

## VI Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронцового

*Высшая лига. II тур. 26 ноября 2005 года. г.Ижевск*

1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  нашлась такая точка  $P$ , что  $\angle PBA = \angle PCB$ ,  $\angle PBC = \angle PAC$ . Доказать, что  $AB < \sqrt{2}AC$ .
2. Найдите наибольшую возможную длину интервала числовой прямой, что для любых чисел  $a_0, a_1, \dots, a_{2n-1}$  из этого интервала многочлен  $x^{2n} + a_{2n-1}x^{2n-1} + \dots + a_1x + a_0$  не имеет действительных корней. (Концы интервала могут в него не включаться)
3. Доказать для положительных чисел  $a, b$  и  $c$  неравенство:  $\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+3a} + \frac{c}{a+4b} \geq \frac{2}{3}$ .
4. Новая шахматная фигура «лягушка» поочередно делает ходы на 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... клетки (по горизонтали или вертикали). Какое наибольшее количество клеток она может пройти на доске  $8 \times 8$  (без учёта исходной клетки), если ей нельзя вставить на клетки, на которых она уже была?
5. На окружности даны три различные точки  $A, B$  и  $C$ . С помощью циркуля и линейки постройте на окружности точку  $D$  так, чтобы в выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  можно было вписать окружность.
6. Найдите наибольшее 13-значное натуральное число, любые четыре подряд идущие цифры которого составляют четырёхзначное число, кратное 13.
7. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску наибольшее количество не бьющих друг друга слонов?
8. Каждый делегат футбольной конференции при выборах тренерского состава сборной написал список из десяти тренеров. Делегата устраивает тренерский совет, если в него входит хотя бы один тренер из его списка. Оказалось, что для любых шести делегатов существует устраивающий их совет из двух тренеров. Верно ли, что конференция сумеет выбрать устраивающий всех совет из 10 тренеров?

## VI Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронцового

*Первая лига. Бой за 1-4 места. II тур. 26 ноября 2005 года. г.Ижевск*

1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  нашлась такая точка  $P$ , что  $\angle PBA = \angle PCB$ ,  $\angle PBC = \angle PAC$ . Доказать, что  $AB < \sqrt{2}AC$ .
2. Сколько решений имеет ребус  $\sqrt{3 \times Л \times О} = Л \times Е \times Н \times Б$ ? (одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры)
3. Доказать для положительных чисел неравенство  $\sqrt[3]{(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)} \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} + \sqrt[3]{y_1 y_2 y_3}$ .
4. Новая шахматная фигура «лягушка» поочередно делает ходы на 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... клетки (по горизонтали или вертикали). Какое наибольшее количество клеток она может пройти на доске  $8 \times 8$  (без учёта исходной клетки), если ей нельзя вставить на клетки, на которых она уже была?
5. На окружности даны три различные точки  $A, B$  и  $C$ . С помощью циркуля и линейки постройте на окружности точку  $D$  так, чтобы в выпуклый четырёхугольник  $ABCD$  можно было вписать окружность.
6. Найдите наибольшее 13-значное натуральное число, любые четыре подряд идущие цифры которого составляют четырёхзначное число, кратное 13.
7. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску наибольшее количество не бьющих друг друга слонов?
8. Каждый делегат футбольной конференции при выборах тренерского состава сборной написал список из четырёх тренеров. Делегата устраивает тренерский совет, если в него входит хотя бы один тренер из его списка. Оказалось, что для любых шести делегатов существует устраивающий их совет из двух тренеров. Верно ли, что конференция сумеет выбрать устраивающий всех совет из 4 тренеров?

**VI Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронцового**

*Первая лига. Бой за 5-8 места. II тур. 26 ноября 2005 года. г.Ижевск*

1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  нашлась такая точка  $P$ , что  $\angle PBA = \angle PCB$ ,  $\angle PBC = \angle PAC$ . Доказать, что  $AB < \sqrt{2}AC$ .
2. Сколько решений имеет ребус  $\sqrt{3 \times L \times O} = L \times E \times H \times B$ ? (одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры)
3. В выпуклом  $4n$ -угольнике ( $n > 1$ ) никакие 3 диагонали не пересекаются в одной точке. Докажите, что в этом  $4n$ -угольнике можно провести  $4n$  диагоналей так, что количество их точек пересечения будет превосходить  $4n^2$  ( $n$  – натуральное число).
4. Новая шахматная фигура «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... клетки (по горизонтали или вертикали). Может ли лягушка обойти всю доску  $8 \times 8$ , побывав на каждой клетке ровно 1 раз?
5. В тетраэдре противоположные рёбра равны (для каждой пары). Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, перпендикулярны этим рёбрам.
6. Найдите наибольшее 13-значное натуральное число, любые четыре подряд идущие цифры которого составляют четырёхзначное число, кратное 13.
7. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску наибольшее количество не бьющих друг друга слонов?
8. Каждый делегат футбольной конференции при выборах тренерского состава сборной написал список из четырёх тренеров. Делегата устраивает тренерский совет, если в него входит хотя бы один тренер из его списка. Оказалось, что для любых шести делегатов существует устраивающий их совет из двух тренеров. Верно ли, что конференция сумеет выбрать устраивающий всех совет из 4 тренеров?

**VI Республиканский математический турнир памяти А. Б. Воронцового**

*Первая лига. Бой за 5-8 места. II тур. 26 ноября 2005 года. г.Ижевск*

1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  нашлась такая точка  $P$ , что  $\angle PBA = \angle PCB$ ,  $\angle PBC = \angle PAC$ . Доказать, что  $AB < \sqrt{2}AC$ .
2. Сколько решений имеет ребус  $\sqrt{3 \times L \times O} = L \times E \times H \times B$ ? (одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры)
3. В выпуклом  $4n$ -угольнике ( $n > 1$ ) никакие 3 диагонали не пересекаются в одной точке. Докажите, что в этом  $4n$ -угольнике можно провести  $4n$  диагоналей так, что количество их точек пересечения будет превосходить  $4n^2$  ( $n$  – натуральное число).
4. Новая шахматная фигура «лягушка» поочерёдно делает ходы на 1, 2, 3, 1, 2, 3, ... клетки (по горизонтали или вертикали). Может ли лягушка обойти всю доску  $8 \times 8$ , побывав на каждой клетке ровно 1 раз?
5. В тетраэдре противоположные рёбра равны (для каждой пары). Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер, перпендикулярны этим рёбрам.
6. Найдите наибольшее 13-значное натуральное число, любые четыре подряд идущие цифры которого составляют четырёхзначное число, кратное 13.
7. Сколькими способами можно поставить на шахматную доску наибольшее количество не бьющих друг друга слонов?
8. Каждый делегат футбольной конференции при выборах тренерского состава сборной написал список из четырёх тренеров. Делегата устраивает тренерский совет, если в него входит хотя бы один тренер из его списка. Оказалось, что для любых шести делегатов существует устраивающий их совет из двух тренеров. Верно ли, что конференция сумеет выбрать устраивающий всех совет из 4 тренеров?