

# ВОПРОСЫ К КОЛЛОКВИУМУ

## *Пределы и непрерывность функций.*

### ПМ, курс 1, модуль 2

**На коллоквиуме студент получает два вопроса из данного списка (иметь его при себе на бумажном носителе). Каждый вопрос оценивается из 5 баллов. Нужно знать определения и уметь формулировать утверждения.**

**Доказательство теорем не требуется.**

1. Дайте определения ограниченной (сверху, снизу) функции  $y=f(x)$ , монотонной функции, сложной функций. Расскажите об обратной функции. Приведите примеры.
2. Дайте определение последовательности. Расскажите о свойствах ограниченности и монотонности последовательностей. Приведите примеры.
3. Дайте определение пределов  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, -\infty, \infty$ . Приведите примеры.  
Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности.
4. Как связаны ограниченность и сходимость последовательности? Приведите примеры.  
Сформулируйте теорему Вейерштрасса о пределе последовательности.
5. Сформулируйте теорему об арифметических свойствах предела последовательностей.
6. Сформулируйте теоремы о предельном переходе в неравенствах и "о двух милиционерах" для последовательностей. Дайте определение числа  $e$ .
7. Определите окрестности  $O(\omega)$  и проколотые окрестности  $\overset{\circ}{O}(\omega)$  для символа  $\omega = x_0, +\infty, -\infty, \infty$ . Дайте общее определение предела  $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = \omega_l$  на языке окрестностей.  
Приведите поясняющие графики для случаев  $\omega = \{x_0, +\infty\}$ ,  $\omega_l = \{a, -\infty\}$ .
8. Дайте определение  $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = \omega_l$  на языке неравенств для случаев  $\omega = \{x_0, -\infty\}$ ,  $\omega_l = \{a, +\infty\}$ . Приведите (аналитически) примеры соответствующих функций.
9. Определите односторонние пределы функции в точке. Расскажите о связи предела в точке с односторонними пределами. Приведите примеры.
10. Определите бесконечно малые и бесконечно большие функции при  $x \rightarrow \omega$ . Поясните связь между ними и перечислите их основные свойства. Приведите примеры.
11. Расскажите о финальной ограниченности функций. Как это понятие связано с существованием конечного предела? Приведите примеры. Сформулируйте теорему об арифметических свойствах конечных пределов функций.

12. Сформулируйте теоремы о предельном переходе в неравенствах и "о двух милиционерах" для функций.
13. Дайте определение соотношения  $f(x)=o(g(x))$ ,  $x \rightarrow \omega$ . Приведите примеры. Дайте определение соотношения  $f(x)=O(g(x))$ ,  $x \rightarrow \omega$ . Приведите примеры.
14. Дайте различные (эквивалентные) определения эквивалентности функций при  $x \rightarrow \omega$  ( $\omega = x_0, +\infty, -\infty$ ). Сформулируйте теорему о замене функций на эквивалентные при вычислении предела. Можно ли делать такую замену в суммах? Приведите пример.
15. Дайте определение функции, непрерывной в точке и на промежутке. Изложите классификацию точек разрыва. Приведите примеры.
16. Сформулируйте теоремы: о непрерывности сложной функции; о непрерывности обратной функции; об арифметических свойствах непрерывных функций.
17. Что такое элементарная функция? Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций.
18. Напишите первый и второй замечательный предел. Расскажите о шкале бесконечностей при  $x \rightarrow +\infty$  и о выделении главного слагаемого из суммы функций.
19. Приведите таблицу эквивалентностей (с учётом возможной замены переменной). Запишите эти эквивалентности в виде равенств.
20. Сформулируйте лемму о вложенных отрезках, теорему Коши о промежуточном значении и следствие из неё. Объясните на примерах важность условий теоремы.
21. Изложите метод решения уравнений  $f(x)=0$  методом деления отрезка пополам. Приведите оценки точности.
22. Дайте определение подпоследовательности. Сформулируйте лемму Больцано–Вейерштрасса. Сформулируйте 1-ю теорему Вейерштрасса о функции непрерывной на отрезке. Объясните на примерах важность условий теоремы.
23. Дайте определение верхней (нижней) грани функции. Сформулируйте 2-ю теорему Вейерштрасса о функции непрерывной на отрезке. Объясните на примерах важность условий теоремы.
24. Дайте определение функции равномерно непрерывной на промежутке. Как связаны непрерывность и равномерная непрерывность? Сформулируйте теорему Кантора. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию  $y=1/x$  на  $(0,1]$ .
25. Исследуйте на равномерную непрерывность функции  $y=kx+b$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) и  $y=\sqrt{x}$  ( $x \in [0, +\infty)$ ).