединении открытых (замкнутых) множеств? Что можно сказать об их пересечении? Что можно сказать о дополнении к открытому (замкнутому) множеству?

42. Докажите лемму Больцано-Вейерштрасса (о выделении сходящейся подпоследовательности из любой ограниченной последовательности) в многомерном случае.

43. Расскажите о понятии функции нескольких переменных. Что такое график функции (на примере функции 2-х переменных). Что такое множество уровня, Дайте определение предела функции, включая случай, когда функции задана на множестве в $\mathbb{R}^n$. Существует ли

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}?$$

44. Дайте определение непрерывности функции (нескольких переменных) в точке, на множестве, и перечислите основные свойства непрерывных функций.

45. Докажите теорему Коши о промежуточном значении в многомерном случае. Изложите и обоснуйте метод "пробных точек"решения неравенств вида $f(x,y) > 0$. Найдите область определения функции $z = \ln \frac{xy-1}{x^2+y^2-1}$.

46. Докажите теорему Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значении (для функций нескольких переменных).

47. Дайте определение частных производных. Сформулируйте теорему Шварца о смешанных производных.

48. Дайте определение дифференцируемости функции нескольких переменных. Сформулируйте утверждение о связи дифференцируемости и непрерывности. Выведите формулу линеаризации.

49. Дайте определение касательной плоскости к графику функции двух переменных. Сформулируйте утверждение о связи дифференцируемости и существованием касательной плоскости. Выведите уравнение касательной плоскости.

50. Дайте определение градиента. Дайте определение производной по направлению и выведите формулу для ее вычисления.

51. Дайте определение матрицы Якоби отображения. Запишите формулу дифференцирования суперпозиции отображений.

52. Дайте определение матрицы Гессе. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом Лагранжа второго порядка (для функций нескольких переменных).

53. Дайте определение точки локального экстремума функции нескольких переменных. Выведите необходимое условие локального экстремума для дифференцируемых функций. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + xy$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

54. Для функции нескольких переменных выведите достаточное условие локального экстремума и его отсутствия в терминах матрицы Гессе.

55. Для функций двух переменных выведите достаточное условие локального экстремума функции и его отсутствия в терминах вторых производных. Найдите точки локального экстремума функции $z = x^3 - y^2 + x^2y$ и укажите к какому типу они относятся.

56. Дайте определение точки условного локального экстремума функции нескольких переменных.

57. Расскажите о способах задания кривых и поверхностей в пространстве. Сформулируйте теорему о неявной функции поясните ее геометрически.

58. Как дифференцировать неявную функцию? Запишите формулу Тейлора–Пеано второго порядка при $x \to 0$ для функции $y = y(x)$, заданной неявно соотношением

$$xy^3 + y^2 - 1 = 0, \quad y(0) = 1.$$

59. Сформулируйте необходимое условие локального условного экстремума (правило множителей Лагранжа). Поясните его в случае функ-

ции двух переменных и одного условия; функции трех переменных и одного условия; функции трех переменных и двух условий.

60. Найдите максимум и минимум функции $w = x^3+y^3+z^3$ на сфере $x^2+y^2+z^2 = 1$.

61. Изложите с обоснованием метод, позволяющий найти наибольшее и наименьшее значение гладкой функции в ограниченной замкнутой области с "хорошей"(кусочно-гладкой) границей. Найдите максимум и минимум функции $w = x^3 + y^3 - z^3$ в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

62. Дайте определения поточечно сходящейся функциональной последовательности на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$ и ее предела (предельной функции). Дайте определение множества сходимости функциональной последовательности. Найдите множество сходимости и предел последовательности $f_n(x) = x^n,\ n = 1, 2, \ldots$.

63. Дайте определение поточечно сходящегося функционального ряда на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$ и его суммы. Дайте определение множества сходимости функционального ряда. Найдите множество сходимости и суму ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

64. Дайте определение равномерно сходящейся функциональной последовательности и равномерно сходящегося функционального ряда.

65. Покажите, что равномерная сходимость последовательности функций $f_n,\ n = 1, 2, \ldots,$ к функции f на множестве E равносильна условию

$$\sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

(критерий равномерной сходимости).

66. Покажите, что равномерная сходимость влечет поточечную сходимость (к тому же пределу). Приведите пример показывающий, что из поточечной сходимости не следует равномерная.

67. Исследуйте на равномерную сходимость последовательность $f_n(x) = xne^{-x^2n^2}$ на всей прямой $\mathbb{R}$; на отрезке $[1,\ 2]$.

68. Исследуйте на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x^2}$$

на всей прямой $\mathbb{R}$ (воспользуйтесь оценкой остатка для рядов Лейбница).

69. Покажите, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция. Докажите непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда, члены которого непрерывны.

70. Выведите необходимый признак равномерной сходимости функционального ряда (равномерная сходимость членов ряда к нулю).

71. Выведите достаточный признак (признак Вейерштрасса) равномерной сходимости функционального ряда.

72. Исследуйте на равномерную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2x+1}$$

на луче $[1,+\infty)$, на интервале $(0,1)$.

73. Выведите достаточное условие, обеспечивающее равенство

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

74. Выведите достаточное условие, обеспечивающее возможность почленного интегрирования ряда

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)dx.$$

75. Выведите достаточное условие, обеспечивающее возможность почленного дифференцирования ряда

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)dx.$$

76. Дайте определение степенного ряда. Сформулируйте теоремы о множестве сходимости степенного ряда и его равномерной сходимости. Выведите формулы для радиуса сходимости.

77. Сформулируйте теорему о радиусе сходимости продифференцированного и проинтегрированного степенного ряда. Дайте иллюстрацию

этой теоремы в случае, когда существует предел (конечный или бесконечный)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

или

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

78. Покажите, что внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать. Найдите сумму ряда

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots, \qquad |x| < 1.$$

79. Докажите, что два разных степенных ряда с одинаковым центром не могут иметь одинаковую сумму (теорема единственности).

80. Установите условие необходимое для того, чтобы заданная функция являлась суммой некоторого степенного ряда. Установите достаточное условие и запишите этот ряд — ряд Тейлора.

81. Покажите, что функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ являются суммами своих рядов Тейлора и разложите их в ряд Тейлора.

82. Разложите в ряд Тейлора функции $\ln(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$.

83. Разложите в ряд Тейлора функцию $(1+x)^\alpha$.

84. Сформулируйте теорему о ряде Тейлора сумы, произведения и суперпозиции функций. Выпишите четыре ненулевых члена ряда Тейлора функций $(\sin x)\cdot\ln(1+x)$ и $e^{\sin x}$.

85. Используя ряд Тейлора для e^x вычислите с точностью 10^{-5} интеграл

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$