Вопросы к экзамену
Математический анализ, 1-й курс, модули 3-4
В. Лебедев
МИЭМ НИУ ВШЭ, 2018/2019 учебный год
ДПМ, группы БПМ 181–185

На экзамене студент получает билет, содержащий два вопроса из этого вопросника, и две задачи от экзаменатора. Пользоваться вопросником разрешается.

Результирующая оценка = 0,5 накопленная оценка + 0,5 оценка на экзамене.

1. Дайте определение точки локального экстремума. Докажите теорему Ферма. Дайте определение критической точки. Приведите примеры. Расскажите, как найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

2. Докажите теорему Ролля. Объясните ее геометрический смысл. Приведите примеры.

3. Выведите формулу Лагранжа. Объясните ее геометрический смысл. Докажите, что если $f'(x) = 0$ при всех x из интервала I, то f — постоянна на I.

4. Выведите необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) функции на интервале в терминах ее первой производной. Выведите условие (в терминах первой производной), достаточное для того, чтобы в точке функция имела экстремум.

5. Выведите формулу Коши.

6. Сформулируйте правило Лопиталя, докажите его в случае неопределенности вида 0/0.

7. Дайте определение многочлена Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 и выведите формулу Тейлора–Пеано.

8. Выведите формулу Тейлора–Лагранжа.

9. Запишите многочлен Тейлора для функций $y = e^x$, $y = \ln(1 + x)$ ($x_0 = 0$). Запишите соответствующие асимптотические формулы (формулу Тейлора–Пеано).

10. Запишите многочлен Тейлора для функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $(1+x)^\alpha$ (при $x_0 = 0$). Запишите соответствующие асимптотические формулы (формулу Тейлора–Пеано).

11. Определите при малых $x \neq 0$ знак функции

$$f(x) = \ln(1 + x + x^2) + \ln(1 - x - x^2).$$

12. Вычислите e с точностью $0,01$.

13. Вычислите $\sin 1$ с точностью $0,01$.

14. Докажите, что число e иррационально.

15. Выведите достаточное условия локального экстремума функции с использованием второй производной. Приведите пример. Расскажите что делать, если в критической точке вторая производная обращается в 0.

16. Когда говорят, что функция выпукла (вогнута) на интервале? Выведите достаточное условия выпуклости (вогнутости). Приведите примеры.

17. Дайте определения точки перегиба графика функции. Выведите условие, гарантирующее, что в точке имеется перегиб. Приведите пример.

18. Что такое горизонтальная, вертикальная и наклонная асимптота графика функции. Как их найти и как определить взаимное расположение графика и асимптоты? Приведите пример.

19. Дайте определение неопределенного интеграла (первообразной) и укажите его основные свойства. Выпишите таблицу основных первообразных.

20. Расскажите о замене переменной в интегралах. Дайте определение дифференциала функции и расскажите о внесении под знак дифференциала в неопределенных интегралах. Вычислите

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx, \quad \int \frac{\ln x}{x}dx.$$

21. Выведите формулу интегрирования по частям для неопределенного интеграла. Вычислите $\int e^x \cos x dx$.

22. Выведите рекурентное соотношение для

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

23. Перечислите простейшие рациональные функции, расскажите об их интегрировании.

24. Сформулируйте теорему о представлении рациональной функции в виде суммы простейших. Вычислите

$$\int \frac{x^3}{(x^2+1)^2}dx.$$

25. Расскажите, как сводятся следующие интегралы к интегралам от рациональных функций ($R(\ )$ обозначает рациональное выражение от соответствующих переменных):

$$\int R(x^\alpha, x^\beta, x^\gamma, \ldots)dx, \quad \int R(e^{\alpha x}, e^{\beta x}, e^{\gamma x}, \ldots)dx,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — рациональные числа. Вычислите

$$\int \frac{e^x + e^{x/2}}{e^{2x}+1}dx.$$

26. Расскажите о тригонометрических интегралах

$$\int R(\cos x,\ \sin x)dx$$

и их сведении к интегралам от рациональных функций (при помощи универсальной тригонометрической замены переменной). Вычислите

$$\int \frac{\sin^2 x}{2+\cos x}dx.$$

27. Дайте определение интегрируемой функции на отрезке и ее определенного интеграла. Поясните геометрический смысл определенного интеграла.

28. Докажите, что функция Дирихле не интегрируема.

29. Сформулируйте и поясните свойство линейности и свойство аддитивности определенного интеграла.

30. Сформулируйте критерий интегрируемости функции на отрезке. Выведите, интегрируемость непрерывных функций на отрезке и интегрируемость кусочно непрерывных функций.

31. Докажите теорему об интегрируемости модуля интегрируемой функции (воспользуйтесь критерием интегрируемости) и покажите, что если функция f — интегрируема на $[a, b]$, то

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

32. Докажите теоремы об интегрировании неравенств и об оценке определенного интеграла.

33. Докажите теорему о среднем значении для определенного интеграла.

34. Докажите теорему о производной интеграла с переменным верхним пределом и выведите формулу Ньютона-Лейбница.

35. Сформулируйте правило замены переменной в определенном интеграле. Вычислите

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

36. Запишите формулу интегрирования по частям для определенного интеграла. Вычислите

$$\int_1^2 x \ln x dx.$$

37. Дайте определение кривой на плоскости и ее длины. Выведите формулу для вычисления длины дуги графика гладкой функции. Найдите длину дуги параболы $y = x^2,\ 0 \leq x \leq 1$.

38. Выведите формулу для вычисления массы отрезка с заданным законом распределения массы.

39. Выведите формулу работы переменной силы на прямолинейном пути.

40. Выведите формулу для вычисления объема тела с известным законом изменения поперечного сечения. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностью $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 1$ ("параболическая чашка").

41. Изложите метод (центральных) прямоугольников для приближенного вычисления определенных интегралов. Выведите оценку ошибки.

42. Дайте определение несобственного интеграла 1-го рода (по бесконечному промежутку). Вычислите по определению

$$\int_0^\infty xe^{-x} dx.$$

43. Дайте определение несобственного интеграла 2-го рода (от неограниченной функции по конечному промежутку). Вычислите по определению

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\ .$$

44. Расскажите о вычислении несобственных интегралов при помощи замены переменной, внесения под знак дифференциала, интегрировании по частям. Вычислите интегралы

$$\int_0^\infty xe^{-x}dx, \qquad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\ .$$

45. Расскажите с обоснованием о поведении несобственных интегралов

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\ .$$

46. Выведите признак сравнения для несобственных интегралов от неотрицательных функций. Выведите предельный признак сравнения (интегралы от эквивалентных функций сходятся или расходятся одновременно).

47. Дайте определение абсолютной сходимости несобственных интегралов и докажите теорему об абсолютной сходимости. Покажите, что несобственные интегралы

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \quad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$$

сходятся абсолютно при $\alpha > 1$.

48. Покажите, что несобственные интегралы

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \quad \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^\alpha}dx$$

сходятся при $0 < \alpha \leq 1$, но абсолютной сходимости нет.

49. Дайте определение частичной суммы числового ряда. Дайте определение сходящегося числового ряда и его суммы. Сформулируйте основные свойства числовых рядов. Покажите, что если ряд сходится, то его члены стремятся к 0. Укажите пример, показывающий, что обратное не верно.

50. Докажите, что ряд (ряд Дирихле) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

51. Выведите признак сравнения для числовых рядов с неотрицательными членами. Выведите предельный признак сравнения (ряды с эквивалентными членами сходятся или расходятся одновременно).

52. Сформулируйте признаки сходимости Даламбера и Коши. Докажите один из них. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n^2}}$.

53. Выведите интегральный признак сходимости числового ряда. При каких значениях α сходится ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$?

54. Дайте определение абсолютно сходящегося числового ряда и докажите теорему об абсолютной сходимости. Приведите пример сходящегося но не абсолютно сходящегося ряда.

55. Докажите теорему о перестановке членов абсолютно сходящегося ряда. Сформулируйте теорему о перестановке членов сходящегося но не абсолютно сходящегося ряда.

56. Докажите теорему Лейбница о знакочередующихся рядах. Для рядов Лейбница выведите оценку уклонения частичной суммы от суммы.

57. Что такое расстояние в $\mathbb{R}^n$? Что такое шар в $\mathbb{R}^n$? Дайте определение окрестности и проколотой окрестности точки в $\mathbb{R}^n$. Дайте определение предела последовательности точек в $\mathbb{R}^n$.

58. Дайте определения ограниченного множества, открытого и замкнутого множества в $\mathbb{R}^n$, границы множества, связного множества, области (в том числе — замкнутой области). Что можно сказать об объединении открытых (замкнутых) множеств? Что можно сказать об их пересечении? Что можно сказать о дополнении к открытому (замкнутому) множеству?

59. Докажите лемму Больцано-Вейерштрасса (о выделении сходящейся подпоследовательности из любой ограниченной последовательности) в многомерном случае.

60. Расскажите о понятии функции нескольких переменных. Что такое график функции (на примере функции 2-х переменных). Что такое множество уровня, Дайте определение предела функции, включая случай, когда функции задана на множестве в $\mathbb{R}^n$. Существует ли

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}?$$

61. Дайте определение непрерывности функции (нескольких переменных) в точке, на множестве, и перечислите основные свойства непрерывных функций.

62. Докажите теорему Коши о промежуточном значении в многомерном случае. Изложите и обоснуйте метод "пробных точек"решения

неравенств вида $f(x, y) > 0$. Найдите область определения функции $z = \ln \frac{xy-1}{x^2+y^2-1}$.

63. Докажите теорему Вейерштрасса о наибольшем и наименьшем значении (для функций нескольких переменных).

64. Дайте определение частных производных. Сформулируйте теорему Шварца о смешанных производных.

65. Дайте определение дифференцируемости функции нескольких переменных. Выведите формулу линеаризации.

66. Сформулируйте утверждение о связи дифференцируемости и непрерывности.

67. Дайте определение касательной плоскости к графику функции двух переменных. Сформулируйте утверждение о связи дифференцируемости и существованием касательной плоскости. Выведите уравнение касательной плоскости.

68. Дайте определение градиента. Дайте определение производной по направлению и выведите формулу для ее вычисления.

69. Дайте определение матрицы Якоби. Запишите формулу дифференцирования суперпозиции функций нескольких переменных.

70. Дайте определение матрицы Гессе. Выведите формулу Тейлора с остаточным членом Лагранжа второго порядка (для функций нескольких переменных).

71. Дайте определение точки локального экстремума функции нескольких переменных. Выведите необходимое условие локального экстремума для дифференцируемых функций.

72. Для функции нескольких переменных выведите достаточное условие локального экстремума и его отсутствия в терминах матрицы Гессе.

73. Для функций двух переменных выведите достаточное условие локального экстремума функции и его отсутствия в терминах вторых производных. Найдите точки локального экстремума функции $z = x^3 - y^2 + x^2 y$ и укажите к какому типу они относятся.

74. Дайте определение точки условного локального экстремума функции нескольких переменных.

75. Расскажите о способах задания кривых и поверхностей в пространстве. Сформулируйте теорему о неявной функции поясните ее геометрически.

76. Как дифференцировать неявную функцию? Запишите формулу Тейлора–Пеано второго порядка при $x \to 0$ для функции $y = y(x)$,

заданной неявно соотношением

$$xy^3 + y^2 - 1 = 0, \quad y(0) = 1.$$

77. Сформулируйте необходимое условие локального условного экстремума (правило множителей Лагранжа). Поясните его в случае функции двух переменных и одного условия; функции трех переменных и одного условия; функции трех переменных и двух условий.

78. Найдите максимум и минимум функции $w = x^3 + y^3 + z^3$ на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

79. Изложите с обоснованием метод, позволяющий найти наибольшее и наименьшее значение гладкой функции в ограниченной замкнутой области с "хорошей"(кусочно-гладкой) границей. Найдите максимум и минимум функции $w = x^3 + y^3 - z^3$ в шаре $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.