Вопросы к итоговому экзамену
Математический анализ, 2-й курс, модуль 1
В. Лебедев
МИЭМ НИУ ВШЭ, 2016/2017 учебный год
ДПМ, группы БПМ 161–164

На экзамене студент получает билет, содержащий два вопроса из этого вопросника, и две задачи от экзаменатора. Экзамен по всему курсу (5 модулей). Пользоваться вопросником разрешается.

Итоговая результирующая оценка (идущая в диплом) = 0,5 итоговая накопленная оценка + 0,5 оценка на итоговом экзамене. Итоговая накопленная оценка образуется следующим образом: $O_{\text{накопл/итоговая}} = \frac{1}{5}(2 \cdot O_{\text{рез } 1,\, 2} + 2 \cdot O_{\text{рез } 3,\, 4} + O_{\text{накопл } 5})$

1. Дайте определение пределов последовательности $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty, -\infty,\ \infty$. Докажите теорему о единственности предела последовательности. Что такое сходящаяся последовательность?

2. Дайте определения пределов функции

$$\lim_{x\to x_0\ (+\infty,\ -\infty,\ \infty,\ x_0+0,\ x_0-0)} f(x) = a(+\infty,\ -\infty,\ \infty).$$

Докажите теорему о единственности предела функции.

3. Дайте определение эквивалентных функций при $x \to x_0$ (при $x \to x_0 \pm 0, +\infty, -\infty, \infty$). Докажите, что если $a(x) \sim b(x)$ и $c(x) \sim d(x)$, то $a(x)c(x) \sim b(x)d(x)$ и $a(x)/c(x) \sim b(x)/d(x)$. Верно ли, что $a(x) + c(x) \sim b(x) + d(x)$?

4. Дайте определение соотношения $f(x) = o(g(x))$, $x \to x_0$. Покажите, что соотношения $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$ и $f(x) = g(x) + o(g(x))$, $x \to x_0$ означают одно и то же. Дайте определение соотношения $f(x) = O(g(x)),\ x \to x_0$.

5. Дайте определение функции, непрерывной в точке; на интервале. Докажите теорему Коши о промежуточном значении. Изложите метод решения уравнений $f(x) = 0$ методом деления отрезка пополам.

6. Докажите теорему Вейерштрасса о максимальном (минимальном) значении непрерывной функции на отрезке. Покажите на примерах, что все условия этой теоремы являются существенными.

7. Дайте определение производной и односторонней производной. Вычислите по определению производную одной из следующих функций $y = C$, $y = x$, $y = x^\alpha$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \ln x$, $y = e^x$.

8. Дайте определение точки локального экстремума. Докажите теорему Ферма. Дайте определение критической точки. Приведите примеры. Расскажите, как найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

9. Дайте определение многочлена Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 и запишите формулы Тейлора–Пеано и Тейлора–Лагранжа.

10. Вычислите e с точностью $0,01$.

11. Выведите достаточное условия локального экстремума функции с использованием второй производной. Приведите пример. Расскажите что делать, если в критической точке вторая производная обращается в 0.

12. Изложите метод построения графиков функций.

13. Дайте определение неопределенного интеграла (первообразной) и укажите его основные свойства. Выпишите таблицу основных первообразных. Расскажите о методах нахождения первообразной: о замене переменной (внесении под знак дифференциала), об интегрирование по частям.

14. Дайте определение интегрируемой функции на отрезке и ее определенного интеграла. Поясните геометрический смысл определенного интеграла. Докажите, что функция Дирихле не интегрируема. Сформулируйте утверждение об интегрируемости всякой непрерывной (кусочно непрерывной) функции.

15. Докажите теорему о среднем значении для определенного интеграла. С ее помощью докажите теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом и выведите формулу Ньютона-Лейбница.

16. Дайте определение несобственного интеграла 1-го рода (по бесконечному промежутку). Вычислите по определению

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx.$$

17. Дайте определение несобственного интеграла 2-го рода (от неограниченной функции по конечному промежутку). Вычислите по определению

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\ .$$

18. Расскажите с обоснованием о поведении несобственных интегралов

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^{\alpha}}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} \ .$$

19. Выведите признак сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Выведите предельный признак сравнения (интегралы от эквивалентных функций сходятся или расходятся одновременно).

20. Дайте определение абсолютно сходящегося несобственных интегралов и докажите теорему об абсолютной сходимости. Приведите пример сходящегося несобственного интеграла, не являющегося абсолютно сходящимся.

21. Дайте определение частичной суммы числового ряда. Дайте определение сходящегося числового ряда и его суммы. Сформулируйте основные свойства числовых рядов. Покажите, что если ряд сходится, то его члены стремятся к 0. Укажите пример, показывающий, что обратное не верно.

22. Докажите, что ряд (ряд Дирихле) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

23. Выведите признак сравнения для числовых рядов с неотрицательными членами. Выведите предельный признак сравнения (ряды с эквивалентными членами сходятся или расходятся одновременно).

24. Сформулируйте признаки сходимости Даламбера и Коши. Докажите один из них. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$.

25. Выведите интегральный признак сходимости числового ряда. При каких значениях α сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$?

26. Дайте определение абсолютно сходящегося числового ряда и докажите теорему об абсолютной сходимости. Приведите пример сходящегося но не абсолютно сходящегося ряда.

27. Докажите теорему Лейбница о знакочередующихся рядах. Для рядов Лейбница выведите оценку уклонения частичной суммы от суммы.

28. Что такое расстояние в $\mathbb{R}^n$? Что такое шар в $\mathbb{R}^n$? Дайте определение окрестности и проколотой окрестности точки в $\mathbb{R}^n$. Дайте определение предела последовательности точек в $\mathbb{R}^n$.

29. Дайте определение предела функции нескольких переменных, включая случай, когда функции задана на множестве в $\mathbb{R}^n$. Дайте опре-

деление непрерывности функции (нескольких переменных) в точке, на множестве, и перечислите основные свойства непрерывных функций.

30. Докажите теорему Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значении (для функций нескольких переменных).

31. Дайте определение частных производных. Дайте определение дифференцируемости функции нескольких переменных. Дайте определение градиента. Выведите формулу линеаризации. Выведите уравнение касательной плоскости.

32. Дайте определение матрицы Якоби. Запишите формулу дифференцирования суперпозиции функций нескольких переменных.

33. Дайте определение матрицы Гессе. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом Лагранжа второго порядка (для функций нескольких переменных).

34. Дайте определение точки локального экстремума функции нескольких переменных. Выведите необходимое условие локального экстремума для дифференцируемых функций.

35. Для функции нескольких переменных выведите достаточное условие локального экстремума и его отсутствия в терминах матрицы Гессе. Найдите точки локального экстремума функции $z = x^3 - y^2 + x^2 y$ и укажите к какому типу они относятся.

36. Дайте определение точки условного локального экстремума функции нескольких переменных. Сформулируйте необходимое условие локального условного экстремума (правило множителей Лагранжа). Поясните его в случае функции двух переменных и одного условия; функции трех переменных и одного условия; функции трех переменных и двух условий.

37. Найдите максимум и минимум функции $w = x^3 + y^3 + z^3$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

38. Изложите с обоснованием метод, позволяющий найти наибольшее и наименьшее значение гладкой функции в ограниченной замкнутой области с "хорошей"(кусочно-гладкой) границей. Найдите максимум и минимум функции $w = x^3 + y^3 - z^3$ в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

39. Дайте определения поточечно сходящейся функциональной последовательности на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$ и ее предела (предельной функции). Дайте определение множества сходимости функциональной последовательности. Найдите множество сходимости и предел последовательности $f_n(x) = x^n,\ n = 1, 2, \ldots$.

40. Дайте определение поточечно сходящегося функционального ря-

да на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$ и его суммы. Дайте определение множества сходимости функционального ряда. Найдите множество сходимости и суму ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k.$$

41. Дайте определение равномерно сходящейся функциональной последовательности и равномерно сходящегося функционального ряда на множестве $E \subseteq \mathbb{R}$. Покажите, что равномерная сходимость последовательности функций f_n, $n = 1, 2, \ldots$, к функции f на множестве E равносильна условию

$$\sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| \to 0$$

(критерий равномерной сходимости).

42. Покажите, что равномерная сходимость влечет поточечную сходимость (к тому же пределу). Приведите пример показывающий, что из поточечной сходимости не следует равномерная.

43. Покажите, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций есть непрерывная функция. Докажите непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда, члены которого непрерывны.

44. Выведите необходимый признак равномерной сходимости функционального ряда (равномерная сходимость членов ряда к нулю). Выведите достаточный признак (признак Вейерштрасса) равномерной сходимости функционального ряда.

45. Сформулируйте достаточное условие, обеспечивающее возможность почленного интегрирования функционального ряда. Сформулируйте достаточное условие почленного дифференцирования.

46. Дайте определение степенного ряда. Сформулируйте теоремы о множестве сходимости степенного ряда и его равномерной сходимости. Выведите формулы для радиуса сходимости. Сформулируйте теорему единственности для степенных рядов.

47. Покажите, что внутри интервала сходимости степенной ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать. Найдите сумму ряда

$$x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots, \qquad |x| < 1.$$

48. Установите условие необходимое для того, чтобы заданная функция являлась суммой некоторого степенного ряда. Установите достаточное условие и запишите этот ряд — ряд Тейлора.

49. Покажите, что функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ являются суммами своих рядов Тейлора и разложите их в ряд Тейлора. Запишите разложения в ряд Тейлора для функций $\ln(1+x)$, arctg $(1+x)^\alpha$,.

50. Используя ряд Тейлора для e^x вычислите с точностью 10^{-5} интеграл

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx.$$

51. Дайте определение метрического пространства. Приведите примеры. Дайте определение сходящейся последовательности в метрическом пространстве и ее предела. Докажите, что предел (если он существует) — единственен. Дайте определение линейного нормированного пространства. Приведите примеры. Покажите, что соотношение $\rho(x,y) = \|x-y\|$ определяет расстояние (метрику). Дайте определение сходящегося ряда в линейном нормированном пространстве и его суммы.

52. Дайте определение евклидова пространства (можно ограничиться вещественным случаем). Приведите примеры. Выведите неравенство Коши–Буняковского. Покажите, что в евклидовом пространстве соотношение $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ определяет норму.

53. Когда говорят, что два вектора евклидова пространства ортогональны? Дайте определение ортонормированной системы векторов. Дайте определение линейной оболочки системы векторов в линейном нормированном пространстве. Как найти вектор наилучшего приближения в линейной оболочке конечного числа ортонормированных векторов.

54. Дайте определение всюду плотного множества в метрическом пространстве. Дайте определение полной системы векторов в линейном нормированном пространстве. Приведите примеры. Докажите теорему о разложении в ряд Фурье по полной ортонормированной системе в евклидовом пространстве. Выведите равенство Парсеваля.

55. Определите пространство $C_2([-\pi,\pi])$, указав его элементы и скалярное произведение в нем. Выпишите явно формулы для нормы и расстояния в $C_2([-\pi,\pi])$, порожденных указанным скалярным произведением. Дайте определение среднеквадратичной сходимости. Покажите,

что тригонометрическая система

$$\{1/\sqrt{2},\ \cos kt,\ \sin kt;\ k = 1, 2, \ldots\}$$

образует ортонормированную систему в $C_2([-\pi, \pi])$.

56. Сформулируйте теорему Вейерштрасса об аппроксимации тригонометрическими полиномами в $C([-\pi, \pi])$ и докажите, что тригонометрическая система полна в $C_2([-\pi, \pi])$.

57. Для интегрируемой функции f на $[-\pi, \pi]$ запишите ее ряд Фурье по тригонометрической системе. Докажите, что если f — функция из C_2, то этот ряд сходиться к ней в среднеквадратичном.

58. Для функции f, имеющей непрерывную производную на отрезке $[-\pi, \pi]$ и принимающей равные значения на концах этого отрезка, выведите формулы, связывающие коэффициенты Фурье функции f и ее производной f'.

59. Покажите, что если функция f имеет непрерывную производную на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$, то ее ряд Фурье сходится к ней равномерно.

60. Запишите ряд Фурье в комплексной форме. Расскажите о рядах Фурье на отрезке $[-l, l]$.

61. Дайте определение двойного интеграла

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

от функции по ограниченной плоской области. Укажите его основные свойства и поясните его геометрический смысл. Чему равен $\iint_D 1 dx dy$?

62. Выведите формулу сводящую вычисление двойного интеграла к повторному.

63. Определите якобиан отображения $\varphi : D \to R^2$ плоской области D и поясните его геометрический смысл. Запишите с обоснованием формулу замены переменной в двойном интеграле.

64. Вычислите якобиан перехода к полярным координатам и вычислите

$$\iint_{x^2+y^2\le 1} x^2 y^2 \ dx dy.$$

65. Дайте определение интеграла от функции f по плоской кривой l,

$$\int_l f \ dl.$$

Поясните его физический смысл (масса кривой). Чему равен $\int_l 1\ dl$?

66. Дайте определение интеграла плоского векторного поля $\overline{F}$ по плоской кривой l,

$$\int_l (\overline{F}, \overline{dl}).$$

Поясните его физический смысл (работа поля вдоль кривой).

67. Запишите и поясните формулы для вычисления векторного и скалярного дифференциалов длины $\overline{dl}$ и $dl = |\overline{dl}|$ в случае, когда l – гладкая кривая в $\mathbb{R}^2$, заданная параметрически, и выведите формулы для вычисления интегралов $\int_l f\ dl$ и $\int_l (\overline{F}, \overline{dl})$.

68. Выведите формулу Грина.

69. Дайте определение плоского потенциального поля и его потенциала. Докажите теорему об эквивалентности следующих четырех условий (в случае односвязной области): а) поле $\overline{F} = (P, Q)$–потенциально; б) $P'_y = Q'_x$, в) работа поля $\overline{F}$ по любому (плоскому) замкнутому контуру равна нулю; г) работа поля $\overline{F}$ зависит лишь от начальной и конечной точки пути.

70. Покажите, что работа плоского потенциального поля вдоль (плоской) кривой равна разности потенциалов в конечной и начальной точках кривой. Укажите метод восстановления потенциала.

71. Дайте определение тройного интеграла

$$\iiint_D f(x, y, z)dxdydz$$

от функции f по (ограниченной) области $D \subset \mathbb{R}^3$. Чему равен $\iiint_D 1dxdydz$?

72. Изложите метод вычисления тройных интегралов путем сведения к повторному. Вычислите

$$\iiint_D z\ dxdydz,$$

где D—область ограниченная поверхностью $x^2 + y^2 = z$ и плоскостью $z = 1$.

73. Определите якобиан отображения $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ области $D \subseteq \mathbb{R}^3$ и поясните его геометрический смысл. Запишите с обоснованием формулу замены переменной в тройном интеграле.

74. Вычислите якобиан перехода к сферическим координатам и найдите

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leq 1} z^2\ dxdydz.$$

75. Вычислите якобиан перехода к циллиндрическим координатам и найдите

$$\iiint_{x^2+y^2\leq 1;\ 0\leq z\leq 1} z^2\ dxdydz.$$

76. Дайте определение интеграла от функции f по кривой l в $\mathbb{R}^3$. Поясните его физический смысл. Чему равен $\int_l\ 1\ dl$?

77. Дайте определение интеграла векторного поля $\overline{F}$ в $\mathbb{R}^3$ по кривой $l\subset\mathbb{R}^3$. Поясните его физический смысл.

78. Запишите и поясните формулы для вычисления векторного и скалярного дифференциалов длины $\overline{dl}$ и $dl=|\overline{dl}|$ в случае, когда l – гладкая кривая в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрически, и выведите формулы для вычисления интегралов $\int_l\ f\ dl$ и $\int_l\ (\overline{F},\overline{dl})$.

79. Дайте определение интеграла от функции f по поверхности S в $\mathbb{R}^3$:

$$\iint_S\ f\ dS$$

Поясните его физический смысл (масса поверхности). Чему равен $\iint_S\ 1\ dS$?

80. Дайте определение потока векторного поля $\overline{F}$ через поверхность $S\subset\mathbb{R}^3$:

$$\iint_S\ (\overline{F},\ \overline{dS}).$$

Поясните его физический смысл (на примере поля скорости течения жидкости).

81. Запишите и поясните формулы для вычисления векторного и скалярного дифференциалов площади $\overline{dS}$ и $dS=|\overline{dS}|$ в случае когда S –гладкая поверхность в $\mathbb{R}^3$, заданная параметрически, и выведите формулы для вычисления интегралов $\iint_S\ f\ dS$ и $\iint_S\ (\overline{F},\ \overline{dS})$.

82. Дайте определение дивиргенции поля в $\mathbb{R}^3$. Запишите с обоснованием формулу Остроградского-Гаусса.

83. Докажите эквивалентность следующих условий: а) $\mathrm{div}\overline{F}=0$, б) поток поля $\overline{F}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю.

84. Дайте определение ротора поля в $\mathbb{R}^3$. Запишите с обоснованием формулу Стокса.

85. Дайте определение потенциального поля в $\mathbb{R}^3$ и его потенциала. Докажите эквивалентность следующих условий (в случае односвязной области): а) поле $\overline{F}$–потенциально; б) $\mathrm{rot}\overline{F} = 0$, в) работа поля $\overline{F}$ по любому замкнутому контуру равна нулю; г) работа поля $\overline{F}$ зависит лишь от начальной и конечной точки пути.

86. Покажите, что (как и в плоском случае) работа потенциального поля по кривой в $\mathbb{R}^3$ равна разности потенциалов в конечной и начальной точках кривой. Укажите метод восстановления потенциала в трехмерном случае. Потенциально ли поле $\overline{F} = (x, y, z)$? Если да — найдите потенциал.