XII Всероссийская смена «Юный математик».
ВДЦ «Орлёнок»
XI Южный математический турнир.
Старт-лига. 21 сентября 2016 года.
1 тур. Высшая лига. *Решения*.

1. Число 2016 представьте в виде суммы наименьшего числа палиндромов с одинаковым числом разрядов.

Ответ: 5 чисел, например, 888+282+282+282+282=2016.

Решение: Заметим, что 2 палиндрома могли быть только четырёхзначными, тогда они начинаются на 1, а их сумма оканчивается на 2, а нам надо 6. Предположим, что найдутся 3 или 4 числа. Тогда они трёхзначные. Сумма последних цифр может быть 6, 16, 26 или 36, т.к. складываются максимум 4 цифры. Но тогда и сумма первых цифр будет такой же. При 26 и 36 вся сумма будет больше 2600 и 3600, а при 6 вся сумма даже с учётом возможного перехода из второго разряда (максимум 3) будет меньше 1000. Значит, эта сумма равна 16, тогда сумма цифр второго разряда должна равняться 40, чтобы добавить 4 к сумме 16 в третьем разряде. Но это возможно только при сложении не менее чем 5 цифр. Значит, у нас должно быть хотя бы 5 чисел.

2. В новогоднюю ночь каждый ученик класса принял 12 звонков от одноклассников, причём каждые двое говорили друг с другом не более одного раза. Каким наименьшим может быть число учеников в этом классе?

Ответ: 25. ***Пример:*** Расположим 25 учеников по кругу и пусть каждый позвонил следующим за ним по часовой стрелке 12 одноклассникам. При это каждый принял звонки от 12 человек, идущих от него против часовой стрелки. ***Доказательство оценки*:** Пусть было n школьников, тогда было $12n$ звонков, значит, по принципу Дирихле найдётся человек, который позвонил хотя бы 12 одноклассникам. Но так как с каждым он говорил не более одного раза, то в классе, кроме него, ещё есть хотя бы 24 человека – 12 позвонили ему и ещё хотя бы 12 другим позвонил он сам. Значит, в классе не менее 25 человек.

3. Какое наибольшее количество целочисленных точек можно выбрать в пространстве так, чтобы ни один из отрезков с концами в них не содержал ещё две целочисленные точки?

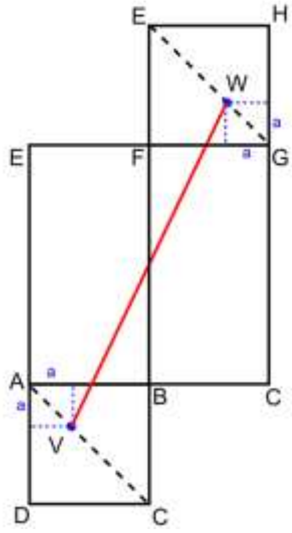
Ответ: 27 точек. ***Пример:*** Возьмём все $27=3^3$ целочисленных точек (x, y, z), у которых каждая координата будет равна 0, 1 или 2. ***Доказательство оценки*:** Рассмотрим остатки при делении на 3 у наших точек (0, 1 или 2). Тогда существует 27 вариантов тройки остатков. Если бы у нас было не меньше 28 точек, то по принципу Дирихле нашлись бы две точки (A и B) с одинаковым набором остатков. Тогда у этих двух точек координаты отличаются на числа, кратны 3, – $A(x, y, z)$, $B(x+3a, y+3b, z+3c)$, а на отрезке AB найдутся ещё две целочисленные точки $C(x+a, y+b, z+c)$ и D $(x+2a, y+2b, z+2c)$ – противоречие. Значит, можно выбрать не более 27 точек.

4. Найдите наименьшее натуральное число, квадрат которого оканчивается на 2016.

Ответ: 996. ***Решение:*** Пусть наше число равно N, тогда число $(N^2–16)$ оканчивается на 2000. Значит, $(N^2–16)=(N–4)(N+4)$ делится на $2000=2^4\cdot5^3$. Делиться на 5 может только один из двух множителей $(N–4)$ и $(N+4)$, т.к. их разность 8 не делится на 5. При этом оба множителя должны быть чётными и одновременно делящимися на 4. Таким образом, один из этих множителей делится на $2^2\cdot5^3=500$. Разобрав случаи для

(N–4) и (N+4) чисел 0, 500, 1000, обнаружим, что первым из квадратов, оканчивающихся на 2016, будет $996^2=992016$.

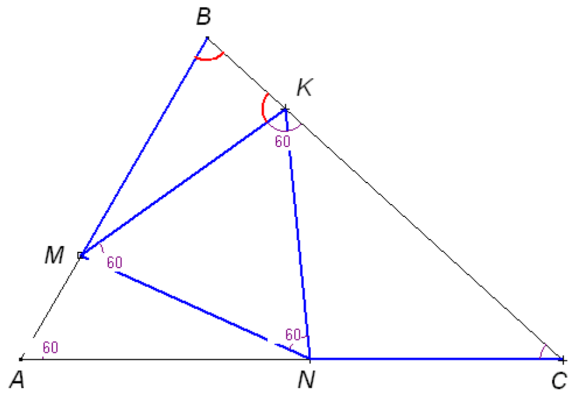
5. Вася приклеил два одинаковых кубика с ребром 10 см друг к другу по грани. Существуют ли на поверхности получившегося параллелепипеда две точки, расстояние между которыми по поверхности больше 30 см?



Ответ: да, существуют. ***Пример:*** Например, искомые точки V и W находятся на квадратных гранях, симметричны друг другу относительно центра параллелепипеда и удалены от каждой из ближайших сторон граней на $a = 5(\sqrt{3} - 1) \approx 3{,}66$ см. Квадрат кратчайшего пути между ними равен $8(5\sqrt{3} - 5)^2 + 800 =$

$400(4 - \sqrt{3})$, а сам путь составляет примерно 30,12 см — лишь на миллиметр с небольшим длиннее пути между центрами квадратных граней. ***Комментарий***: Необходимо рассмотреть ещё другие случаи развёрток, дающие большие расстояния.

6. Угол *A* треугольника *ABC* равен 60°. На стороне *AB* взята точка *M*, а на стороне *AC* – точка *N* такие, что *BM*=*MN*=*NC*. Докажите, что на стороне *BC* можно найти точку *K*, чтобы треугольник *MNK* был равносторонним.



Решение: Рассмотрим такую точку K, что треугольник MNK – прямоугольный, а точка K лежит по разные стороны с точкой A относительно MN. Докажем, что точка K будет лежать на отрезке BC, убедившись в том, что $\angle BKC$=180°. Пусть $\angle AMN=\alpha$, $\angle ANM=\beta$, $\alpha+\beta=180°-\angle MAN=180°-60°=120°$. Тогда $\angle BMK=180°-\alpha-60°=120°-\alpha$, $\angle CNK=180°-\beta-60°=120°$, а из равнобедренных треугольников BMK и CNK находим $\angle BKM=(180°-\angle BMK)/2=(180°-120°+\alpha)/2=30°+\alpha/2$, $\angle CKN=(180°-\angle CNK)/2=(180°-120°+\beta)/2=30°+\beta/2$. Значит, $\angle BKC=\angle BKM+\angle MKN+\angle NKC=30°+\alpha/2+60°+30°+\beta/2=120°+(\alpha+\beta)/2=120°+120°/2=180°$, т.е. точка K будет лежать на отрезке BC, что и требовалось доказать.

7. Сколькими способами на шахматную доску можно поставить 31 коня, не бьющих друг друга?

Ответ: 68 способов.

Решение: Разобьём доску на 32 пары клеток ходом коня (конеходы), для этого разобьём поле на прямоугольники 2×4, каждый из которых разбивается на конеходы. В каждом конеходе может стоять максимум 1 конь, значит, ровно 1 конеход будет пустым. Тогда при разбиении доски на 4 квадрата 4×4 получим, что ровно

К		К		К		К	
	К		К		К		К
К		К		К		К	
	К		К		К		К
К		К			-		-
	К		К	-		-	
К		К			-		
	К		К	-			

рис. 1

	К		К		К		К
К		К		К		К	
	К		К		К		К
К		К		К		К	
	К		К	-		-	
К		К			-		-
	К		К	-			
К		К			-		

рис. 2

3 из них будут содержать по 8 коней, а один квадрат содержит 7 коней. Начав в любом квадрате с 8 конями рассматривать расстановку, мы придём к тому, что в каждом из них кони стоят на одном цвете, при этом в соседних квадратах кони также должны оказаться на одном цвете. В результате имеем 2 варианта расстановки коней в этих квадратах (см. рис.). Разбор расстановки в 4-м квадрате показывает, что в первом случае остальные 7 коней стоят на том же цвете, а во втором случае, кроме расстановки 7 коней на том же цвете ещё возможна расстановка, когда один конь попал на клетку другого цвета и при этом находится в углу. В результате существуют 64 расстановки, когда все кони стоят на одном цвете и одна клетка этого цвета пуста, а также ещё 4 расстановки, когда 30 коней стоят на одном цвете, а ещё один конь на другом цвете в углу доски.

8. Имеются три картонных клетчатых прямоугольника 5×3, 5×9 и 5×15. Двое по очереди вырезают из них любой клетчатый прямоугольник (возможно весь) и выбрасывают. Выигрывает тот, кто выбросит последнюю клетку. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Выиграет первый игрок. ***Решение:*** Первый игрок из прямоугольника 5×15 вырезает часть 5×3, оставив вместо него два прямоугольника 5×3 и 5×9. Теперь возникают две пары одинаковых прямоугольников 5×3 и 5×9, после чего первый совершает ходы, симметричные ходам второго в аналогичном прямоугольнике.

1 тур. Первая лига. *Решения.*

1. Число 2016 представьте в виде суммы наименьшего числа трёхразрядных палиндромов.

Ответ: 5 чисел, например, 888+282+282+282+282=2016.

Решение: Заметим, что 2 палиндрома могли быть только четырёхзначными. Предположим, что найдутся 3 или 4 трёхзначных числа. Сумма последних цифр может быть 6, 16, 26 или 36, т.к. складываются максимум 4 цифры. Но тогда и сумма первых цифр будет такой же. При 26 и 36 вся сумма будет больше 2600 и 3600, а при 6 вся сумма даже с учётом возможного перехода из второго разряда (максимум 3) будет меньше 1000. Значит, эта сумма равна 16, тогда сумма цифр второго разряда должна равняться 40, чтобы добавить 4 к сумме 16 в третьем разряде. Но это возможно только при сложении не менее чем 5 цифр. Значит, у нас должно быть хотя бы 5 чисел.

2. В новогоднюю ночь каждый ученик класса принял 12 звонков от одноклассников, причём каждые двое говорили друг с другом не более одного раза. Каким наименьшим может быть число учеников в этом классе?

Ответ: 25. ***Пример:*** Расположим 25 учеников по кругу и пусть каждый позвонил следующим за ним по часовой стрелке 12 одноклассникам. При это каждый принял звонки от 12 человек, идущих от него против часовой стрелки. ***Доказательство оценки*:** Пусть было n школьников, тогда было $12n$ звонков, значит, по принципу Дирихле найдётся человек, который позвонил хотя бы 12 одноклассникам. Но так как с каждым он говорил не более одного раза, то в классе, кроме него, ещё есть хотя бы 24 человека – 12 позвонили ему и ещё хотя бы 12 другим позвонил он сам. Значит, в классе не менее 25 человек.

3. Бригада, состоящая из 4 каменщиков и одного прораба, выполнила заказ. каменщики получили по 2000 рублей каждый, а прораб – на 400 рублей больше среднего заработка по бригаде. Сколько получил прораб?

<u>Ответ:</u> 2500 рублей. ***<u>Решение 1:</u>*** 400 рублей превышения над средним заработком образуются за счёт того, что каждый каменщик получил на 400:4=100 рублей меньше среднего заработка. Значит, средний заработок равен 2000+100=2100 рублей. а прораб получил 21000+400=2500 рублей.

<u>Решение 2:</u> Составим уравнение. Пусть x (рублей) – средний заработок, тогда всеми 5 строителями получено $5x=4\cdot 2000+(x+400)$ рублей, откуда $4x=8400$, $x=2100$, а заработок прораба равен 2100+400=2500.

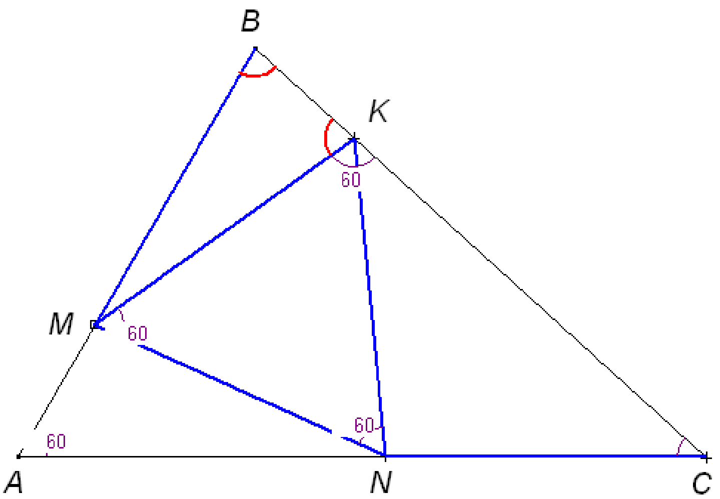
4. Найдите какое-нибудь натуральное число, квадрат которого оканчивается на 2016.

<u>Ответ:</u> наименьшее такое число – 996**.** ***<u>Решение:</u>*** Пусть наше число равно N, тогда число $(N^2–16)$ оканчивается на 2000. Значит, $(N^2–16)=(N–4)(N+4)$ делится на $2000=2^4\cdot 5^3$. Делиться на 5 может только один из двух множителей $(N–4)$ и $(N+4)$, т.к. их разность 8 не делится на 5. При этом оба множителя должны быть чётными и одновременно делящимися на 4. Таким образом, один из этих множителей делится на $2^2\cdot 5^3=500$. Разобрав случаи для $(N–4)$ и $(N+4)$ чисел 0, 500, 1000, обнаружим, что первым из квадратов, оканчивающихся на 2016, будет $996^2=992016$.

5. Треугольник разрезан на равносторонние треугольники. Верно ли, что исходный треугольник – равносторонний?

<u>Ответ:</u> да, равносторонний**.** ***<u>Решение:</u>*** Рассмотрим каждый угол треугольника. Он должен состоять из углов по 60° треугольников разрезания, значит. равен либо 60°, либо 120°. Но угла в 120° в исходном треугольнике быть не может, т.к. иначе два других угла будут меньше 60° в силу того, что вся сумма углов равна 180°. Значит, все углы треугольника равны 60° и он является равносторонним.

6. Угол *A* треугольника *ABC* равен 60°. На стороне *AB* взята точка *M*, а на стороне *AC* – точка *N* такие, что *BM*=*MN*=*NC*. Докажите, что на стороне *BC* можно найти точку *K*, чтобы треугольник *MNK* был равносторонним.



<u>Решение</u>**:** Рассмотрим такую точку *K*, что треугольник *MNK* – прямоугольный, а точка *K* лежит по разные стороны с точкой *A* относительно *MN*. Докажем, что точка К будет лежать на отрезке *BC*, убедившись в том, что $\angle BKC=180°$. Пусть $\angle AMN=\alpha$, $\angle ANM=\beta$, $\alpha+\beta=180°–\angle MAN=180°–60°=120°$. Тогда $\angle BMK=180°–\alpha–60°=120°–\alpha$, $\angle CNK=180°–\beta–60°=120°$, а из равнобедренных треугольников *BMK* и *CNK* находим $\angle BKM=(180°–\angle BMK)/2=(180°–120°+\alpha)/2=30°+\alpha/2$, $\angle CKN=(180°–\angle CNK)/2=(180°–120°+\beta)/2=30°+\beta/2$. Значит,

∠*BKC*=∠*BKM*+∠*MKN*+∠*NKC*= 30°+α/2+60°+30°+β/2= 120°+(α+β)/2=120°+120°/2=180°.

7. Сколькими способами на шахматную доску можно поставить 32 коня, не бьющих друг друга?

Ответ: 2 способа, когда все кони стоят на клетках одного цвета шахматной раскраски.

Решение 1: Рассмотрим гамильтонов цикл коня (см. рисунок) на шахматной доске. В нём кони не могут находиться в соседних клетках. Значит, между любыми двумя соседними конями в цикле есть промежуток. Получаем 32 коня с 32 промежутками в 32 пустых клетки в сумме. Значит, в каждом промежутке будет ровно по 1 пустой клетке. Тогда все 32 коня будут стоять на клетках одного цвета, т.к. в гамильтонов цикле клетки чередуются по цвету.

50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

Решение 2: Разобьём доску на 32 пары клеток ходом коня («конеходы»), для этого разобьём поле на прямоугольники 2×4, каждый из которых разбивается на конеходы (см. рис. – клетки одного конехода пронумерованы одинаковыми числами). В каждом конеходе может стоять максимум 1 конь, значит, в примера на 32 коня в каждом конеходе ровно 1 конь. Начнём разбирать расстановку коней с первого конехода. <u>*1 случай*</u>. В первом конеходе конь стоит на чёрной клетке (*a*1 – левый нижний угол). Тогда белая клетка под номером 10 побита, значит, в 10-м конеходе конь стоит на чёрной клетке (*d*4) и в свою очередь бьёт белые клетки под номерами 18, 17, 23, 22, 14, 7, значит, в конеходах под этими номерами кони стоят в чёрных клетках и бьют белые клетки под номерами … и т.д. В силу связности графа ходов коня мы доберёмся до всех чёрных клеток, которые окажутся занятыми конями. <u>*2 случай*</u>. В первом конеходе конь стоит на белой клетке (*c*2). Рассуждая аналогично первому случаю, получим, что тогда заняты все белые клетки.

8	27	28	25	26	31	32	29	30
7	25	26	27	28	29	30	31	32
6	19	20	17	18	23	24	21	22
5	17	18	19	20	21	22	23	24
4	11	12	9	10	15	16	13	14
3	9	10	11	12	13	14	15	16
2	3	4	1	2	7	8	5	6
1	1	2	3	4	5	6	7	8
	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*

8. Имеются три картонных клетчатых прямоугольника 5×3, 5×9 и 5×15. Двое по очереди вырезают из них любой клетчатый прямоугольник (возможно весь) и выбрасывают. Выигрывает тот, кто выбросит последнюю клетку. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: Выиграет первый игрок. ***Решение:*** Первый игрок из прямоугольника 5×15 вырезает часть 5×3, оставив вместо него два прямоугольника 5×3 и 5×9. Теперь возникает две пары одинаковых прямоугольников 5×3 и 5×9, после чего первый совершает ходы, симметричные ходам второго в аналогичном прямоугольнике.