

Математический анализ: ПМ, 2017–2018

Промежуточный экзамен, модули 3–4

На устном экзамене студент получает два теоретических вопроса и две задачи.

Теоретические вопросы оцениваются из 3 баллов, задачи – из 2 баллов.

1. Дайте определение первообразной и неопределенного интеграла, укажите их основные свойства. Докажите теорему об общем виде первообразной. Выпишите таблицу первообразных (основную и дополнительную).

2. Расскажите о методе подстановки в неопределенном интеграле (замена переменной и внесение под знак дифференциала). Вычислите

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx, \quad \int \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

3. Выведите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла. Вычислите $\int e^x \cos x dx$.

4. Перечислите элементарные рациональные функции. Сформулируйте теорему о представлении рациональной функции в виде суммы элементарных. Запишите такое представление с неопределёнными коэффициентами для функции

$$R(x) = \frac{4x^3 - 2x^2 + x - 3}{x(x+1)^3(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)^2}.$$

5. Расскажите об интегрировании элементарных рациональных функций первых трёх типов. Вычислите $\int \frac{(x-1) dx}{x^2 + 2x + 2}$.

6. Выведите рекуррентное соотношение для $I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$, $n \geq 1$, и вычислите

$$\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

7. Расскажите, как сводятся к интегрированию рациональных функций интегралы

$$\int R_1(a^x) dx, \quad \int R_2(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx,$$

где R_1, R_2 – рациональные выражения от соответствующих переменных. Вычислите

$$\int \frac{dx}{e^{2x} + e^x}, \quad \int \frac{\sqrt{x-1}}{x+2} dx.$$

8. Расскажите о тригонометрических интегралах $\int R(\cos x, \sin x) dx$ и об их сведении к

интегралам от рациональных функций при помощи двух различных замен переменной

через тангенс, вычислите $\int \frac{dx}{2 - \cos x}$. Вычислите, также, $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx$.

9. Расскажите о вычислении интегралов $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx$ при помощи эйлеровых подстановок.

10. Дайте определение функции интегрируемой на отрезке и ее определенного интеграла. Поясните геометрический смысл определенного интеграла. Докажите, что функция Дирихле не интегрируема. Докажите, что всякая интегрируемая функция ограничена.

11. Выведите свойство линейности и сформулируйте свойство аддитивности определенного интеграла. Расскажите (с обоснованием), что происходит с интегралом при изменении функции в конечном числе точек.

12. Расскажите о критерии Лебега интегрируемости функции. Докажите интегрируемость непрерывной и кусочно непрерывной функции. Докажите теорему об интегрируемости модуля интегрируемой функции и оценку

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

13. Докажите теоремы об интегрировании неравенств и об оценке определенного интеграла. Докажите теорему о среднем значении для определённого интеграла.

14. Докажите теоремы о непрерывности и дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом. Выведите формулу Ньютона–Лейбница.

15. Расскажите о методе подстановки в определенном интеграле. С его помощью вычислите $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $\int_1^2 \frac{x dx}{x^4 + 1}$. Запишите формулу интегрирования по частям для опре-

деленного интеграла. Вычислите $\int_1^e x \ln^2 x dx$.

16. Дайте определение гладкой кривой на плоскости (заданной явно или параметрически) и её длины. Приведите формулы для вычисления длины кривой. Найдите длину дуги параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$.

17. Выведите формулу для вычисления массы отрезка с заданным законом распределения плотности и формулу для работы переменной силы на прямолинейном пути. Расскажите о вычислении объема тела с известным законом изменения поперечного сечения. Получите формулу для объёма шара, используя формулу для площади круга.

18. Выведите формулу для вычисления объема тела вращения вокруг оси OX .

Вычислите объем тела, полученного вращением фигуры $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \sin^2 x$ вокруг оси OX .

19. Изложите методы прямоугольников и трапеций для приближенного вычисления определённых интегралов. Приведите оценки погрешности вычислений.

20. Дайте определение несобственных интегралов по бесконечному и конечному промежутку. Исследуйте на сходимость интегралы Дирихле

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}.$$

21. Выведите признак сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Выведите предельный признак сравнения.

22. Дайте определение абсолютной и условной сходимости несобственных интегралов, расскажите о связи между сходимостью интеграла от $f(x)$ и от $|f(x)|$. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha} dx$$

при различных $\alpha > 0$.

23. Расскажите о вычислении несобственных интегралов при помощи методов интегрирования по частям и замены переменной. Вычислите интеграл $\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$ и исследуйте на сходимость $\int_1^{\infty} \sin x^2 dx$

24. Дайте определение сходящегося числового ряда и его суммы. Как связаны сходимость ряда и его остатка? Исследуйте *по определению* сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} c, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^n \quad (c, q = \text{const}).$$

Докажите необходимый признак сходимости ряда. Покажите (*по определению*), что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

25. Выведите признак сравнения и предельный признак сравнения для числовых рядов с неотрицательными членами.

26. Докажите признаки сходимости Даламбера и Коши. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}$?

27. Выведите интегральный признак сходимости числового ряда. Исследуйте на сходимость при разных значениях $\alpha > 0$ ряды Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

28. Дайте определение абсолютной и условной сходимости числовых рядов, установите связь между сходимостью ряда и ряда из модулей. Докажите теорему о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда. Сформулируйте теорему о перестановке членов условно сходящегося ряда.

29. Докажите теорему Лейбница о знакочередующихся рядах. Для рядов Лейбница выведите оценку уклонения частичной суммы от суммы ряда.

30. Сформулируйте признак Дирихле и выведите из него признак Абеля сходимости числовых рядов. Исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ при различных $x \in \mathbb{R}$.

31. Что такое \mathbb{R}^n ? Определите шар, окрестность и проколотую окрестность точки в \mathbb{R}^n , предел последовательности точек в \mathbb{R}^n . Дайте определения ограниченного, открытого и замкнутого множества в \mathbb{R}^n , границы множества, связного множества, области, замкнутой области. Приведите примеры.

32. Дайте два эквивалентных определения компактного множества в \mathbb{R}^n . Докажите (при $n=2$) лемму Больцано–Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из любой ограниченной последовательности.

33. Расскажите о скалярных функциях нескольких переменных, их множествах уровня. Что такое график функции двух переменных? Дайте определение пределов функции (конечного и бесконечного) в точке и на бесконечности, в случае $\lim_{x \rightarrow x^0} f(x) = b$ расскажите о связи с пределом по последовательностям и по направлениям. Существует ли

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}?$$

34. Дайте определение непрерывности функции нескольких переменных в точке и на множестве, расскажите о непрерывности суперпозиций и об арифметических свойствах непрерывных функций. Приведите примеры.

35. Докажите теорему Коши о промежуточном значении в многомерном случае. Изложите и обоснуйте метод "пробных точек" решения неравенств вида $f(x, y) > 0$.

Найдите область определения функции $z = \ln \frac{xy-1}{x^2+y^2-1}$.

36. Сформулируйте (и докажите при $n=2$) теорему Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значении для функций n переменных.

37. Дайте определение частных производных. Сформулируйте теоремы Шварца о смешанных производных. Дайте определение дифференцируемости функции нескольких переменных. Объясните связь дифференцируемости и непрерывности. Докажите (для

двух переменных) достаточное условие дифференцируемости в терминах частных производных.

38. Напишите асимптотическую и приближённую формулу линеаризации для функций нескольких переменных. Что такое дифференциал функции? Дайте определение касательной плоскости к графику функции двух переменных и выведите её уравнение.

39. Выведите формулу для $\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t), z(t)))$. Расскажите о других формулах дифференцирования суперпозиций функций двух и трёх переменных. С помощью замены $u = 2x + y$, $v = 2x + 3y$ найдите общее решение дифференциального уравнения $3\frac{\partial z}{\partial x} - 2\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

40. Дайте определение градиента. Определите производную по направлению и выведите формулу для ее вычисления. Объясните геометрический смысл градиента.

41. Определите дифференциалы высших порядков. Запишите общую формулу Тейлора–Пеано для функций нескольких переменных. Выведите формулу Тейлора–Пеано второго порядка для случая двух переменных.

42. Дайте определение точки локального экстремума функции нескольких переменных. Выведите необходимое условие локального экстремума для дифференцируемых функций. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $z = x^2 + xy$ в круге $x^2 + y^2 \leq 1$.

43. Выведите достаточное условие локального экстремума и его отсутствия в случае n переменных. Запишите его в случае двух переменных. Найдите точки локального экстремума функции $z = x^3 - y^2 + x^2y$ и укажите, к какому типу они относятся.

44. Докажите теорему о неявной функции одного переменного и сформулируйте эту теорему для неявной функции двух переменных. Запишите формулу Тейлора–Пеано второго порядка при $x \rightarrow 0$ для функции $y = y(x)$, заданной неявно уравнением $xy^3 + y^2 - 1 = 0$, $y(0) = 1$.

45. Расскажите о неявном задании кривых и поверхностей. Дайте определение точки локального условного экстремума функции двух и трёх переменных. В случае двух переменных докажите необходимое и сформулируйте достаточное условие локального условного экстремума.

46. Выведите уравнения касательной прямой и касательной плоскости для кривых в \mathbb{R}^2 и поверхностей в \mathbb{R}^3 , заданных неявно. Сформулируйте и поясните геометрически необходимое условие локального условного экстремума в случаях: функции двух переменных и одного условия; функции трех переменных и одного условия.

47. Изложите с обоснованием метод, позволяющий найти наибольшее и наименьшее значение гладкой функции в ограниченной замкнутой области с кусочно-гладкой границей. Найдите максимум и минимум функции $w = x^3 + y^3 - z^3$ в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

48. Дайте определение поточечно сходящейся функциональной последовательности, её предельной функции и множества сходимости. Найдите множество сходимости и предел последовательности $f_n(x) = x^n$. Дайте определение поточечно сходящегося функционального ряда, его суммы и множества сходимости. Найдите множество сходимости и сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

49. Дайте два эквивалентных определения равномерно сходящейся функциональной последовательности и приведите геометрическую интерпретацию. Приведите пример поточечной, но не равномерной сходимости.

50. Дайте определение равномерно сходящегося функционального ряда. Докажите достаточный и необходимый признаки равномерной сходимости такого ряда.

51. Докажите достаточный признак равномерной сходимости для знакочередующихся функциональных рядов. Исследуйте на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

52. Докажите теорему о равномерном пределе непрерывных функций и сформулируйте её аналог для равномерно сходящегося ряда.

53. Докажите утверждения об интегрировании функциональных последовательностей и рядов.

54. Докажите утверждения о дифференцировании функциональных последовательностей и рядов.

55. Дайте определение степенного ряда. Докажите первую теорему Абеля. Сформулируйте теорему о множестве сходимости степенного ряда и о его равномерной сходимости. Получите две формулы для радиуса сходимости.

56. Сформулируйте вторую теорему Абеля. Сформулируйте (и докажите в частном случае) теорему о радиусе сходимости продифференцированного и проинтегрированного степенного ряда.

57. Расскажите (с обоснованием) о возможности почленного интегрирования и дифференцирования степенного ряда. Каким общим свойством обладает сумма степенного ряда?

58. Дайте определение ряда Тейлора и ряда Маклорена. Сформулируйте теорему о коэффициентах Тейлора суммы степенного ряда. Получите достаточное условие сходимости ряда Тейлора к исходной функции.

59. Разложите (с обоснованием) в ряд Маклорена функции e^x , $\sin x$, $\cos x$ и найдите область сходимости. Приведите разложения Маклорена и интервалы сходимости для функций $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$, $(1-x)^{-1}$.

60. Используя ряд Маклорена, вычислите $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностью 10^{-3} .

Важные определения и понятия

(дополнительные вопросы, незнание которых существенно снизит оценку за экзамен)

1. Что такое первообразная и неопределённый интеграл? Как вычисляются интегралы вида $\int f(ax+b) dx$?
2. Запишите формулу Ньютона–Лейбница.
3. Что такое несобственные интегралы и как определяется их сходимость?
4. Что такое сходящийся числовой ряд и его сумма?
5. Дайте определение непрерывной и дифференцируемой функции нескольких переменных.
6. Что такое градиент функции и в чём его геометрический смысл?
7. Определите понятие точки локального экстремума функции нескольких переменных.
8. Определите понятие точки локального условного экстремума функции нескольких переменных.
9. Определите понятие равномерной сходимости последовательности функций.

Типовые задачи

1. Вычислите **один из** интегралов:

$$\int \sqrt{2x^2 + 3} dx, \quad \int e^x \cos 2x dx, \quad \int \frac{dx}{x^3 + 1}, \quad \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{x^2}{27}, \quad y = x^2,$$

и вычислите объём тела, полученного её вращением вокруг оси OX .

3. Найдите длину дуги для **одной из** кривых:

$$y = \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad y = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

5. Исследуйте на сходимость **один из** несобственных интегралов:

$$\int_1^e \frac{dx}{\sqrt[4]{1-\ln x}}, \quad \int_1^\infty \frac{\ln x \cdot \sqrt{5-\sin x}}{x^2} dx, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\cos x}}, \quad \int_4^\infty \frac{dx}{\sqrt{2x+1}\sqrt[3]{3x+2}\sqrt[6]{4x+3} \ln x}.$$

6. Исследуйте на сходимость **один из** числовых рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(\sqrt{n} + e^n)}{(2n+1)\sqrt{n^2 + \ln n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n+3}}{3n+63}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(e^n + n^3)}{n \ln(n^5 + n + 3)} \right)^{2n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}.$$

7. Вычислите вторые производные для **одной из** функций:

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x}{2y}, \quad z = \arcsin \frac{x}{y}, \quad z = \sqrt{x^2 - y}.$$

8. В дифференциальном уравнении $x \frac{\partial z}{\partial x} - 3 \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^3 - 3e^y$ произведите замену переменных

$$u = x^3 + e^y, \quad v = x^3 e^y \text{ и запишите общее решение.}$$

9. Напишите формулу Тейлора–Пеано второго порядка для **одной из** функций:

$$z = e^{2x+y} \text{ с } x_0 = 1, y_0 = -1; \quad z = \frac{1}{\sqrt[3]{x+2y-1}} \text{ с } x_0 = 0, y_0 = 1.$$

10. Найдите точки локального экстремума функции $z = (x^2 - 4x) \cdot (6y - y^2)$ и укажите, к какому типу они относятся.

11. Исследуйте на поточечную и равномерную сходимость **одну из** последовательностей функций:

$$f_n = nx^2 e^{nx}, \quad f_n = n^2 x e^{-nx^2}, \quad f_n = \frac{n^2 x^2}{x^2 + n^2}.$$

12. Найдите множество сходимости **одного из** степенных рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (3-x)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{3n+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n+3}}.$$

13. Разложите в ряд Маклорена (с определением интервал сходимости) **одну из** функций:

$$\ln(2+x^2), \quad \frac{1}{\sqrt{9+x}}, \quad \frac{x}{3-2x^2}.$$