

## Глава 1. Задачи и упражнения

### 1.1. Элементы линейной алгебры

**Определение 1** Отличный от нулевого вектор и называется собственным вектором матрицы  $A$ , если существует такое число  $\lambda$ , что  $Au = \lambda u$ . Число  $\lambda$  называется собственным значением (числом) матрицы  $A$ .

**Определение 2** Для матрицы  $A$  размером  $n \times n$  многочлен  $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ , где  $E$  – единичная матрица, называется характеристическим.

**Утверждение 1** Если  $\lambda$  – собственное значение матрицы  $A$ , то множество векторов  $\{u : Au = \lambda u\}$  является линейным подпространством размерности, не превышающей кратности  $\lambda$ . Это подпространство называется собственным подпространством, отвечающим собственному значению  $\lambda$ .

**Утверждение 2** Все собственные числа матрицы  $A$  являются корнями характеристического многочлена матрицы  $A$  (являющегося многочленом степени  $n$  по  $\lambda$ ).

Для нахождения собственных векторов матрицы  $A$  необходимо решить систему линейных уравнений  $(A - \lambda E)u = 0$  для каждого корня характеристического уравнения. Линейно независимые решения системы при заданном  $\lambda$  образуют базис собственного подпространства, отвечающего собственному значению  $\lambda$ .

**Определение 3** Матрица, не изменяющаяся при транспонировании, называется симметричной.

**Утверждение 3** Симметричная матрица размера  $n$  имеет  $n$  действительных собственных чисел (с учетом кратности).

**Утверждение 4** Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.

**Утверждение 5** У симметричной матрицы размера  $n$  существует  $n$  линейно независимых собственных векторов.

**Определение 4** Если вектор - столбцы матрицы  $C$  ортогональны, а их длина равна 1, то матрица  $C$  называется ортогональной.

**Утверждение 6** Для ортогональной матрицы обратная и транспонированная матрицы совпадают.

**Утверждение 7** Определитель ортогональной матрицы равен единице.

**Утверждение 8** Симметричную матрицу  $A$  можно представить в виде:

$A = S\Lambda S'$ , где  $\Lambda$  – матрица, у которой на диагонали – собственные числа матрицы  $A$ , а остальные элементы равны 0, а  $S$  – ортогональная матрица.

**Определение 5** След квадратной матрицы  $A$  – сумма ее диагональных элементов, т.е.

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

**Свойства следа матрицы:**

1)  $\text{tr}[A + B] = \text{tr}A + \text{tr}B$

2)  $\text{tr}A' = \text{tr}A$

3)  $\text{tr}[AB] = \text{tr}[BA]$ , если соответствующие произведения матриц существуют

4) След симметричной матрицы равен сумме ее собственных чисел (с учетом кратностей).

**Определение 6** Ранг матрицы  $A$  – число линейно независимых строк (или столбцов) этой матрицы.

**Утверждение 9** Ранг матрицы равен порядку наибольшего отличного от 0 минора.

**Свойства ранга матрицы:**

1)  $\text{rang}[AB] \leq \text{rang}[A], \text{rang}[B]$

2)  $\text{rang}[A'] = \text{rang}[A]$

3)  $\text{rang}[A'A] = \text{rang}[A]$

4) Ранг симметричной матрицы равен количеству ее отличных от 0 собственных чисел (с учетом кратностей).

**Определение 7** Если  $A$  – симметричная матрица размера  $(n \times n)$ , то ей можно поставить в соответствие квадратичную форму  $X'AX$ , где  $X \in R^n$ .

**Определение 8** Если для любого ненулевого вектора  $X \in R^n$  имеет место неравенство  $X'AX > 0$  ( $\geq 0$ ), то соответствующая квадратичная форма называется положительно определенной (полуопределенной).

**Определение 9** Если для любого ненулевого вектора  $X \in R^n$  имеет место неравенство  $X'AX < 0$  ( $\leq 0$ ), то соответствующая квадратичная форма называется отрицательно определенной (полуопределенной).

**Утверждение 10** Если все собственные числа симметричной матрицы  $A$  положительны (неотрицательны), то соответствующая квадратичная форма положительно определена (полуопределена), а если отрицательны (неположительны), то отрицательно определена (полуопределена).

**Критерий Сильвестра:** Если все главные миноры матрицы  $A$  положительны (неотрицательны), то соответствующая ей квадратичная форма положительно определена (полуопределена). Если же знаки главных миноров матрицы  $A$  чередуются, начиная с отрицательного, то соответствующая квадратичная форма отрицательно определена.

**Определение 10** Матрица  $A$  называется идемпотентной, если  $A^2 = A$ .

**Определение 11** Симметричная идемпотентная матрица называется проекционной.

1. Даны вектор-столбцы  $a = (3, -4, 12)^T$ ,  $b = (7, 4, 3)^T$ .

Найти а)  $2a$ , б)  $a + b$ , в)  $2a - 3b$ , г) скалярное произведение векторов  $a$  и  $b$ , д) длину вектора  $a$ .

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти а)  $3A$ , б)  $3A + 5B$ , в)  $AC$ , г)  $CA$ .

3. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найти а)  $\det A$ , б)  $\det B$ , в)  $A^{-1}$ , г)  $B^{-1}$ , д) след матрицы  $B$ .

4. Дана матрица  $X = \begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ X_1 & \cdot & \cdot & \cdot & X_n \end{pmatrix}^T$ . Найти  $X^T X$ .

5. Доказать, что симметричными являются матрицы

а)  $X^T X$ , б)  $P(X) = X(X^T X)^{-1} X^T$ , в)  $\pi = II^T / I^T I$ , где  $I$  – единичный вектор - столбец.

6. Найти ранг матрицы

а)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ , б)  $\pi$  (см. задачу 5 в).

7. Доказать, что если ранг матрицы  $X$  равен  $k$ , то ранг матрицы  $X^T X$  также равен  $k$ .

8. Доказать, что собственные значения идемпотентной матрицы равны 0 или 1.

9. Привести пример несимметричной идемпотентной матрицы.

10. Доказать, что для проекционной матрицы след и ранг совпадают.

11. Доказать, что если матрица  $P$  идемпотентна, то матрица  $M = E - P$ , (где  $E$  – единичная матрица), тоже идемпотентна.

12. Доказать, что матрицы  $P(X)$  и  $\pi$  из задачи 5 являются идемпотентными.

13. Найти след матриц  $P(X)$  и  $\pi$ .

14. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

а)  $A = \begin{pmatrix} 1,3 & -0,1 \\ 0,8 & 0,4 \end{pmatrix}$ , б)  $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0,5 & 1 \end{pmatrix}$ , в)  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

15. Доказать, что определитель симметричной матрицы равен произведению ее собственных чисел.

16. Доказать что матрица  $X^T X$  является неотрицательно определенной.