

Вопросы к коллоквиуму
“Сравнение множеств. Мера и интеграл”
Функциональный анализ
БПМ 161-164, 3-й модуль, 2-й курс
2017/2018 учебный год
В. Лебедев

На коллоквиуме студент получает два вопроса из этого вопросника. Коллоквиум имеет характер блиц-опроса. Время на ответ 3–5 минут. Студент должен продемонстрировать знание определений и формулировок утверждений. Доказывать утверждения не требуется. Пользоваться вопросником разрешается.

1. Запишите формулы двойственности для операций пересечения и объединения.
2. Определите понятие эквивалентности $X \sim Y$ множеств X и Y по Кантору.
3. Дайте определение счетного множества. Какие из следующих множеств являются счетными: множество $\mathbb{Q}$ рациональных чисел; множество $\mathbb{Q}^{2018}$; множество $\mathbb{Q}^\infty$?
4. Всегда ли является счетным объединение не более чем счетного набора счетных множеств?
5. Пусть X бесконечное множество и A не более чем счетное. Эквивалентны ли множества X и $X \cup A$?
6. Что такое несчетное множество? Сформулируйте утверждение о том, что прямая $\mathbb{R}$ является несчетным множеством; поясните, как отсюда следует существование трансцендентных чисел.
7. Дайте определение континуального множества. Являются ли континуальными множества $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\infty$? Укажите взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^\infty$.
8. Расскажите о понятии мощности $|X|$ множества X . Что означают записи $|X| = |Y|$, $|X| \geq |Y|$, $|X| > |Y|$? Сформулируйте теорему Кантора–Бернштейна о сравнении множеств.
9. Является ли множество $C(I)$ непрерывных функций на отрезке I континуальным? Почему?
10. Что можно сказать о мощности множества всех подмножеств множества X по сравнению с мощностью X .

11. Изложите (схематично) построение меры Лебега в R^n . Приведите примеры множеств лебеговой меры 0 на прямой и плоскости. Что можно сказать о мере счетного множества. Приведите пример несчетного множества на прямой, имеющего меру нуль (троичное множество Кантора).

12. Всякое ли множество на прямой измеримо (по Лебегу)?

13. Сформулируйте утверждение о том, что класс измеримых множеств замкнут относительно операций (счетного) объединения, пересечения и перехода к дополнению.

14. Что означает фраза “свойство X выполнено почти всюду”? Дайте определение сходимости последовательности функций почти всюду и сходимости по мере. Как они связаны между собой? Приведите примеры.

15. Дайте определение измеримой функции. Сформулируйте утверждение о том, что класс измеримых функций замкнут относительно арифметических операций и поточечного предельного перехода.

16. Сформулируйте теоремы Егорова и Лузина об исправлении на множестве малой меры.

17. Определите интеграл Лебега (включая интеграл по всему R^n — ограничьтесь одномерным случаем).

18. Опишите (с обоснованием) связь между интегралом Лебега и интегралом Римана (включая и случай несобственного интеграла Римана).

19. Сформулируйте теорему Лебега о мажорируемом предельном переходе.

20. Сформулируйте теорему Леви о предельном переходе и ее следствие для рядов.

21. Сформулируйте лемму Фату о предельном переходе.

22. Дайте определение пространства с мерой и интеграла в случае абстрактного пространства с мерой.

23. Что такое функция распределения? Определите меру Стильтьеса на R . Что такое абсолютно непрерывная мера? Что такое дискретная мера.

24. Что такое интеграл Стильтьеса? Как вычисляется интеграл по абсолютно непрерывной и по дискретной мере.