

ВОПРОСЫ К КОЛЛОКВИУМУ

Пределы и непрерывность функций.

ПМ, курс 1, модуль 2

На коллоквиуме студент получает два вопроса из данного списка (иметь его при себе на бумажном носителе). Каждый вопрос оценивается из 5 баллов. Нужно знать определения и уметь формулировать утверждения.

Доказательство теорем не требуется.

1. Дайте определения ограниченной (сверху, снизу) функции $y = f(x)$, монотонной функции, сложной функций. Расскажите об обратной функции. Приведите примеры.
2. Дайте определение последовательности. Расскажите о свойствах ограниченности и монотонности последовательностей. Приведите примеры.
3. Дайте определение пределов $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty, -\infty, \infty$. Приведите примеры. Сформулируйте критерий Коши сходимости последовательности.
4. Как связаны ограниченность и сходимость последовательности? Приведите примеры. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о пределе последовательности.
5. Сформулируйте теорему об арифметических свойствах предела последовательностей.
6. Сформулируйте теоремы о предельном переходе в неравенствах и "о двух милиционерах" для последовательностей. Дайте определение числа ε .
7. Определите окрестности $O(\omega)$ и проколотые окрестности $\dot{O}(\omega)$ для символа $\omega = x_0, +\infty, -\infty, \infty$. Дайте общее определение предела $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = \omega_1$ на языке окрестностей. Приведите поясняющие графики для случаев $\omega = \{x_0, +\infty\}$, $\omega_1 = \{a, -\infty\}$.
8. Дайте определение $\lim_{x \rightarrow \omega} f(x) = \omega_1$ на языке неравенств для случаев $\omega = \{x_0, -\infty\}$, $\omega_1 = \{a, +\infty\}$. Приведите (аналитически) примеры соответствующих функций.
9. Определите односторонние пределы функции в точке. Расскажите о связи предела в точке с односторонними пределами. Приведите примеры.
10. Определите бесконечно малые и бесконечно большие функции при $x \rightarrow \omega$. Поясните связь между ними и перечислите их основные свойства. Приведите примеры.
11. Расскажите о финальной ограниченности функций. Как это понятие связано с существованием конечного предела? Приведите примеры. Сформулируйте теорему об арифметических свойствах конечных пределов функций.

12. Сформулируйте теоремы о предельном переходе в неравенствах и "о двух милиционерах" для функций.
13. Дайте определение соотношения $f(x)=o(g(x))$, $x\rightarrow\omega$. Приведите примеры. Дайте определение соотношения $f(x)=O(g(x))$, $x\rightarrow\omega$. Приведите примеры.
14. Дайте различные (эквивалентные) определения эквивалентности функций при $x\rightarrow\omega$ ($\omega=x_0, +\infty, -\infty$). Сформулируйте теорему о замене функций на эквивалентные при вычислении предела. Можно ли делать такую замену в суммах? Приведите пример.
15. Дайте определение функции, непрерывной в точке и на промежутке. Изложите классификацию точек разрыва. Приведите примеры.
16. Сформулируйте теоремы: о непрерывности сложной функции; о непрерывности обратной функции; об арифметических свойствах непрерывных функций.
17. Что такое элементарная функция? Сформулируйте теорему о непрерывности элементарных функций.
18. Напишите первый и второй замечательный предел. Расскажите о шкале бесконечностей при $x\rightarrow+\infty$ и о выделении главного слагаемого из суммы функций.
19. Приведите таблицу эквивалентностей (с учётом возможной замены переменной). Запишите эти эквивалентности в виде равенств.
20. Сформулируйте лемму о вложенных отрезках, теорему Коши о промежуточном значении и следствие из неё. Объясните на примерах важность условий теоремы.
21. Изложите метод решения уравнений $f(x)=0$ методом деления отрезка пополам. Приведите оценки точности.
22. Дайте определение подпоследовательности. Сформулируйте лемму Больцано–Вейерштрасса. Сформулируйте 1-ю теорему Вейерштрасса о функции непрерывной на отрезке. Объясните на примерах важность условий теоремы.
23. Дайте определение верхней (нижней) грани функции. Сформулируйте 2-ю теорему Вейерштрасса о функции непрерывной на отрезке. Объясните на примерах важность условий теоремы.
24. Дайте определение функции равномерно непрерывной на промежутке. Как связаны непрерывность и равномерная непрерывность? Сформулируйте теорему Кантора. Исследуйте на равномерную непрерывность функцию $y=1/x$ на $(0,1]$.
25. Исследуйте на равномерную непрерывность функции $y=kx+b$ ($x\in\mathbb{R}$) и $y=\sqrt{x}$ ($x\in[0,+\infty)$).