

Вопросы к коллоквиуму
“Неопределенный и определенный интеграл”
Математический анализ
БПМ 181-185, 3-й модуль, 1-й курс
2018/2019 учебный год
В. Лебедев

На коллоквиуме студент получает два вопроса из этого вопросника. Коллоквиум имеет характер блиц-опроса. Время на ответ 3–5 минут. Студент должен продемонстрировать знание определений и формулировок утверждений. Доказывать утверждения не требуется. Пользоваться вопросником разрешается.

1. Дайте определение неопределенного интеграла (первообразной) и укажите его основные свойства. Выпишите таблицу основных первообразных.

2. Расскажите о замене переменной. Дайте определение дифференциала функции и расскажите о внесении под знак дифференциала в неопределенных интегралах. Вычислите

$$\int \sqrt{1-x^2} dx, \quad \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

3. Выведите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла. Вычислите $\int e^x \cos x dx$.

4. Выведите рекуррентное соотношение для

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

5. Перечислите простейшие рациональные функции, расскажите об их интегрировании.

6. Сформулируйте теорему о представлении рациональной функции в виде суммы простейших. Вычислите

$$\int \frac{x^3}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

7. Расскажите, как сводятся следующие интегралы к интегралам от рациональных функций ($R(\)$ обозначает рациональное выражение от соответствующих переменных):

$$\int R(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \dots) dx, \quad \int R(e^{\alpha x}, e^{\beta x}, e^{\gamma x}, \dots) dx,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ — рациональные числа. Вычислите

$$\int \frac{e^x + e^{x/2}}{e^{2x} + 1} dx.$$

8. Расскажите о тригонометрических интегралах

$$\int R(\cos x, \sin x) dx$$

и их сведения к интегралам от рациональных функций (при помощи универсальной тригонометрической замены переменной). Вычислите

$$\int \frac{\sin^2 x}{2 + \cos x} dx.$$

9. Дайте определение интегрируемой функции на отрезке и ее определенного интеграла. Поясните геометрический смысл определенного интеграла.

10. Приведите пример неинтегрируемой функции на отрезке. Обоснуйте свой ответ

11. Сформулируйте свойство линейности и свойство аддитивности определенного интеграла.

12. Сформулируйте утверждение об интегрируемости функций непрерывных на отрезке. Покажите, что кусочно непрерывные функции интегрируемы.

13. Сформулируйте критерий интегрируемости.

14. Сформулируйте теорему об интегрируемости модуля интегрируемой функции и поясните неравенство

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

(f интегрируема).

15. Сформулируйте теорему об интегрировании неравенств.

16. Сформулируйте теорему об интегральном среднем значении для определенного интеграла.

17. Сформулируйте теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом и выведите формулу Ньютона-Лейбница.

18. Сформулируйте правило замены переменной в определенном интеграле. Вычислите

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx.$$

19. Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла. Вычислите

$$\int_1^2 x \ln x dx.$$

20. Дайте определение кривой на плоскости и ее длины. Запишите формулу для вычисления длины гладкой кривой и, в частности, графика гладкой функции.

21. Запишите формулу для вычисления массы отрезка с заданным законом распределения массы. Запишите формулу работы переменной силы на прямолинейном пути.

22. Запишите формулу для вычисления объема тела с известным законом изменения поперечного сечения. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностью $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 1$ ("параболическая чашка").