

Эконометрика, 2018-2019, 3 модуль

Семинар 4

04.02.19

Для Группы Э_Б2016_Э_3

Семинарист О.А.Демидова

Метод максимального правдоподобия

Задачник Борzych Д. И Демешева Б.

Метод максимального правдоподобия

Пусть

$X = (X_1, \dots, X_n)$ — случайная выборка

$x = (x_1, \dots, x_n)$ — реализация данной случайной выборки

$f_{X_i}(x_i, \theta)$ — плотность распределения случайной величины X_i , $i = 1, \dots, n$

$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)$ — вектор неизвестных параметров

$\Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров

$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i, \theta)$ — функция правдоподобия

$\ell(\theta) := \ln L(\theta)$ — логарифмическая функция правдоподобия

Пусть требуется протестировать систему (нелинейных) ограничений относительно вектора неизвестных параметров

$$H_0 : \begin{cases} g_1(\theta) = 0 \\ g_2(\theta) = 0 \\ \dots \\ g_r(\theta) = 0 \end{cases}$$

где $g_i(\theta)$ — функция, которая задаёт i -ое ограничение на вектор параметров θ , $i = 1, \dots, r$.

$$\frac{\partial g}{\partial \theta'} = \begin{pmatrix} \partial g_1 / \partial \theta' \\ \partial g_2 / \partial \theta' \\ \vdots \\ \partial g_r / \partial \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_k} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_r}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_k} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial g'}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g'_1}{\partial \theta} & \frac{\partial g'_2}{\partial \theta} & \dots & \frac{\partial g'_r}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial g_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_1}{\partial \theta_k} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_k} & \dots & \frac{\partial g_r}{\partial \theta_k} \end{pmatrix}$$

$$I(\theta) = -\mathbb{E} \left(\frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta \partial \theta'} \right) = -\mathbb{E} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_1 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_1 \partial \theta_k} \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_2 \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_2 \partial \theta_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_k \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_k \partial \theta_2} & \dots & \frac{\partial^2 \ell}{\partial \theta_k \partial \theta_k} \end{pmatrix} - \text{информаци-}$$

онная матрица Фишера

$$\frac{\partial \ell}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \ell}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \ell}{\partial \theta_k} \end{pmatrix}$$

$\Theta_{UR} := \Theta$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров без учёта ограничений

$\Theta_R := \{\theta \in \Theta : g(\theta) = 0\}$ — множество допустимых значений вектора неизвестных параметров с учётом ограничений

$\hat{\theta}_{UR} \in \Theta_{UR}$ — точка максимума функции ℓ на множестве Θ_{UR}

$\hat{\theta}_R \in \Theta_R$ — точка максимума функции ℓ на множестве Θ_R

Тогда для тестирования гипотезы H_0 можно воспользоваться одной из следующих ниже статистик.

$LR := -2(\ell(\hat{\theta}_R) - \ell(\hat{\theta}_{UR})) \stackrel{a}{\sim} \chi_r^2$ — статистика отношения правдоподобия

$W := g'(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \left[\frac{\partial g}{\partial \theta'}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_{UR}) \cdot \frac{\partial g'}{\partial \theta}(\hat{\theta}_{UR}) \right]^{-1} g(\hat{\theta}_{UR}) \stackrel{a}{\sim} \chi_r^2$ — статистика Вальда

$LM := \left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R) \right]' \cdot I^{-1}(\hat{\theta}_R) \cdot \left[\frac{\partial \ell}{\partial \theta}(\hat{\theta}_R) \right] \stackrel{a}{\sim} \chi_r^2$ — статистика множителей Лагранжа

5.4 Совместное распределение величин X и Y задано функцией

$$f(x, y) = \frac{\theta(\beta y)^x e^{-(\theta+\beta)y}}{x!}.$$

Величина X принимает целые неотрицательные значения, а величина Y — действительные неотрицательные. Имеется случайная выборка $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

С помощью метода максимального правдоподобия оцените

1. θ и β ;
2. $a = \theta/(\beta + \theta)$.

Задача 5.1.

Дядя Вова (Владимир Николаевич) и Скрипач (Гедеван) зарабатывают на Плюке чатлы, чтобы купить гравицапу. Число заработанных за i -ый день чатлов имеет пуассоновское распределение, заработки за разные дни независимы. За прошедшие 100 дней они заработали 250 чатлов.

1. Оцените параметр λ пуассоновского распределения методом максимального правдоподобия.

Постройте 95% доверительный интервал для λ .

Проверьте гипотезу о том, что средний дневной заработок равен 2 чатла с помощью теста отношения правдоподобия, теста Вальда, теста множителей Лагранжа.

- 2) A.C.Cameron, P.K.Trivedy, Microeconometrics, p.235.

Дана выборка n независимых одинаково распределенных случайных величин $Y \sim N(\mu, 1)$. Проверьте гипотезу $H_0: \mu = \mu^*$ с помощью теста отношения правдоподобия, теста Вальда и теста множителей Лагранжа.