Эконометрика, 2017-2018, 1 модуль
Семинар 3
18.09.17 для
Группы Э_Б2015_Э_3
Семинарист О.А.Демидова

Задача 1. (Демидова О.А., Малахов Д.И. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М., «Юрайт», 2016, с.93, № 3.4)

Докажите, что $R^2 = \hat{r}_{XY}^2$, где $\hat{r}_{XY}$ - выборочный коэффициент корреляции X и Y.

Задача 2. (Демидова О.А., Малахов Д.И. Учебник и практикум для прикладного бакалавриата. М., «Юрайт», 2016, с.93, № 3.5)

Докажите, что для регрессий

$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$, $\hat{X} = \hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 Y$,

оцененных по одной и той же выборке $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, коэффициенты множественной детерминации R^2 совпадают, а оценки коэффициентов наклона связаны соотношением $\hat{\beta}_1 \hat{\alpha}_1 = R^2$.

Задача 3.. (Борзых Д.А., Демешев Б.Б., Эконометрика в задачах и упражнениях, Издание 2, URSS, 2017, с. 13, задача 1.17)

Какие из указанные моделей можно представить в линейном виде?

1. $y_i = \beta_1 + \frac{\beta_2}{x_i} + \varepsilon_i$;
2. $y_i = \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i)$;
3. $y_i = 1 + \frac{1}{\exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i)}$;
4. $y_i = \frac{1}{1 + \exp(\beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i)}$;
5. $y_i = x_i^{\beta_2} e^{\beta_1 + \varepsilon_i}$;
6. $y_i = \beta_1 \exp(\beta_2 x_i + \varepsilon_i)$.

Задача 4.. (Борзых Д.А., Демешев Б.Б., Эконометрика в задачах и упражнениях, Издание 2, URSS, 2017, с. 19, задача 2.4)

Пусть $y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i$ и $i = 1, \dots, 5$ — классическая регрессионная модель. Также имеются следующие данные: $\sum_{i=1}^5 y_i^2 = 55, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 3, \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 12, \sum_{i=1}^5 y_i = 15, \sum_{i=1}^5 x_i = 3$.

1. Найдите $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\mathrm{Corr}(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$.
2. Найдите TSS, ESS, RSS, R^2, σ^2.

Задача 5.. (Борзых Д.А., Демешев Б.Б., Эконометрика в задачах и упражнениях, Издание 2, URSS, 2017, с. 18, задача 2.3)

Рассматривается модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$, $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. При каких значениях параметров c_i несмещённая оценка $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^n c_i y_i / \sum_{i=1}^n c_i x_i$ имеет наименьшую дисперсию?

Задача 6.. (Борзых Д.А., Демешев Б.Б., Эконометрика в задачах и упражнениях, Издание 2, URSS, 2017, с. 26-27, задача 2.6)

Рассмотрите классическую линейную регрессионную модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Найдите $\mathbb{E}\hat{\beta}$. Какие из следующих оценок параметра β являются несмещёнными:

1. $\hat{\beta} = \frac{y_1}{x_1}$;
2. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_1}{x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n}{x_n}$;
3. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1} + \ldots + \frac{y_n}{x_n}\right)$;
4. $\hat{\beta} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$;
5. $\hat{\beta} = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}$;
6. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$;
7. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{n}\frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} + \ldots + \frac{1}{n}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$;
8. $\hat{\beta} = \frac{1}{n-1}\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} + \ldots + \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}\right)$;
9. $\hat{\beta} = \frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$;
10. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} + \frac{1}{2n}\left(\frac{y_1}{x_1} + \ldots + \frac{y_n}{x_n}\right)$;
11. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_n - y_1}{x_n - x_1} + \frac{1}{2}\frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$;
12. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$;
13. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\bar{y} - y_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$;
14. $\hat{\beta} = \frac{y_1 + 2y_2 + \ldots + n y_n}{x_1 + 2x_2 + \ldots + n x_n}$;
15. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n i(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n i(x_i - \bar{x})}$;
16. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$;
17. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i - \bar{y}}{x_i - \bar{x}}$.

Задача 7.. (Борзых Д.А., Демешев Б.Б., Эконометрика в задачах и упражнениях, Издание 2, URSS, 2017, с. 28-29, задача 2.7)

Рассмотрите классическую линейную регрессионную модель $y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$. Найдите $\mathrm{Var}(\hat{\beta})$.

1. $\hat{\beta} = \frac{y_1}{x_1}$;
2. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_1}{x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n}{x_n}$;
3. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\left(\frac{y_1}{x_1} + \ldots + \frac{y_n}{x_n}\right)$;
4. $\hat{\beta} = \frac{\bar{y}}{\bar{x}}$;
5. $\hat{\beta} = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}$;
6. $\hat{\beta} = \frac{1}{2}\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + \frac{1}{2}\frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}}$;
7. $\hat{\beta} = \frac{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$;
8. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$;
9. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(\bar{y} - y_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$;
10. $\hat{\beta} = \frac{y_1 + 2y_2 + \ldots + n y_n}{x_1 + 2x_2 + \ldots + n x_n}$;
11. $\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n i(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n i(x_i - \bar{x})}$;
12. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i}$;
13. $\hat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{y_i - \bar{y}}{x_i - \bar{x}}$.

Задача 8.. (Борзых Д.А., Демешев Б.Б., Эконометрика в задачах и упражнениях, Издание 2, URSS, 2017, с. 35, задача 2.13)

Рассматривается модель $y_i = \mu + \varepsilon_i$, где $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$ и $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $i \neq j$. При каких c_i несмещённая оцека

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$$

имеет наименьшую дисперсию?