

Глава 1. Задачи и упражнения

1.1. Элементы линейной алгебры

Определение 1 Отличный от нулевого вектор и называется собственным вектором матрицы A , если существует такое число λ , что $Au = \lambda u$. Число λ называется собственным значением (числом) матрицы A .

Определение 2 Для матрицы A размером $n \times n$ многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, где E – единичная матрица, называется характеристическим.

Утверждение 1 Если λ – собственное значение матрицы A , то множество векторов $\{u : Au = \lambda u\}$ является линейным подпространством размерности, не превышающей кратности λ . Это подпространство называется собственным подпространством, отвечающим собственному значению λ .

Утверждение 2 Все собственные числа матрицы A являются корнями характеристического многочлена матрицы A (являющегося многочленом степени n по λ).

Для нахождения собственных векторов матрицы A необходимо решить систему линейных уравнений $(A - \lambda E)u = 0$ для каждого корня характеристического уравнения. Линейно независимые решения системы при заданном λ образуют базис собственного подпространства, отвечающего собственному значению λ .

Определение 3 Матрица, не изменяющаяся при транспонировании, называется симметричной.

Утверждение 3 Симметричная матрица размера n имеет n действительных собственных чисел (с учетом кратности).

Утверждение 4 Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

Утверждение 5 У симметричной матрицы размера n существует n линейно независимых собственных векторов.

Определение 4 Если вектор - столбцы матрицы C ортогональны, а их длина равна 1, то матрица C называется ортогональной.

Утверждение 6 Для ортогональной матрицы обратная и транспонированная матрицы совпадают.

Утверждение 7 Определитель ортогональной матрицы равен единице.

Утверждение 8 Симметричную матрицу A можно представить в виде:

$A = CLC'$, где L – матрица, у которой на диагонали – собственные числа матрицы A , а остальные элементы равны 0, а C – ортогональная матрица.

Определение 5 След квадратной матрицы A – сумма ее диагональных элементов, т.е. $\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

Свойства следа матрицы:

1) $\text{tr}[A + B] = \text{tr}A + \text{tr}B$

2) $trA' = trA$

3) $tr[AB] = tr[BA]$, если соответствующие произведения матриц существуют

4) След симметричной матрицы равен сумме ее собственных чисел (с учетом кратностей).

Определение 6 Ранг матрицы A – число линейно независимых строк (или столбцов) этой матрицы.

Утверждение 9 Ранг матрицы равен порядку наибольшего отличного от 0 минора.

Свойства ранга матрицы:

1) $\text{rang}[AB] \leq \text{rang}[A], \text{rang}[B]$

2) $\text{rang}[A'] = \text{rang}[A]$

3) $\text{rang}[A'A] = \text{rang}[A]$

4) Ранг симметричной матрицы равен количеству ее отличных от 0 собственных чисел (с учетом кратностей).

Определение 7 Если A – симметричная матрица размера $(n \times n)$, то ей можно поставить в соответствие квадратичную форму $X'AX$, где $X \in R^n$.

Определение 8 Если для любого ненулевого вектора $X \in R^n$ имеет место неравенство $X'AX > 0$ (≥ 0), то соответствующая квадратичная форма называется положительно определенной (полуопределенной).

Определение 9 Если для любого ненулевого вектора $X \in R^n$ имеет место неравенство $X'AX < 0$ (≤ 0), то соответствующая квадратичная форма называется отрицательно определенной (полуопределенной).

Утверждение 10 Если все собственные числа симметричной матрицы A положительны (неотрицательны), то соответствующая квадратичная форма положительно определена (полуопределенна), а если отрицательны (неположительны), то отрицательно определена (полуопределенна).

Критерий Сильвестра: Если все главные миноры матрицы A положительны (неотрицательны), то соответствующая ей квадратичная форма положительно определена (полуопределенна). Если же знаки главных миноров матрицы A чередуются, начиная с отрицательного, то соответствующая квадратичная форма отрицательно определена.

Определение 10 Матрица A называется идемпотентной, если $A^2 = A$.

Определение 11 Симметричная идемпотентная матрица называется проекционной.

1. Даны вектор-столбцы $a = (3, -4, 12)^T$, $b = (7, 4, 3)^T$.

Найти а) $2a$, б) $a + b$, в) $2a - 3b$, г) скалярное произведение векторов а и б, д) длину вектора а.

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти а) $3A$, б) $3A + 5B$, в) AC , г) CA .

3. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти а) $\det A$, б) $\det B$, в) A^{-1} , г) B^{-1} , д) след матрицы B .

4. Данна матрица $X = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ X_1 & \cdot & \cdot & \cdot & X_n \end{pmatrix}^T$. Найти $X^T X$.
5. Доказать, что симметричными являются матрицы
 - а) $X^T X$, б) $P(X) = X(X^T X)^{-1} X^T$, в) $\pi = II^T / I^T I$, где I – единичный вектор - столбец.
6. Найти ранг матрицы
 - а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, б) π (см. задачу 5 в).
7. Доказать, что если ранг матрицы X равен k , то ранг матрицы $X^T X$ также равен k .
8. Доказать, что собственные значения идемпотентной матрицы равны 0 или 1.
9. Привести пример несимметричной идемпотентной матрицы.
10. Доказать, что для проекционной матрицы след и ранг совпадают.
11. Доказать, что если матрица P идемпотентна, то матрица $M = E - P$, (где E – единичная матрица), тоже идемпотентна.
12. Доказать, что матрицы $P(X)$ и π из задачи 5 являются идемпотентными.
13. Найти след матриц $P(X)$ и π .
14. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы
 - а) $A = \begin{pmatrix} 1,3 & -0,1 \\ 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}$, б) $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$, в) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
15. Доказать, что определитель симметричной матрицы равен произведению ее собственных чисел.
16. Доказать что матрица $X^T X$ является неотрицательно определенной.