Вопросы к итоговому экзамену
Функциональный анализ, 3-й курс, модули 1-2
В. Лебедев
МИЭМ НИУ ВШЭ, 2018/2019 учебный год
ДПМ, группы БПМ 161–163

На экзамене студент получает билет, содержащий два вопроса из этого вопросника, и две задачи от экзаменатора. Экзамен по всему курсу (4 модуля). Пользоваться вопросником разрешается.

Итоговая результирующая оценка (идущая в диплом) = 0,5 итоговая накопленная оценка + 0,5 оценка на итоговом экзамене. Итоговая накопленная оценка образуется следующим образом: $O_{\text{накопл/итоговая}} = \frac{1}{2}(O_{\text{рез 1}} + O_{\text{накопл 2}})$, где $O_{\text{рез 1}}$ — результирующая оценка, полученная на 2-м курсе и $O_{\text{накопл 2}}$ — накопленная оценка на 3-м курсе.

1. Определите понятие эквивалентности $X \sim Y$ множеств X и Y по Кантору. Расскажите о понятии мощности множества. Что означают записи $|X| = |Y|$, $|X| \geq |Y|$, $|X| > |Y|$? Сформулируйте теорему Кантора–Бернштейна о сравнении множеств. Докажите, что множество $C(I)$ непрерывных функций на отрезке I является континуальным.

2. Изложите (схематично) построение меры Лебега в R^n. Приведите примеры множеств лебеговой меры 0 на прямой и плоскости. Докажите, что всякое счетное множество имеет меру нуль. Приведите пример несчетного множества на прямой, имеющего меру нуль (троичное множество Кантора). Всякое ли множество на R измеримо по Лебегу?

3. Сформулируйте утверждение о замкнутости класса измеримых множеств относительно операций (счетного) объединения, пересечения и перехода к дополнению.

4. Дайте определение измеримой функции. Сформулируйте утверждение о замкнутости класса измеримых функций относительно арифметических операций и поточечного предельного перехода. Дайте определение сходимости последовательности функций почти всюду и сходимости по мере. Сформулируйте теорему об их связи. Приведите примеры.

5. Определите интеграл Лебега (включая интеграл по всему R^n — ограничтесь одномерным случаем). Сформулируйте и поясните его ос-

новные свойства (линейности и правило интегрирования неравенств).

6. Опишите связь между интегралом Лебега и интегралом Римана (включая и случай несобственного интеграла Римана).

7. Сформулируйте теорему Лебега о мажорируемом предельном переходе. Сформулируйте теорему Леви о предельном переходе и ее следствие для рядов. Сформулируйте лемму Фату.

8. Дайте определение пространства с мерой и интеграла в случае абстрактного пространства с мерой. Что такое функция распределения? Определите меру Стилтьеса на R. Что такое абсолютно непрерывная мера? Что такое дискретная мера. Что такое интеграл Стилтьеса? Как вычисляется интеграл по абсолютно непрерывной и по дискретной мере.

9. Дайте определение метрического пространства и предела последовательности в нем. Определите пространства l^2, l^1, l^∞, $C([a,b])$, $BC(R)$. Определите пространства $L^1(X), L^2(X)$.

10. Дайте определение открытого множества в метрическом пространстве. Дайте определение замкнутого множества. Приведите примеры. Что такое всюду плотное множество в метрическом пространстве? Что такое нигде не плотное множество? Приведите примеры. Докажите, что множество $\{x : x(t_0) = 0\}$ замкнуто и нигде не плотно в $C[a,b]$.

11. Дайте определение сепарабельного метрического пространства. Докажите сепарабельность прямой R. Докажите сепарабельность R^n, l^2, l^1. Докажите, что l^∞ не сепарабельно. Сепарабельно ли $C([a,b])$, $L^1[a,b], L^1(R), L^2[a,b], L^2(R)$.

12. Дайте определение полного метрического пространства. Докажите полноту прямой R. Приведите пример метрического пространства, не являющегося полным. Какие из следующих пространств являются полными: R^n, l^2, l^1, $l^\infty, C([a,b])$, $L^1(X), L^2(X)$ в случае $X = [a,b]$ и $X = R$?

13. Докажите, что если X — полное метрическое пространство и Y его подпространство, то Y полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто. Сформулируйте теорему о вложенных шарах в метрических пространствах. Сформулируйте теорему Бэра о полных метрических пространствах.

14. Дайте определение непрерывного отображения одного метрического пространства в другое. Что такое изометрические пространства?

15. Дайте определение сжимающего отображения в метрическом пространстве, приведите примеры. Является ли отображение $t \to \sin t$ сжимающим как отображение прямой R в себя? Сформулируйте теорему

о неподвижной точке сжимающего отображения. Укажите оценку расстояния между n -ой итерацией и неподвижной точкой.

16. Дайте определение вполне ограниченного множества в метрическом пространстве. Приведите примеры. Покажите, что всякое вполне ограниченное множество является ограниченным. Верно ли обратное (рассмотрите шар в l^2)?

17. Докажите, что в конечномерном нормированном пространстве понятия "ограниченность" и "вполне ограниченность" совпадают.

18. Что называется ε -сетью для множества K в метрическом пространстве? Покажите, что K является вполне ограниченным тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε -сеть для K.

19. Дайте определение компактного множества в метрическом пространстве. Приведите примеры. Докажите теорему о связи вполне ограниченности и компактности.

20. Докажите теорему Вейерштрасса о непрерывных функциях на компактных множествах. Приведите пример, показывающий, что условие компактности множества в этой теореме нельзя заменить условием ограниченности и замкнутости.

21. Докажите теорему Арцела (критерий вполне ограниченности множества в $C[a,b]$). Проиллюстрируйте ее применение на примерах.

22. Сформулируйте критерии вполне ограниченности множества в l^2 и l^1. Выведите один из них. Проиллюстрируйте их применения (например, рассмотрите "гильбертов кирпич").

23. Дайте определение нормированного пространства. Приведите примеры. Покажите, что соотношение $\rho(x,y) = \|x-y\|$ определяет метрику в нормированном пространстве (это естественная метрика, порожденная нормой).

24. Что такое банахово пространство. Что называют (замкнутым) подпространством нормированного пространства? Докажите свойство непрерывности нормы.

25. Что такое эквивалентные нормы? Являются ли нормы $\|x\|_1 = \max_{[0,1]} |x(t)|$ и $\|x\|_2 = \int_0^1 |x(t)|dt$ эквивалентными нормами в пространстве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$? Покажите, что любые две нормы в конечномерном пространстве — эквивалентны.

26. Сформулируйте лемму о почти перпендикуляре и докажите, что шар в линейном нормированном пространстве вполне ограничен лишь

в случае, когда пространство конечномерно.

27. Дайте определение сходящегося ряда в нормированном пространстве. Покажите, что если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится, то его члены стремятся к нулю, т.е. $\|x_k\| \to 0$ (необходимое условие сходимости). Покажите, что в банаховом пространстве из сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ (достаточное условие сходимости).

28. Дайте определение базиса в нормированном пространстве. Покажите, что всякое нормированное пространство с базисом сепарабельно.

29. Дайте определение евклидова пространства. Выведите неравенство Коши – Буняковского – Шварца. Как определяется естественная норма в евклидовом пространстве? Что такое гильбертово пространство?

30. Выведите равенство параллелограмма в евклидовом пространстве. Сформулируйте критерий того, что норма в нормированном пространстве порождена скалярным произведением. Докажите, что пространство $C[0,1]$ не является евклидовым.

31. Когда говорят, что два вектора в евклидовом пространстве ортогональны? Дайте определение ортогональной системы векторов в евклидовом пространстве. Что называют ортонормированной системой векторов? Приведите примеры.

32. Сформулируйте задачу о наилучшем приближении в общем случае метрических пространств; дайте определение элемента наилучшего приближения. Дайте определение ортогональной проекции вектора на подпространство в гильбертовом пространстве. Сформулируйте утверждение о существовании ортогональной проекции вектора на подпространство и докажите ее единственность. Как связаны проекция и элемент наилучшего приближения в гильбертовом пространстве?

33. Дайте определение линейной оболочки системы векторов в линейном нормированном пространстве. Дайте определение полной системы векторов. Приведите примеры.

34. Выведите формулу для ортогональной проекции вектора на подпространство $\Pi =< e_1, e_2, \ldots, e_N >$, являющееся линейной оболочкой конечной системы векторов $e_1, e_2, \ldots, e_N$, образующих ортонормированную систему в евклидовом пространстве.

35. Покажите, что полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве является базисом и выведите теорему о разложении в ряд Фурье по полной ортонормированной системе в гильбертовом пространстве.

36. Изложите процедуру ортогонализации. Как связаны линейнуая оболочка исходной системы и системы, полученной ортогонализацией?

37. Докажите теорему о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве. Приведите примеры таких базисов.

38. Докажите теорему об изоморфизме сепарабельных гильбертовых пространств.

39. Дайте определение линейного непрерывного функционала, заданного на нормированном пространстве. Дайте определение линейного ограниченного функционала. Покажите, что эти понятия совпадают. Приведите примеры. Дайте определение нормы функционала (укажите все три эквивалентных определения). Дайте определение пространства X^* сопряженного к нормированному пространству X.

40. Докажите полноту сопряженного пространства.

41. Приведите примеры линейных функционалов в пространстве $C[a, b]$. Сформулируйте теорему об общем виде ограниченных линейных функционалов в этом пространстве. Сформулируйте теорему об общем виде ограниченного линейного функционала в гильбертовом пространстве. Какие следствия влечет эта теорема для пространства l_2 и $L_2[a, b]$?

42. Когда говорят, что последовательность функционалов $f_n \in X^*, n = 1, 2, \dots,$ сходится слабо (поточечно)? Когда говорят, что она сходится сильно (по норме)? Приведите примеры. Докажите единственность слабого и сильного предела (если они есть). Докажите, что из сильной сходимости вытекает слабая сходимость к тому же пределу.

43. Рассмотрим последовательность функционалов $f_n, n = 1, 2, \dots,$ на $C[0, 1]$, вида $f_n(x) = x(1/n)$. Является ли эта последовательность слабо сходящейся? Сильно сходящейся? Если да, то каков предел?

44. Рассмотрим последовательность функционалов $f_n, n = 1, 2, \dots,$ на $C[0, 1]$, вида $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x(\frac{k}{n})$. Является ли эта последовательность слабо сходящейся? Сильно сходящейся? Если да, то каков предел?

45. Дайте определение линейного непрерывного оператора, действующего из одного нормированного пространства в другое. Дайте определение ограниченного линейного оператора. Покажите, что эти понятия совпадают. Приведите примеры. Дайте определение нормы оператора (укажите все три эквивалентных определения).

46. Покажите, что пространство $B(X, Y)$ линейных ограниченных операторов, действующих из X в Y с естественными операциями умножения на скаляры и суммы, является линейным нормированным про-

странством. Сформулируйте теорему о полноте пространства $B(X, Y)$.

47. Дайте определение произведения операторов. Выведите оценку нормы произведения через нормы сомножителей. Покажите, что пространство $B(X)$ линейных ограниченных операторов, действующих из X в X, образует алгебру.

48. Вычислите норму а) диагонального оператора в l^2; б) оператора умножения на функцию в $L^2[a, b]$.

49. Выведите оценку сверху для нормы интегрального оператора в L^2.

50. Дайте определение сильной (по норме) и слабой (поточечной) сходимости последовательности операторов. Покажите, что из сильной сходимости вытекает слабая (к тому же пределу), но обратное неверно (рассмотрите в l^2 последовательность операторов $I_n : (x_1, x_2, \dots) \to (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$).

51. Выведите принцип равномерной ограниченности для последовательностей операторов — теорему Банаха–Штейнгауза. Сформулируйте ее следствие для последовательностей функционалов.