Вопросы к итоговому экзамену
Приложения теории операторов и функционального анализа
В. Лебедев
МИЭМ НИУ ВШЭ, 2018/2019 учебный год
ДПМ, группа МСУ-181, модуль 4

На экзамене студент получает билет, содержащий два вопроса из этого вопросника, и две задачи от экзаменатора.

Результирующая оценка = 0,5 накопленная оценка + 0,5 оценка на экзамене.

1. Выведите формулы двойственности для операций пересечения и объединения.

2. Определите понятие эквивалентности $X \sim Y$ множеств X и Y по Кантору. Приведите примеры.

3. Дайте определение счетного множества. Докажите, что множество Q рациональных чисел является счетным. Докажите, что множество Q^n является счетным. Является ли Q^∞ счетным?

4. Докажите, что объединение не более чем счетного набора счетных множеств является счетным.

5. Докажите, что при добавлении к бесконечному множеству конечного или счетного множества получается множество эквивалентное исходному.

6. Что такое несчетное множество? Докажите, что прямая R является несчетным множеством; выведите отсюда существование трансцендентных чисел.

7. Дайте определение континуального множества. Докажите континуальность множеств R^n, R^∞.

8. Сформулируйте теорему Кантора–Бернштейна о сравнении множеств.

9. Докажите, что множество $C(I)$ непрерывных функций на отрезке I является континуальным.

10. Изложите (схематично) построение меры Лебега в R^n. Приведите примеры множеств лебеговой меры 0 на прямой и плоскости. Докажите, что всякое счетное множество имеет меру нуль. Приведите пример несчетного множества на прямой, имеющего меру нуль (троичное множество Кантора). Сформулируйте утверждение о существование неизмеримых по Лебегу множеств.

11. Сформулируйте утверждение о замкнутости класса измеримых множеств относительно операций счетного объединения, пересечения и перехода к дополнению.

12. Дайте определение измеримой функции. Сформулируйте утверждение о том, что класс измеримых функций замкнут относительно арифметических операций и поточечного предельного перехода.

13. Что означает фраза "свойство X выполнено почти всюду"? Дайте определение сходимости последовательности функций почти всюду и сходимости по мере. Сформулируйте теорему об их связи. Приведите примеры.

14. Сформулируйте утверждение о замкнутости класса измеримых функций относительно поточечного предельного перехода.

15. Сформулируйте теоремы Егорова и Лузина об исправлении на множестве малой меры.

16. Определите интеграл Лебега.

17. Опишите связь между интегралом Лебега и интегралом Римана (включая случай несобственного интеграла Римана).

18. Сформулируйте теорему Лебега о мажорируемом предельном переходе.

19. Сформулируйте теорему Леви о предельном переходе и ее следствие для рядов.

20. Сформулируйте лемму Фату о предельном переходе в интеграле.

21. Дайте определения сигма алгебры множеств и меры. Приведите примеры. Дайте определение пространства с мерой. Дайте определение интеграла в случае абстрактного пространства с мерой.

22. Что такое функция распределения? Определите меру Стилтьеса на R. Что такое абсолютно непрерывная мера? Что такое дискретная мера. Что такое интеграл Стилтьеса? Как вычисляется интеграл по абсолютно непрерывной и по дискретной мере.

23. Дайте определение метрического пространства. Определите пространства l^2, l^1, l^∞, $C([a,b])$, $BC(R)$. Определите пространства $L^1(X)$ и $L^2\infty(X)$ (можно ограничиться случаем отрезка). Что такое подпространство метрического пространства?

24. Дайте определение открытого шара $B(x_0, r)$ и окрестности точки в метрическом пространстве.

25. Дайте определение предела последовательности точек в метрическом пространстве. Докажите единственность предела.

26. Сравните сходимость в l^2 с покоординатной сходимостью. Сделайте тоже самое для l^1 и l^∞.

27. Сравните сходимость в $C[a,b]$ с поточечной сходимостью и со сходимостью в $L^2[a,b]$ и $L^1[a,b]$.

28. Дайте определение внутренней точки множества в метрическом пространстве и дайте определение открытого множества. Приведите примеры

открытых множеств. Покажите, что открытый шар является открытым множеством.

29. Дайте определение предельной точки множества в метрическом пространстве. Дайте определение замыкания $\overline{E}$ множества E в метрическом пространстве. Выведите основные свойства операции замыкания: $E \subseteq \overline{E}$, $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$, $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$. Докажите, что $\overline{E \cap F} \subseteq \overline{E} \cap \overline{F}$. Верно ли, что $\overline{E \cap F} = \overline{E} \cap \overline{F}$?

30. Дайте определение замкнутого множества в метрическом пространстве. Докажите теорему, характеризующую замкнутые множества в терминах сходящихся последовательностей.

31. Докажите, что замкнутый шар $\overline{B}(x_0, r)$ является замкнутым множеством.

32. Докажите, что объединение любого набора открытых множеств является открытым множеством. Докажите, что пересечение любого набора замкнутых множеств является замкнутым множеством.

33. Докажите, что пересечение конечного набора открытых множеств является открытым множеством. Верно ли, что пересечение любого набора открытых множеств является открытым множеством? Приведите контрпример.

34. Докажите, что объединение конечного набора замкнутых множеств является замкнутым множеством. Верно ли, что объединение любого набора замкнутых множеств является замкнутым множеством? Приведите контрпример.

35. Что такое всюду плотное множество? Что такое нигде не плотное множество? Приведите примеры. Докажите, что множество $\{x : x(t_0) = 0\}$ замкнуто и нигде не плотно в $C[a, b]$.

36. Докажите, что множество $\{x : \sum_{k=1}^{\infty} x_k = 0\}$ замкнуто и нигде не плотно в l^1 и всюду плотно в l^2.

37. Дайте определение полного метрического пространства. Докажите полноту прямой R. Приведите пример метрического пространства, не являющегося полным.

38. Докажите полноту пространства R^n.

39. Докажите полноту пространств l^2, l^1, l^∞ (можно ограничиться одним из них).

40. Какие из следующих пространств являются полными: $C([a, b])$, $L^1(X), L^2(X)$ ($X = [a, b]$, $X = R$)? Докажите полноту какого нибудь из них.

41. Докажите, что если X — полное метрическое пространство и Y его подпространство, то Y полно тогда и только тогда, когда оно замкнуто.

42. Сформулируйте теорему о вложенных шарах в метрических пространствах. Сформулируйте теорему Бэра о полных метрических пространствах.

43. Дайте определение непрерывного отображения одного метрического пространства в другое.

44. Дайте определение сжимающего отображения в метрическом пространстве, приведите примеры. Является ли отображение $t \to \sin t$ сжимающим как отображение прямой R в себя?

45. Докажите теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Выведите оценку расстояния между n -ой итерацией и неподвижной точкой.

46. Дайте определение сепарабельного метрического пространства. Докажите сепарабельность прямой R. Докажите сепарабельность R^n.

47. Докажите, что пространство l^2 сепарабельно. Докажите, что пространство l^1 сепарабельно. Докажите, что l^∞ не сепарабельно.

48. Сформулируйте теорему Вейерштрасса о многочленах и выведите из нее сепарабельность пространства $C([a,b])$.

49. Докажите сепарабельность пространств $L^1[a,b], L^1(R), L^2[a,b], L^2(R)$.

50. Дайте определение нормированного пространства. Приведите примеры. Покажите, что соотношение $\rho(x,y) = \|x-y\|$ определяет метрику в нормированном пространстве (это естественная метрика, порожденная нормой). Что такое банахово пространство.

51. Что такое эквивалентные нормы? Являются ли нормы $\|x\|_1 = \max_{[0,1]} |x(t)|$ и $\|x\|_2 = \int_0^1 |x(t)|dt$ эквивалентными нормами в пространстве непрерывных функций на отрезке $[0,1]$? Покажите, что любые две нормы в конечномерном пространстве — эквивалентны.

52. Дайте определение сходящегося ряда в нормированном пространстве. Покажите, что если ряд $\sum_{k=1}^\infty x_k$ сходится, то его члены стремятся к нулю, т.е. $\|x_k\| \to 0$ (необходимое условие сходимости). Покажите, что в банаховом пространстве из сходимости числового ряда $\sum_{k=1}^\infty \|x_k\|$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^\infty x_k$ (достаточное условие сходимости).

53. Дайте определение базиса в нормированном пространстве. Покажите, что всякое нормированное пространство с базисом сепарабельно.

54. Дайте определение евклидова пространства. Выведите неравенство Коши – Буняковского – Шварца. Как определяется естественная норма в евклидовом пространстве? Что такое гильбертово пространство?

55. Сформулируйте теорему о существовании ортонормированного базиса в сепарабельном гильбертовом пространстве и изложите схему ее доказательства. Сформулируйте теорему о разложении по ортонормированному базису.

56. Дайте определение линейного непрерывного функционала, заданного на нормированном пространстве. Дайте определение линейного ограниченного функционала. Сформулируйте утверждение о том, что эти понятия совпадают. Приведите примеры. Дайте определение нормы функционала (укажите все три эквивалентных определения). Дайте определение пространства X^* сопряженного к нормированному пространству X.

57. Приведите примеры линейных функционалов в пространстве $C[a,b]$ и вычислите их норму.

58. Сформулируйте утверждение о виде ограниченного линейного функционала в гильбертовом пространстве. Какие следствия влечет это утверждение для пространств l_2 и $L_2[a,b]$?

59. Когда говорят, что последовательность функционалов $f_n \in X^*, n = 1, 2, \ldots$, сходится слабо (поточечно)? Когда говорят, что она сходится сильно (по норме)? Приведите примеры. Докажите единственность слабого и сильного предела (если они есть). Докажите, что из сильной сходимости вытекает слабая сходимость к тому же пределу.

60. Рассмотрим последовательность функционалов $f_n, n = 1, 2, \ldots$, на $C[0,1]$, вида $f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(\frac{k}{n})$. Является ли эта последовательность слабо сходящейся? Сильно сходящейся? Если да, то каков предел?